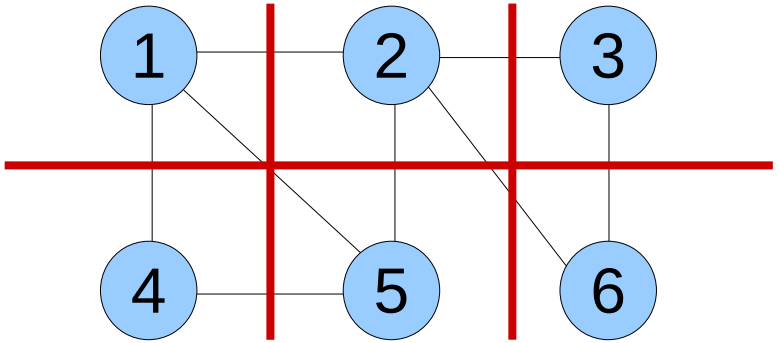
Redes Complexas
Aula 14

Roteiro

- Partição e bisseção em grafos
- Modularidade
- Algoritmos de Newman e Louvain
- Limitações

Partição de Grafos

- **Problema:** Dividir um grafo em partes
  - partição do conjunto de vértices



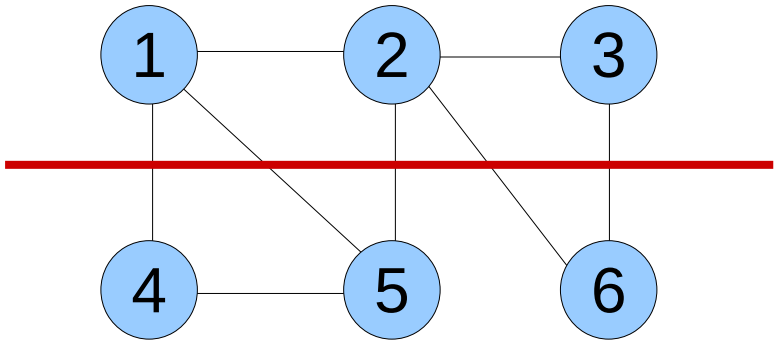
- Problema antigo, difícil e com muitas aplicações!
- Qual partição ao lado é melhor?

Como definir uma boa partição?

- Não há bala de prata, depende da aplicação

Corte em Grafos

- **corte:** induz uma partição com duas partes
  - subconjuntos A e B de vértices

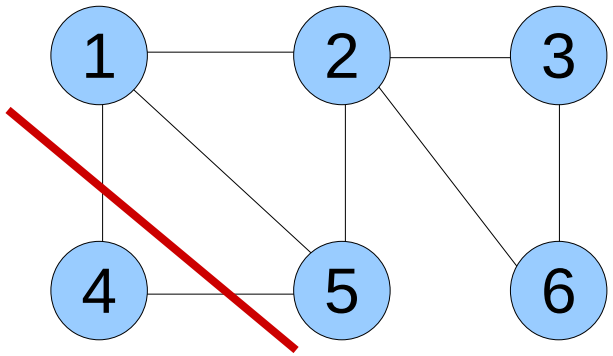


- A={1,2,3} , B={4,5,6}

- c(A,B) = custo do corte (A,B) = número de arestas entre vértices de A e B
  - soma dos pesos das arestas, em caso com peso
  - ex. c(A,B) = 5

Corte em Grafos

- **Problema:** encontrar o corte de custo mínimo de um grafo qualquer
  - problema clássico da computação, temos algoritmo polinomial

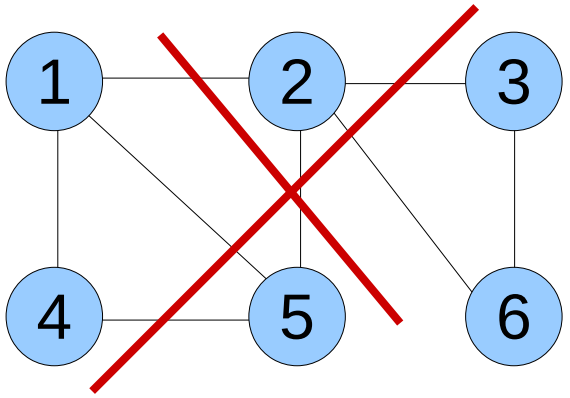


- A={1,2,3,5,6} , B={4}
- c(A,B) = 2

- Problema: tamanho das duas partes encontradas não é considerado
  - em muitos aplicações, isto é importante

Bisseção em Grafos

- **bisseção:** corte com duas partes do mesmo tamanho (ou 1 de diferença)
  - restrição na definição de corte

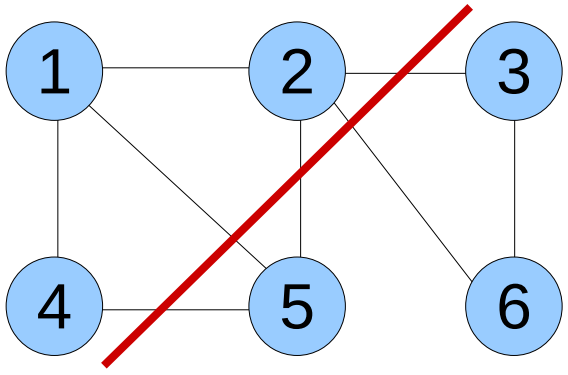


- A={1,2,4} , B={3,5,6}
- c(A,B) = 5

- **Problema:** encontrar a bisseção de custo mínimo em um grafo qualquer
  - ex. A={1,4,5}, B={2,3,6}, c(A,B) = 2

Bisseção em Grafos

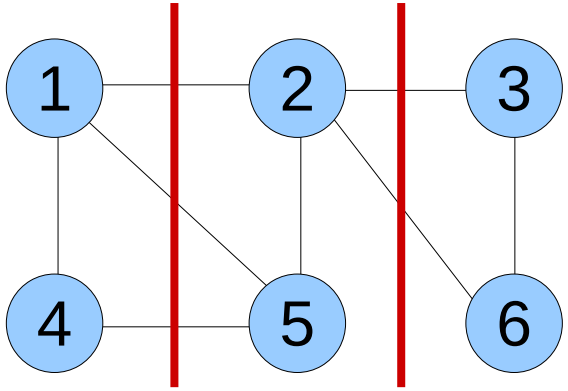
- Problema de bisseção é NP-Completo (não temos algoritmo polinomial)
  - exceções para classes de grafos, ex. árvores
- Algoritmo de Kernighan–Lin (1970)
  - algoritmo guloso (heurística) que troca pares de vértices até não reduzir mais o custo
  - a cada passo, escolhe par que ao trocar de lado mais reduz custo do corte



- A={1,2,4}, B={3,5,6}, c(A,B)=5
- Trocar 2 e 5
- A={1,4,5}, B={2,3,6}, c(A,B)=2

Partição Balanceada em Grafos

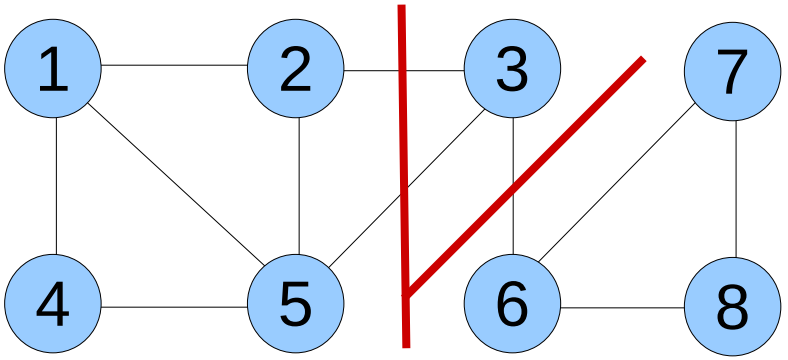
- Generalização da bisseção em grafos
- k partes de tamanho igual (ou 1 de diferença)
  - V_1, V_2, ..., V_k, interseção é vazia, união é V
- Custo da partição é o custo do corte somado para todas as partes (V_i, V_j)



- k=3, V_1={1,4}, V_2={2,5}, V_3={3,6}
- Custo = $c(V_1,V_2)+c(V_1,V_3)+c(V_2,V_3)$ = = 3 + 0 + 2 = 5

Problemas com Partição Balanceada

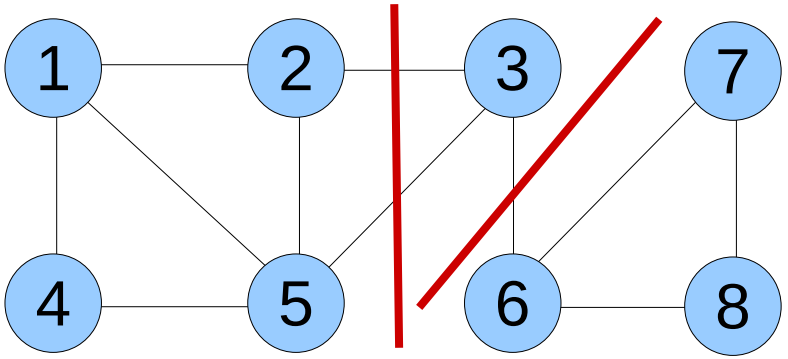
- **Problema 1**: número de partes tem que ser especificado
- **Problema 2:** tamanho das partes tem que ser igual (ou diferir em um)
- **Problema 3**: estrutura interna das partes não é considerado
  - podem não ser conexas, ter baixa densidade



- Em muitas aplicações, isto é importante
- *Network science* x teoria dos grafos!

Medindo Qualidade de Partição

- Como melhor aferir a qualidade de uma partição?
- **Ideia:** usar tamanho das partes para determinar “potencial” de arestas
  - normalização
- Ratio-Cut(A,B) = c(A,B) / |A||B|
  - onde |A| é o número de vértices em A



- rc(A,B) = 2 / (4*4) = 1/8
- rc(A,B) = 1 / (5*3) = 1/15

Partição com Ratio Cut

- **Problema:** encontrar partição (com duas partes) que minimiza ratio cut
  - problema é NP-Completo
  - algoritmo aproximativo de Arora, Rao & Vazirani (2009), com fator O(sqrt(log n))
- Ratio cut tem conexões com decomposição spectral do Laplaciano do grafo
  - método para encontrar corte, limitante superior para ratio cut mínimo
- Ratio Cut ainda não resolve problemas
  - número de partes da partição
  - estrutura interna das partes

Modularidade

- **Outra ideia**: considerar modelo aleatório para criação de arestas, aferir arestas internas às partes
  - p_{ij} : probabilidade de aresta entre vértices i e j
- Considere parte V_k (conjunto de vértices)

$$X_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in V_k} A_{ij}$$ = número de arestas dentro de V_k

$$Y_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in V_k} p_{ij}$$ = número médio de arestas dentro de V_k

$X_k - Y_k$ → indica a "força" das arestas dentro de V_k

- Considerando todas as partes

$$M = \frac{1}{m} \sum_k \left(X_k - Y_k \right) = \frac{1}{2m} \sum_k \sum_{i,j \in V_k} \left(A_{ij} - p_{ij} \right)$$

constante de normalização (número de arestas)

Modularidade

- **Problema:** Como definir p_{ij} para uma rede qualquer?
  - rede real não sai de um modelo
- **Ideia:** usar o configuration model
  - assumir que rede foi gerada pelo configuration model

$$p_{ij} = \frac{d_i d_j}{2m}$$ → d_i , d_j são os graus dos vértices i , j

- Substituindo, temos

$$M = \frac{1}{2m} \sum_k \sum_{i,j \in V_k} \left(A_{ij} - \frac{d_i d_j}{2m} \right)$$

Modularidade

- Simplificando, temos

$$M = \sum_k \left(\frac{m_k}{m} - \left(\frac{d_k}{2m} \right)^2 \right)$$

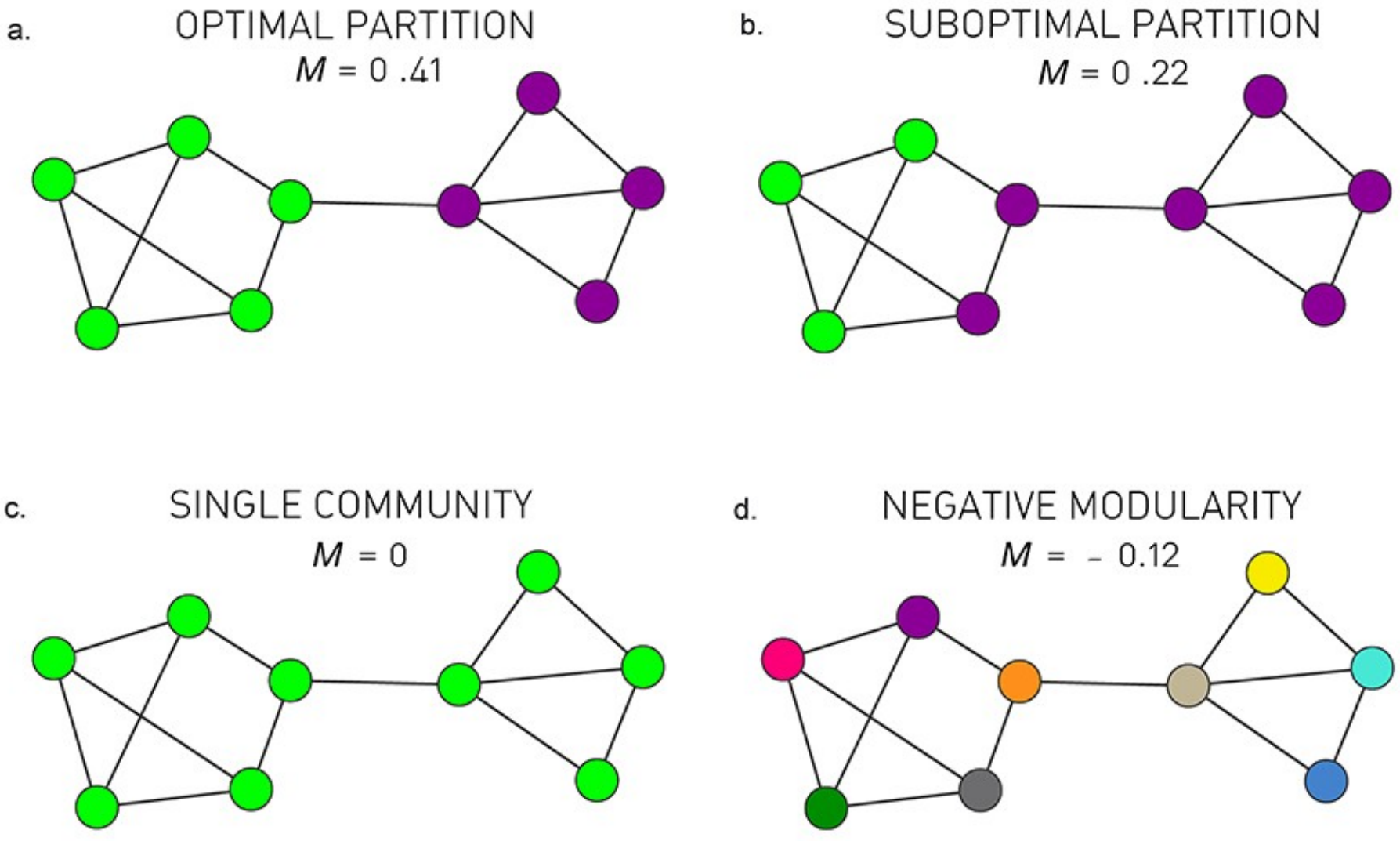
- onde m_k é o número de arestas dentro da parte k, d_k é a soma dos graus dos vértices da parte k

Propriedades

- M = 0 se k=1: a rede inteira define um *baseline*
- M < 0 se k=n: muitas partições é ruim
- max M <= 1: valor máximo da modularidade é 1

Partição é chamado de comunidades em *network science*

Exemplo de Modularidade



Figueiredo – 2021

Calculando Modularidade

- **Problema:** determinar partição que maximiza modularidade de uma rede
  - não se conhece algoritmo eficiente
- Algoritmo guloso (heurística) de Newman

  1) Cada vértice em sua parte

  2) Determinar ganho de modularidade ao juntar duas partes (para todos os pares de partes)

  3) Fundir partes que possui maior ganho

  4) Voltar ao passo 2 até ter uma única parte

  5) Retornar partição de maior modularidade (guardar partição e modularidade a cada passo)
- Complexidade (cada passo): O((n+m)n)

Algoritmo de Louvain

- Proposto por pesquisadores de UC Louvain, Bélgica (Blondel et al.)
  - algoritmo guloso (heurística) ainda mais rápido

  1) Cada vértice em sua parte

  2) Determinar ganho de modularidade ao mover vértice para parte de um de seus vizinhos

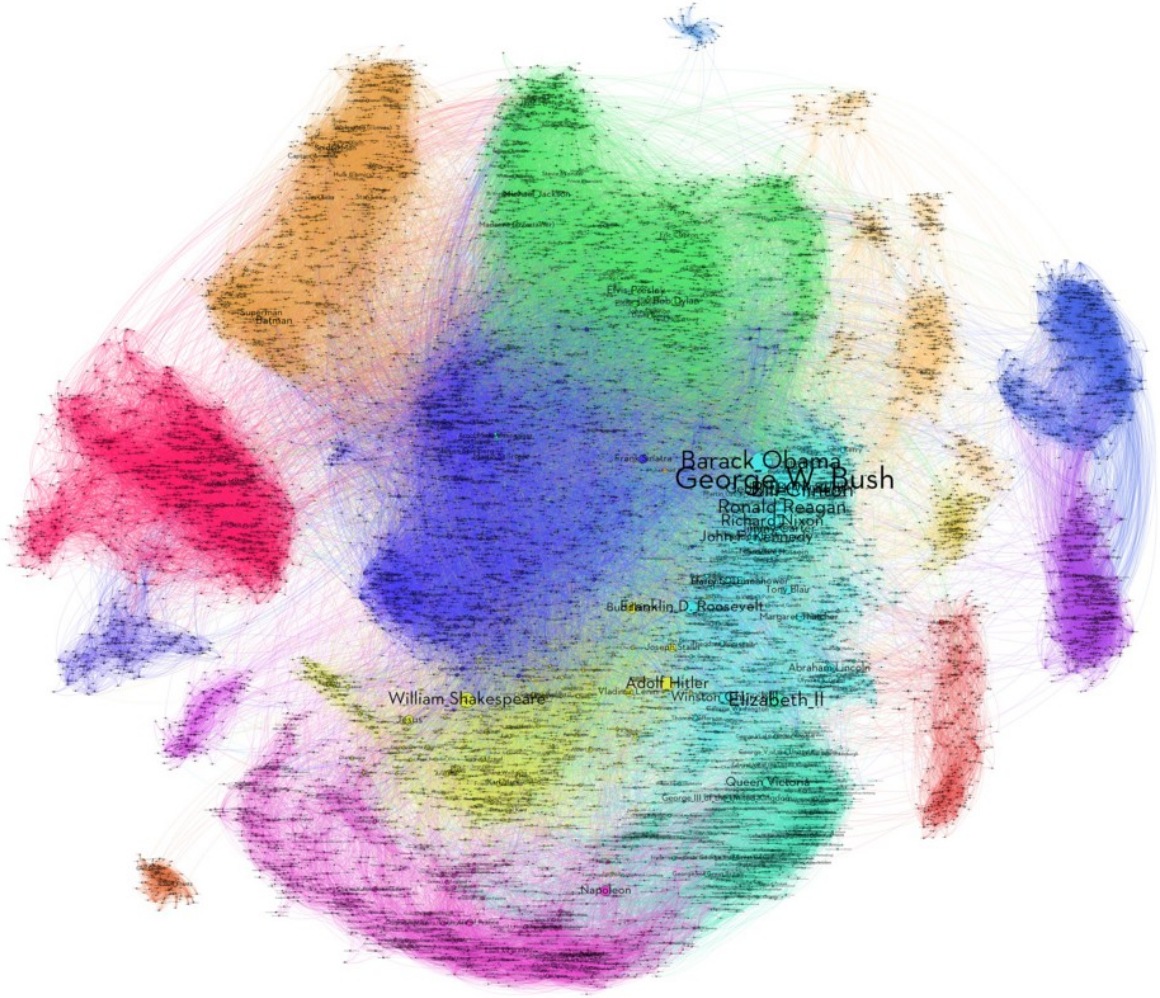
  3) Fazer fusão de maior ganho, se houver

  4) Construir nova rede onde cada parte é um vértice

  5) Voltar ao passo 2 até não conseguir melhorar
- Complexidade (cada passo): O(m)

Algoritmo de Louvain

- Funciona em redes com 100 milhões de vértices (bilhões de arestas)
- Algoritmo pode ser paralelizado



- Comunidades de uma rede social
- Cada cor é uma comunidade (parte) identificada pelo algoritmo

Limitações de Modularidade

- Métrica é enviesada para partes maiores
  - partes pequenas reduzem modularidade, quando rede cresce: *resolution limit*
- Diferença de modularidade ao juntar partes A e B

$$\delta M_{AB} = \frac{m_{AB}}{m} - \frac{d_A d_B}{2m^2}$$

  - onde m_{AB} é o número de arestas entre A e B, d_A é a soma dos graus dos vértices de A

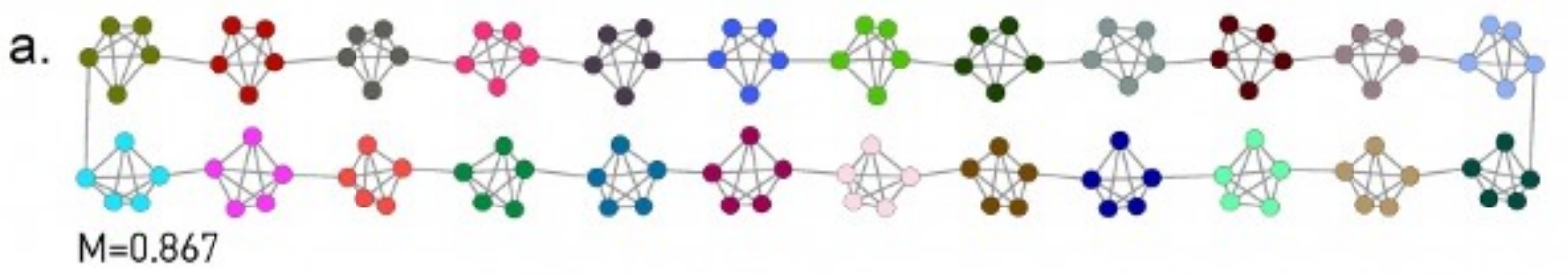
- Se d_A, d_B não for grande o suficiente, basta $m_{AB} = 1$ para juntar as duas partes!

$$d_A \geq \sqrt{2m}$$

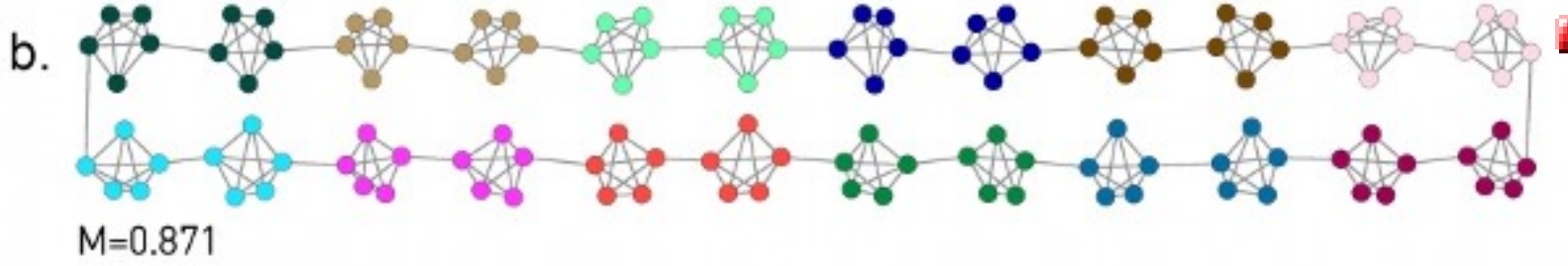
  - Condição (aproximada) para tamanho mínimo (em arestas) de cada parte para maximizar modularidade da rede

Limitações de Modularidade

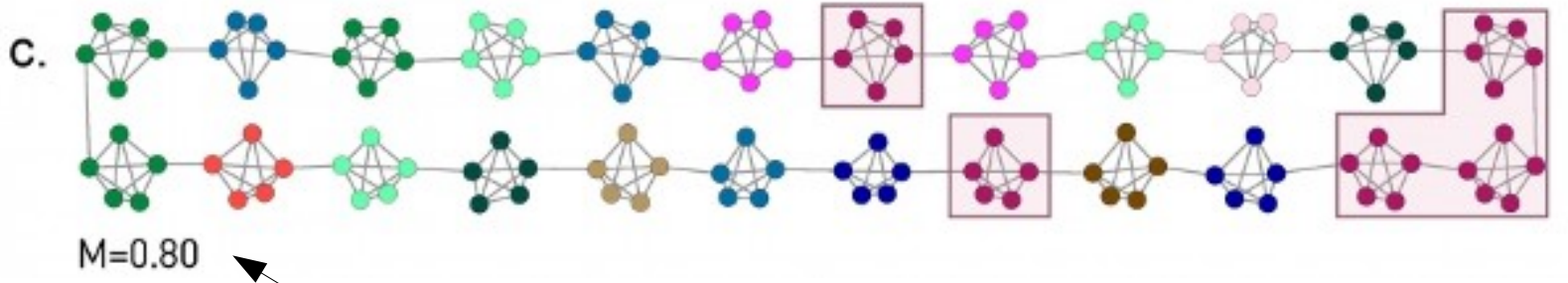
- Anel com 24 cliques de tamanho 5



- Partição intuitiva (cada clique é uma parte)



- Modularidade máxima (duas cliques por parte)



- Partição aleatória (cliques em partes)

Valor relativamente alto!

Partição com Sobreposição

- Vértices frequentemente pertencem a diferentes comunidades (partes)
  - redes sociais: família, trabalho, escola, hobby
  - redes de informação: diferentes assuntos
- Partição com sobreposição
  - vértice pode estar em mais de uma parte (comunidade)
- Algoritmos
  - CFinder: baseado em percolação de cliques
  - Link Clustering: baseado em similaridade arestas

Ainda é tema de pesquisa!