Redes Complexas
Aula 7

Roteiro

- Modelos de redes
- Grafos aleatórios
- Modelo G(n,p)
- Propriedades

Estudando Redes Reais

- Como estudar as características e funcionalidades redes?
  - ex. Internet, redes sociais
- Como generalizar estas observações?

Modelo matemático

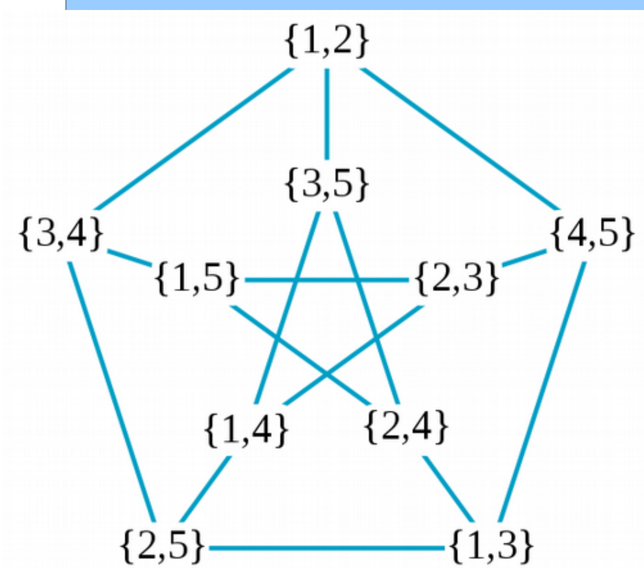
- Abstração matemática da realidade
  - além do estudo empírico
- Generalização das redes reais

Modelo matemático para redes

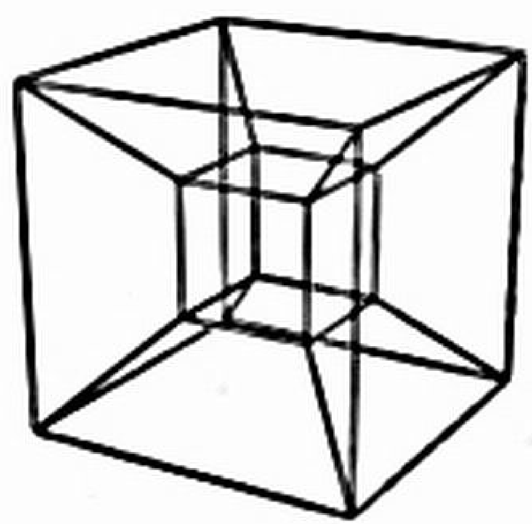
Modelos Determinísticos para Redes

- Estrutura topológica é determinística
  - seguem alguma regra de formação

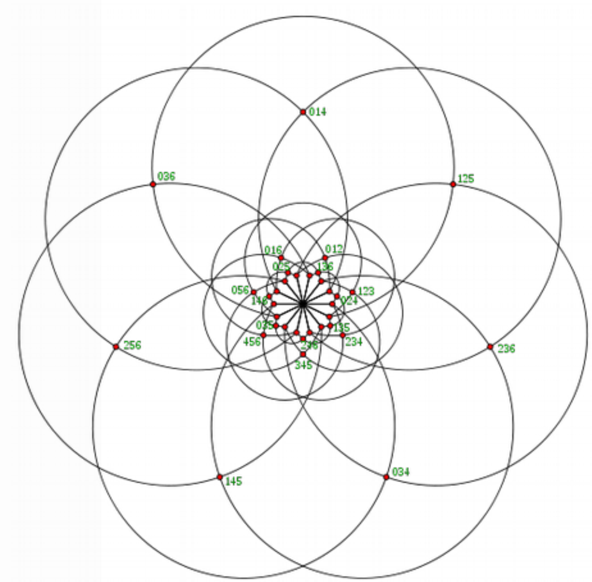
Exemplos de modelos?



Grafo Kneser



Hipercubo

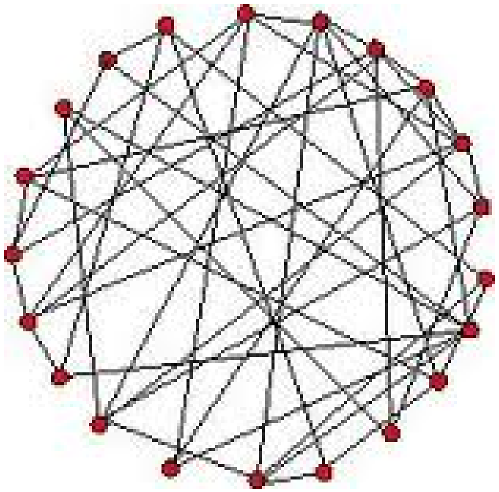


Grafos ímpares

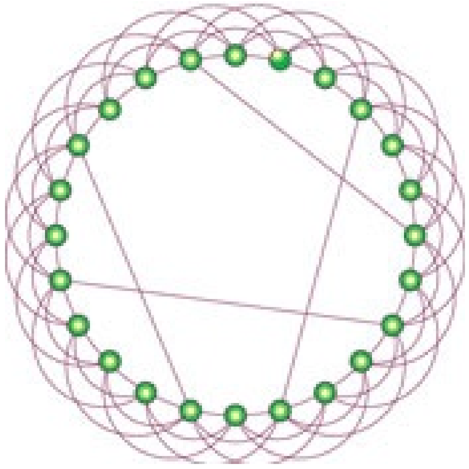
Modelos Probabilísticos para Redes

- Estrutura topológica é aleatória
  - seguem regras de formação com aleatoriedade

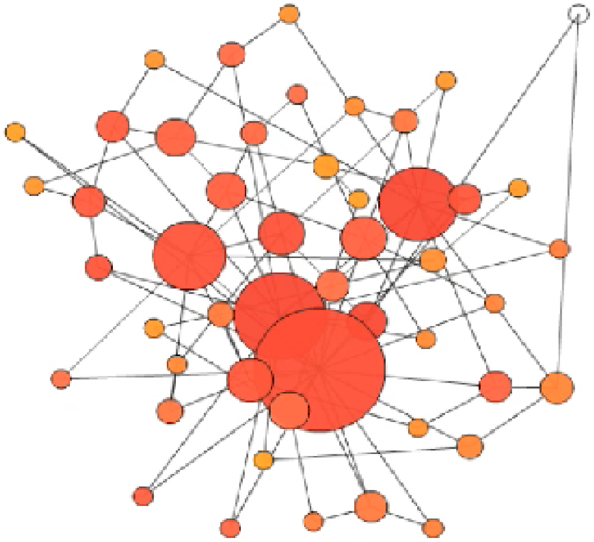
Exemplos de modelos?



Erdös-Réyni



Watts-Strogatz



Barabási-Albert

Modelo G(n,p)

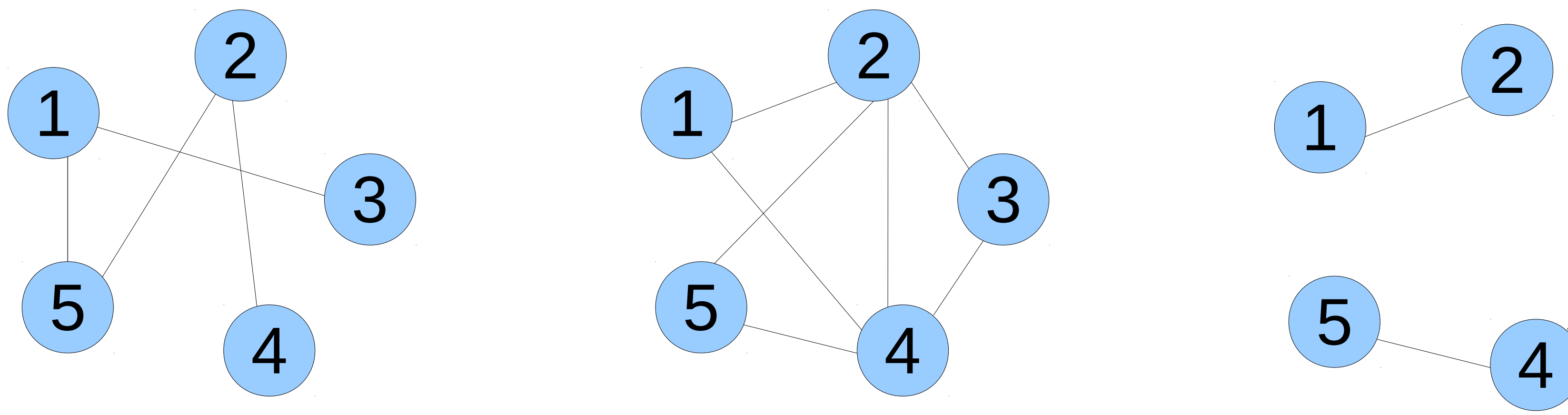
- Modelo clássico para grafos aleatórios
  - estudado por Erdös e Rényi na década de 50
  - aka. modelo binomial, modelo de Erdös-Rényi

Como funciona o modelo?

- Grafo possui *n* vértices rotulados
- Cada possível aresta do grafo ocorre com probabilidade *p*, independentemente
  - grafo não-direcionado, sem loops

Modelo G(n,p)

- Modelo possui dois parâmetros (determinísticos)
  - *n*: número de vértices
  - *p*: prob. de ocorrência de cada aresta
- Dado os dois parâmetros, qual o grafo gerado?
  - ex. n=5, p=0.25
- Qualquer grafo com cinco vértices por ocorrer
  - grafo é aleatório



Estudo do G(n,p)

- Estudar a **estrutura** dos grafos gerados pelo modelo G(n,p)
  - em função de *n* e *p* (seus parâmetros)
- Estrutura é aleatória
  - depende da realização
- Mas podemos caracterizar suas propriedades topológicas
  - probabilisticamente, e “quase certamente”

Propriedades Simples

- Espaço amostral do modelo G(n,p)?
  - Quantos grafos diferentes?

$$|S| = 2^{\binom{n}{2}}$$

Cada aresta pode ou não estar presente

- Probabilidade do modelo gerar um grafo G específico com n vértices?
  - Gerar um conjunto de arestas E = {e_1, e_2, ... , e_m }

$$P(gerar\, conjunto\, E) = p^{|E|}(1-p)^{\binom{n}{2}-|E|}$$

- Depende apenas de |E|, e não das arestas
- Todos grafos são equiprováveis quando p = 1/2

Arestas do G(n,p)

- Quantas arestas tem um grafo do modelo G(n,p)?
- Variável aleatória, M. Distribuição de M?

$$P(M=m)=\binom{\binom{n}{2}}{m} p^m (1-p)^{\binom{n}{2}-m}$$

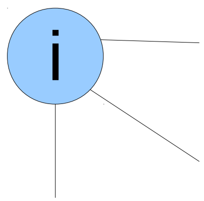
Distribuição binomial

- Valor esperado de M?

$$E[M]=\binom{n}{2}p=\frac{n(n-1)p}{2}$$

Grau do G(n,p)

- Qual é o grau de um vértice qualquer do modelo?
- Variável aleatória D. Distribuição de D?



$$P[D=k]?$$ k = 0, 1, ..., n-1

- Cada aresta incide sobre vértice i com prob p

$$P[D=k]=\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}$$

Distribuição binomial

- Valor esperado do grau?

$$E[D]=(n-1)p$$

Grau do G(n,p)

- Aproximação do grau para n grande
- Binomial pode ser aproximada pela Poisson

$$p_k = P[D=k] = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

...

$$p_k \approx \frac{E[D]^k}{k!} e^{-E[D]}$$

Para n grande e k << n

- Distribuição de Poisson com valor esperado E[D]

Coeficiente de Clusterização

- CC local de um vértice qualquer do modelo?
- Variável aleatória, K. Distribuição? Valor esperado?
- Distribuição condicional, no grau do vértice d > 2

$$P\left[K=\frac{k}{\binom{d}{2}}\middle|D=d\right]=\binom{\binom{d}{2}}{k}p^{k}(1-p)^{\binom{d}{2}-k}$$

Prob. de termos k arestas entre os d vizinhos do vértice (binomial, de novo)

- Valor esperado

$$E[K]=p$$

Não depende do grau

Propriedades Topológicas

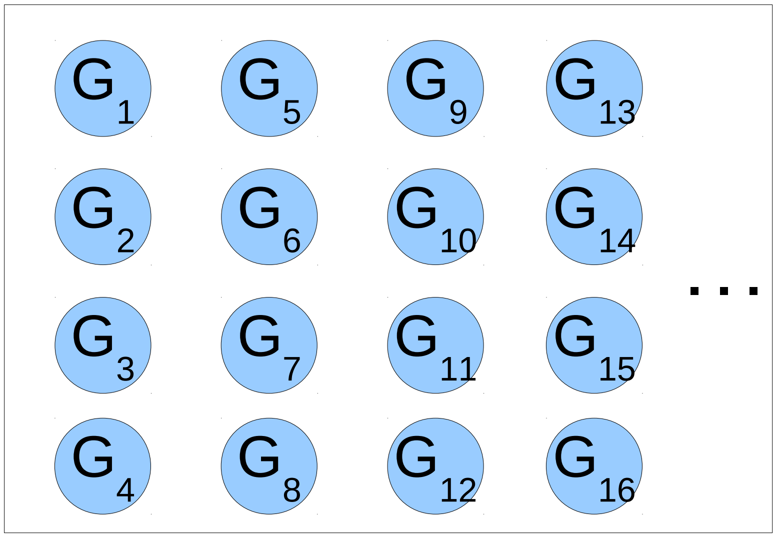
- Seja propriedade X
  - ex. X = “grafo é conexo”
- Seja G a realização do processo aleatório
  - G é um grafo do espaço amostral

G possui propriedade X?

Sim ou não! Depende da amostra!

Exemplo

Espaço amostral =
todos possíveis grafos que podem ser gerados



- Seja X uma propriedade estrutural
  - ex. ser conexo
- Alguns grafos do espaço amostral possuem propriedade X

- Modelo “possui” propriedade X
  - probabilidade do modelo gerar uma amostra que possui propriedade X

Propriedades Topológicas

- Seja p_G a probabilidade do modelo gerar o grafo G
  - grafo G é um elemento do espaço amostral
- Seja C o conjunto de grafos do espaço amostral que possuem propriedade X
- Então temos

$$P[G\ possuir\ X] = \sum_{G' \in C} p_{G'}$$

- Probabilidade pode depender de *n*
  - número de vértices do grafo
- Interesse na probabilidade assintótica
  - quando *n* é muito grande

Propriedade de *Quase Todos os Grafos*

- Seja G um modelo de grafos aleatórios e X uma propriedade topológica
- Se

$$P[G\ possuir\ X] \rightarrow 1 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty$$

- Então dizemos que quase todos os grafos de G possuem propriedade X
  - X ocorre em G a.a.s. (*asymptotically almost surely*)

Propriedades Topológicas

- Estudar a **estrutura** do modelo G(n,p)
  - em função de *n* e *p* (únicos parâmetros)
- Caracterizar estrutura para *n* muito grande
  - estrutura quando *n* tende para infinito
  - evitar efeitos de borda

$$P\left[G\ possuir\ X\right] \rightarrow ? \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty$$

- onde X é uma propriedade topológica de G
  - ex. X = “ser conexo”

Estrutura também depende de *p*

Comportamento de p

- Caracterizar G(n,p) quando *n* tende a infinito. Mas o que ocorre com *p*?

Como *p* varia quando $n \longrightarrow \infty$

- Duas alternativas
  - *p* é fixo, não varia com n
  - *p* é uma função de n (decrescente)
- Influência fundamental na estrutura
  - estrutura depende de *p*

G(n,p) com p fixo

- Considere $p > 0$ fixo (constante)
- Grau esperado dos vértices?
  - quando n tende a infinito?
- Número de arestas esperado no grafo?
  - quando n tende a infinito?

Grafo muito denso

- **Intuitivamente**: Grafo conexo, vértices muito próximos

G(n,p) com p fixo

- Para *p* constante > 0, G(n,p) é conexo a.a.s.

$$\lim_{n \to \infty} P[G \text{ "ser conexo"}] = 1$$

- Como provar este resultado?
- **Idéia:** mostrar que a probabilidade de não ser conexo vai a zero
- Condicionar no tamanho da partição s, n-s
- Usar Union-Bound para descondicionar
- Mostrar que probabilidade vai a zero

G(n,p), p fixo tem diâmetro 2

- Para p constante > 0, G(n,p) é conexo e possui diâmetro 2 a.a.s.

$$\lim_{n \to \infty} P[G \ \text{"ter diâmetro 2"}] = 1$$

- Diâmetro 2: maior distância entre qualquer dois vértices é 2
- Como provar este resultado?
- **Idéia**: mostrar que o número de vértices que não possuem vizinhos em comum vai a zero