

Redes Complexas

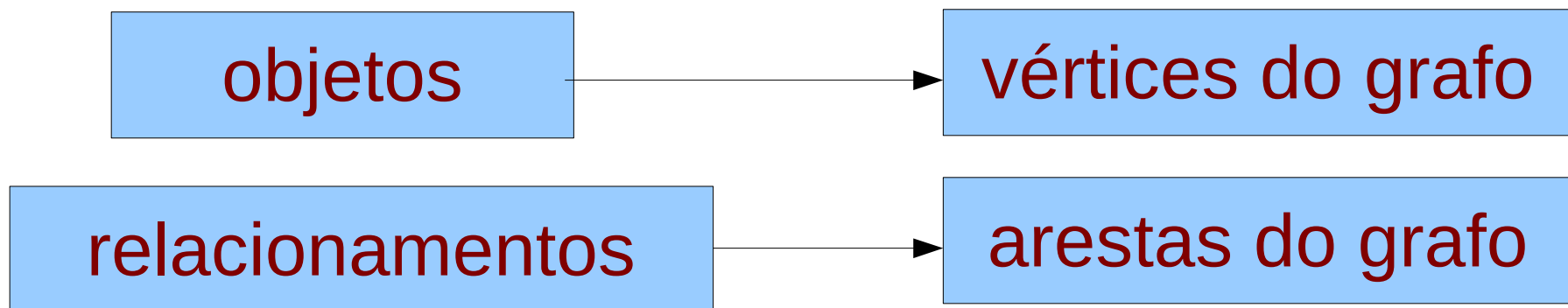
Aula 2

Aula de hoje

- Representando redes
- Falando sobre redes
- Grau, distância, clusterização
- Características de redes reais

Rede

- Abstração que permite **codificar** relacionamentos entre **pares** de objetos



Exemplos?

Objetos e Relacionamentos

■ Sobre objetos

- idênticos, diferentes tipos, atributos (rótulos)
- ex. nacionalidade, gênero, idade, etc

■ Sobre relacionamentos

- simétricos, assimétricos, diferentes intensidades (pesos), negativos
- múltiplos relacionamentos na mesma rede
- ex. amizade, colaboração, interação, confiança, ...

**Rede captura estrutura
do relacionamento**

Classe de Redes

- **Redes sociais:** relacionamento entre pessoas ou grupo de pessoas
- **Redes de informação** (de conhecimento): codificam associação entre informação
- **Redes tecnológicas:** construída pelo homem geralmente para distribuir *commodities*
- **Redes biológicas:** codifica relacionamentos em sistemas biológicos

Classificação para referência

- *Twitter:* rede social ou rede de informação?

Como Falar sobre Redes?



- Desenho da rede: “figura vale por mil palavras”
- Não funciona para redes grandes

Descrever estrutura da rede!

■ **Matriz de adjacência, A**

■ Matriz $n \times n$ (n é número de vértices)

■ $A_{ij} = 1$, se existe aresta entre vértices i e j

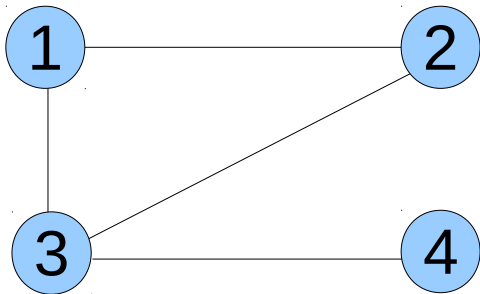
■ $A_{ij} = 0$, caso contrário

■ Codifica todos os relacionamentos da rede

■ Generaliza com pesos, pode ser assimétrica

Matriz de Adjacência

■ Exemplo



	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	0
3	1	1	0	1
4	0	0	1	0

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ ?

Matriz de Adjacência



- Problema em descrever a estrutura com matriz de adjacência?
- Possui toda a informação mas é pouco intuitivo
- **Matriz é o DNA da rede**
 - descrever uma pessoa através do seu DNA?

Precisamos de resumos da estrutura!

- Resumos oferecem intuição sobre a estrutura

Características de Redes

- Características estruturais são resumos da estrutura
 - ex: tamanho, densidade, graus, distâncias, clusterização, centralidade, homofilia, etc
- Quais características devem ser avaliadas? Quais são importantes?
- Depende do propósito!
- Como gens que formam o DNA, diferentes resumos possuem implicações diferentes



Característica Importante



- O que faz uma característica ser importante?

1) Prever (determinar) comportamento geral de algum processo

- independente de outras características

2) Influência sobre diferentes processos

- Exemplo: distribuição de grau

- determina e influencia comportamento de passeios aleatórios e epidemias

- Não conhecemos muitas características fundamentalmente importantes

Vértices e Arestas

- Número de vértices de um grafo

- $n = |V|$ ← cardinalidade do conjunto

- Número de arestas de um grafo

- $m = |E|$

- Dado $G = (V, E)$, qual é o maior número de arestas de G ?

- número de pares não ordenados em um conjunto de $n = |V|$ objetos $\longrightarrow \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leq n^2$

- Densidade: fração de arestas que o grafo possui

$$\rho = \frac{m}{\binom{n}{2}} = \frac{2m}{n(n-1)}$$

Grau

- Número de arestas (relacionamentos) incidente em um vértice
 - $g(u)$: grau do vértice u



- Como falar sobre o grau dos vértices da rede?
 - como falar de uma característica sobre um conjunto de objetos?
- Média, desvio padrão: um número
- Distribuição empírica: todos os graus – comportamento geral

Grau Médio

- Grau médio do grafo considerando todos seus vértices

$$\bar{g} = 1/n \sum_{u \in V} g(u) \quad \longleftarrow \text{Grau do vértice } u$$

- Também pode ser calculado diretamente

$$\sum_{u \in V} g(u) = 2m$$

- Cada aresta tem duas pontas!

- Logo temos $\bar{g} = 2m/n$

Distribuição do Grau

- Distribuição empírica do grau dos vértices
 - frequência relativa do grau

$$f_k = \frac{\text{Número de vértices com grau } k}{\text{Número total de vértices}}$$

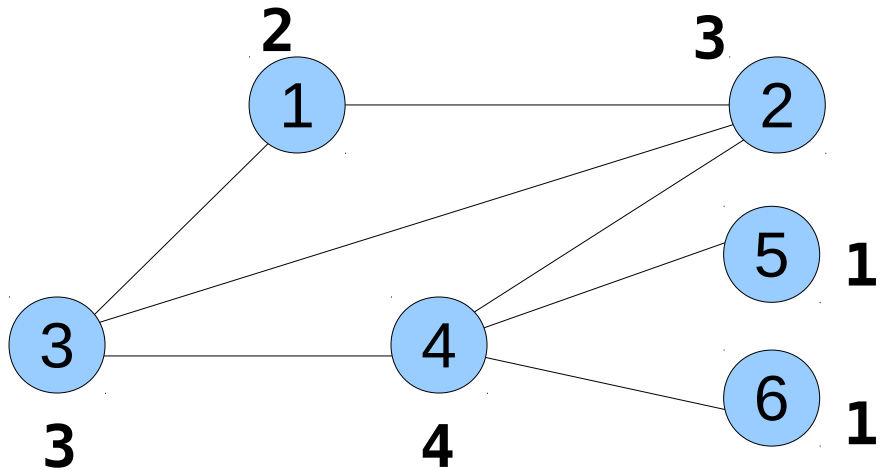
fração de vértices com grau k

- CCDF empírica (*Complementary Cumulative Distribution Function*)

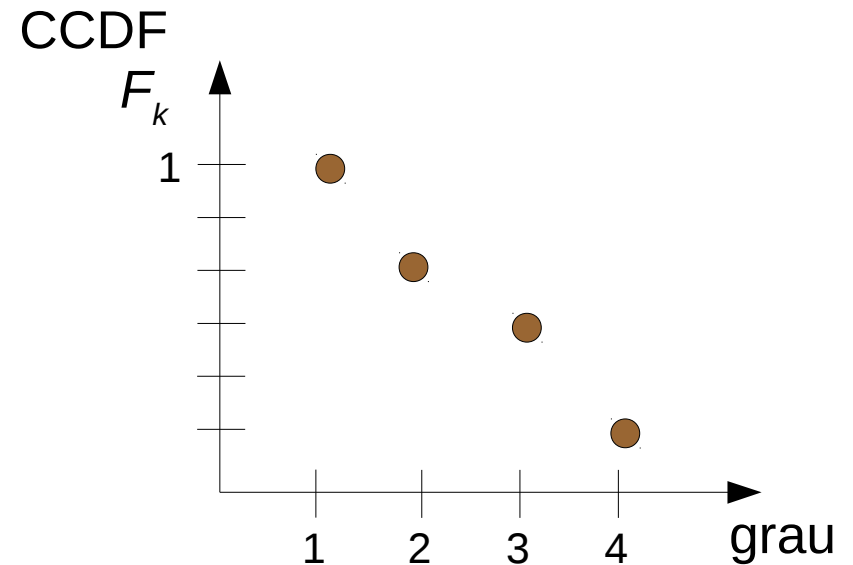
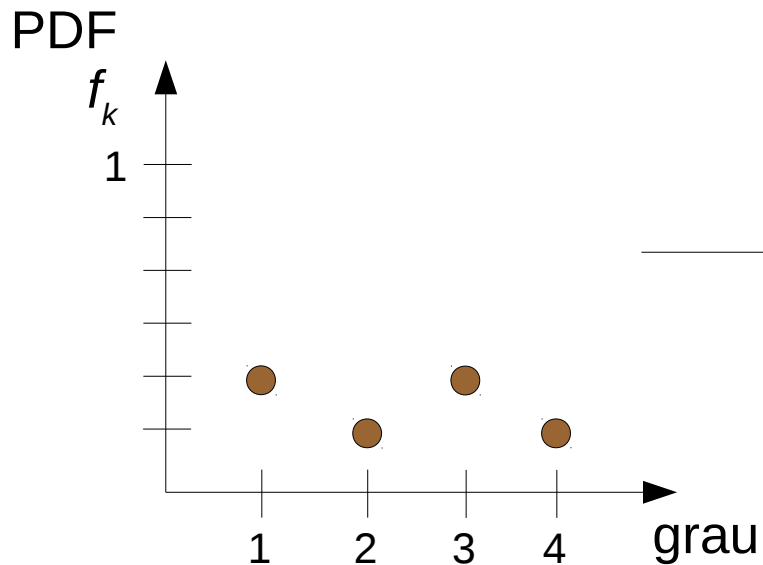
- fração de vértices com grau $\geq k$

$$F_k = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} f_i$$

Exemplo de Distribuição

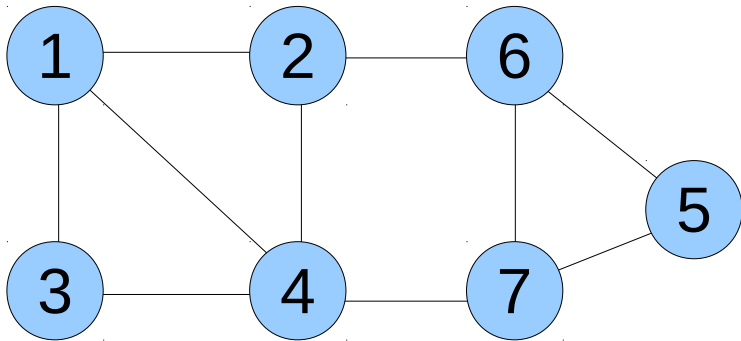


□ Distribuição empírica de grau?



Distância

- Comprimento do **menor** caminho entre dois vértices
- Função $d(u,v)$, onde u e v são vértices
 - não definido quando não há caminho



- Exemplo

- $d(6, 3) = ?$
- $d(7, 1) = ?$

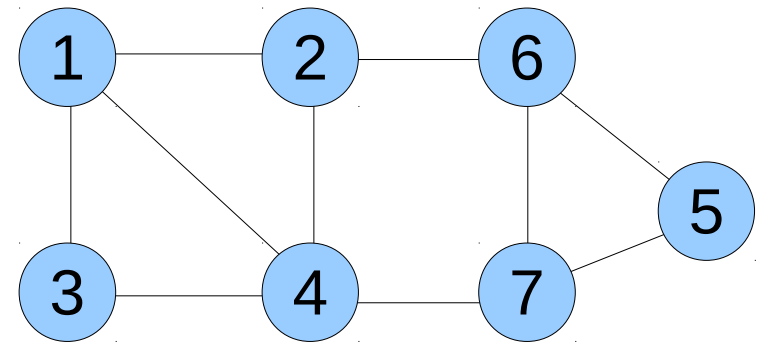
- **Importante:** muitos caminhos podem realizar a distância entre dois vértices

Distância Média e Diâmetro

- Distância média do grafo

- média entre todos os pares de vértices

$$\bar{d} = \frac{\sum_{u, v \in V} d(u, v)}{\binom{n}{2}}$$



- **Excentricidade:** maior distância de um vértice a todos os outros

$$e(u) = \max_{v \in V} d(u, v)$$

- **Diâmetro:** maior distância entre dois vértices da rede

$$r = \max_{u, v \in V} d(u, v)$$

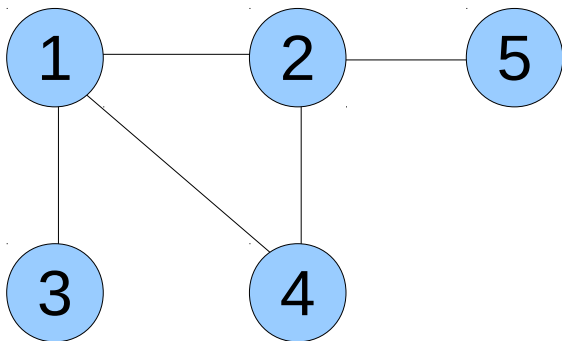
Distribuição da Distância

- Distribuição empírica da distância entre os vértices do grafo
 - frequência relativa das distâncias

$$f_D(d) = \frac{n(d)}{\binom{n}{2}}$$

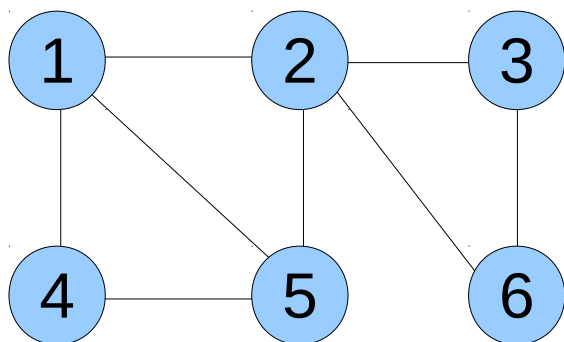
← Número de pares não ordenados de vértices que tem distância d

■ Exemplo



Clusterização

- Medida da propensão de triângulos se formarem na rede
 - triângulo: ciclo de comprimento três
 - quase-triângulo: caminho de comprimento dois



- Duas métricas na literatura
 - métrica local: cada vértice tem o seu
 - métrica global: único valor para a rede

Clusterização – I

- Fração de aresta entre vizinhos
 - prob. de dois vizinhos também serem vizinhos
- Definida para cada vértice da rede

$$C_i = \frac{E_i}{\binom{d_i}{2}}$$

E_i : # de arestas entre os vizinhos de i

d_i : grau do vértice i

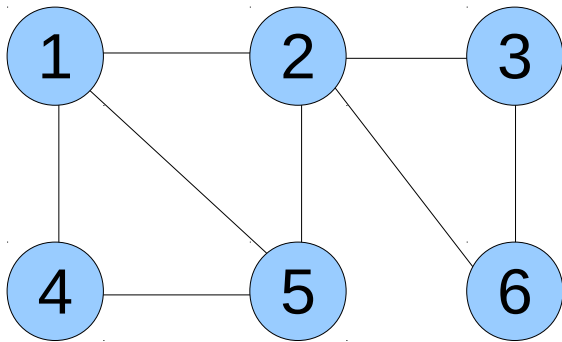
$$C_i = \frac{2 E_i}{d_i(d_i - 1)}$$

- Clusterização do grafo
 - média da clusterização dos vértices

$$C = 1/n \sum_{v \in V} C_i$$

Calculando Clusterização

■ Exemplo



■ Quanto vale C?

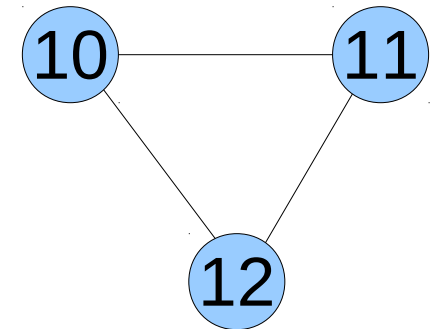
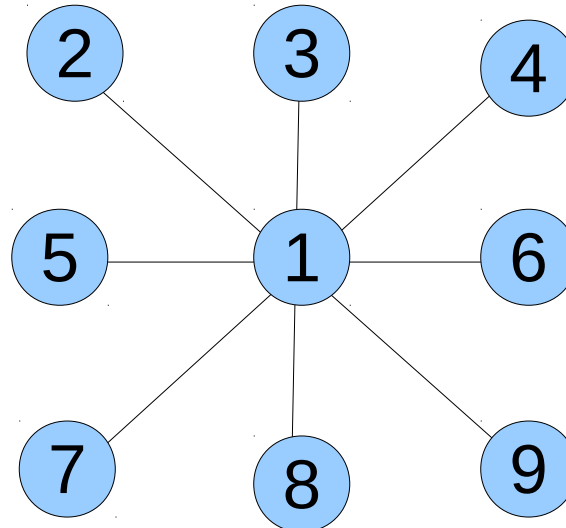
$$C_1 = \frac{E_1}{\binom{d_1}{2}} = \frac{2}{\binom{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$C_2 = \frac{E_2}{\binom{d_2}{2}} = \frac{2}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{3}$$

Clusterização – I

- Métrica não é a fração de arestas entre vizinhos do grafo (como um todo)
 - média dos vértices
- Favorece vértices com menos vizinhos
 - denominador é $\sim d_i^2$
- Valor da clusterização para grau 0 e 1?
- Exemplo

$$C_2 = ?$$



Clusterização – II

- Fração entre o número de triângulos e o número de pseudo-triângulos no grafo como um todo

- pseudo-triângulo: tripla conectada

$$C' = \frac{3 \times \text{número de triângulos}}{\text{número de triplas conectadas}}$$

Cada triângulo dá origem a três triplas conectadas

- Tripla é não-ordenada (“1,2,3” igual a “3,2,1”)
- Métrica global
 - não é média dos vértices
- Não tem problemas com vértices de grau 0 e 1
 - mais bem comportada a anomalias
- Valor pode ser bem diferente da outra definição

Quatro Importantes Características

- ❑ Observada em diversas redes reais
 - a partir do final da década de 90



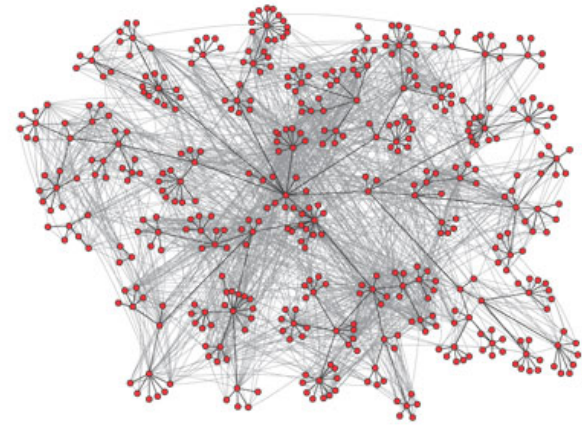
■ Mundo pequeno



■ Meus amigos são amigos



■ Normalidade ausente



■ Tudo Conectado

Mundo Pequeno

- “*It's a small world, after all*”
- Distância média **muito** pequena, diâmetro também
- Mesmo para redes muito grandes
 - Web (parte) – 10^8 vértices
 - Rede de colaboração – 10^6 nodes
 - Facebook - 10^9 nodes
 - “seis graus de separação”
 - e muitas outras!

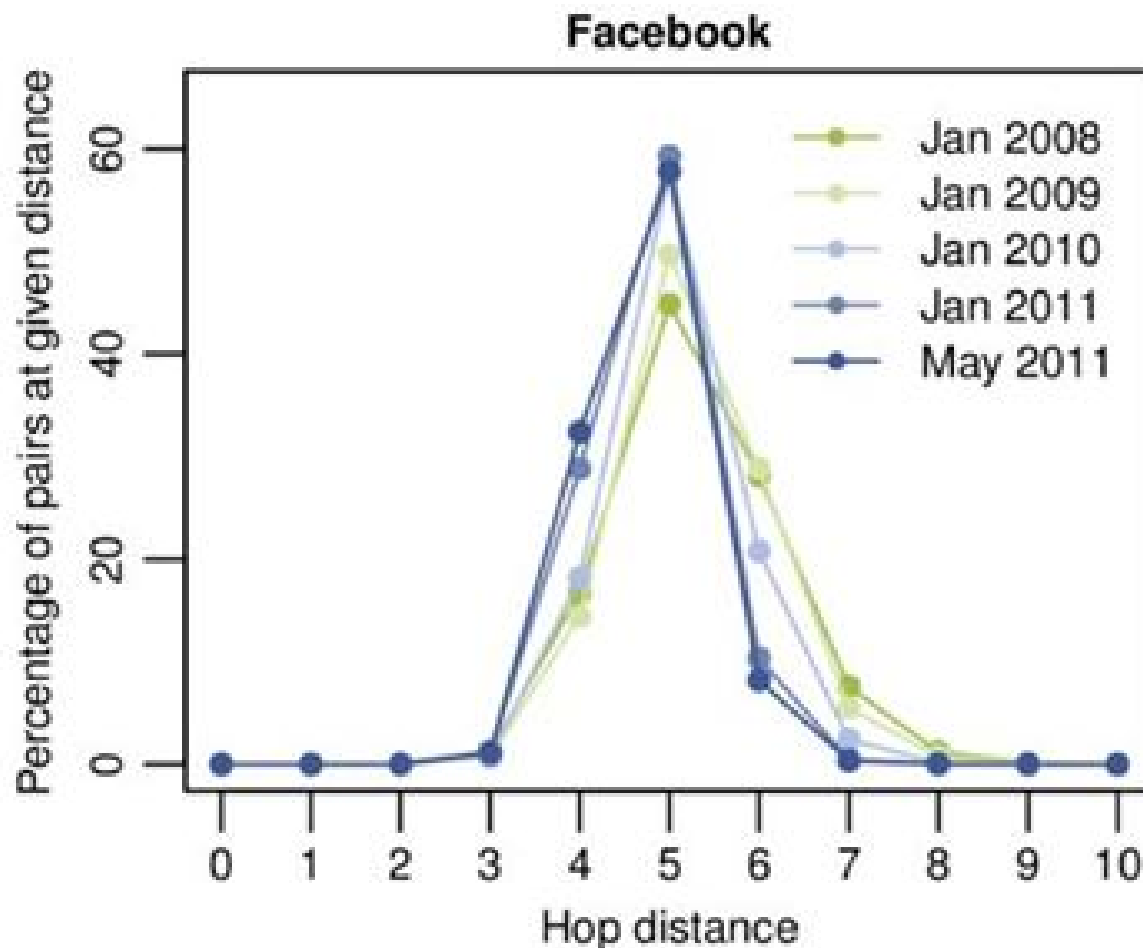


←	7.5
←	4.9
←	4.5

**Ordens de grandeza menor!
Aparentemente da ordem de $\log n$**

Exemplo do Facebook

- Distribuição da distância ao longo do tempo (truncada em 10)



vértices (arestas)

	fb
2007	13.0 M (644.6 M)
2008	56.0 M (2.1 G)
2009	139.1 M (6.2 G)
2010	332.3 M (18.8 G)
2011	562.4 M (47.5 G)
current	721.1 M (68.7 G)

- Rede cresce (50 x), mas distância média diminui!
- current = 12/2011

Exemplo do Facebook

■ Mudanças na rede

distância média (std)

	fb
2007	4.46 (± 0.04)
2008	5.28 (± 0.03)
2009	5.26 (± 0.03)
2010	5.06 (± 0.01)
2011	4.81 (± 0.04)
current	4.74 (± 0.02)

grau médio

	fb
2007	99.50
2008	76.15
2009	88.68
2010	113.00
2011	169.03
current	190.44

densidade

	fb
2007	7.679E-06
2008	1.359E-06
2009	6.377E-07
2010	3.400E-07
2011	3.006E-07
current	2.641E-07

- Grau médio cresce
- Rede muito, muito esparsa
- Grau médio aumenta e densidade diminui?

Meus amigos também são amigos



- A relacionado com B e C faz com que B e C se relacionem mais provavelmente
- Rede possui transitividade – caminhos de comprimento dois viram triângulos
 - métrica: coeficiente de clusterização
 - densidade: chance de dois vértices ao acaso estarem relacionados

	clusterização	densidade
■ AS graph – 10^4 nodes	← 0.39	—— 0.00056
■ Facebook – 10^9 nodes	← 0.14	—— 0.00000026
■ Biology coauthorship	← 0.67	—— 0.00001

Ordens de magnitude maior!

Normalidade Ausente



- Grau dos vértices é muito desigual
- Muitos com grau pequeno, poucos com grau muito grande

Parecido com distribuição da renda no Brasil!

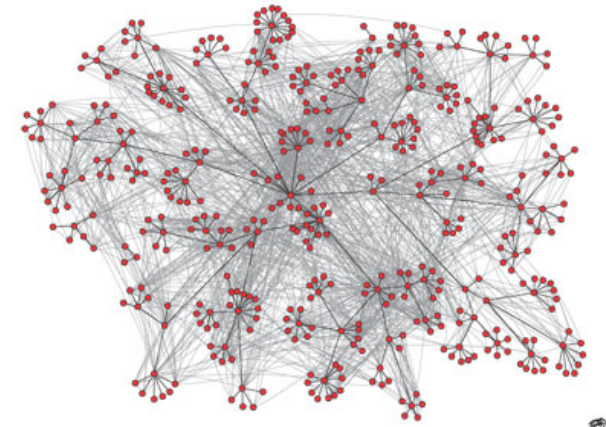
- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| ■ AS Graph – 10^4 nodes | ■ Citações – 10^6 nodes |
| ■ Grau médio: 5.9 | ■ Grau médio: 8.6 |
| ■ Grau máx: ~ 2100 | ■ Grau máx: ~ 9000 |

**Distribuição de grau possui cauda pesada
Abrange diversas orders de grandeza**

- Muito diferente de distribuição normal

Tudo Conectado

- Maior componente conexa possui **quase todos** os vértices
 - CC gigante
- Outras componentes muito pequenas
 - Muitas outras componentes
- Rede de sinônimos – 23K vértices
 - Maior componente: ~**22K**
- Também em redes sociais, web, etc



Quase sempre quase completamente conectada!

Curiosidade

- **Fato I:** Muitas redes possuem propriedades estruturais peculiares (não esperadas)
 - grau, distâncias, clusterização, conectividade, etc
- **Fato II:** Muitas redes diferentes possuem propriedades estruturais semelhantes
 - Web, Facebook, AS Graph, Neural network, etc



- “Million dollar question”

Por que?



- Algumas respostas na literatura, nada muito definitivo
- E você pode ajudar a explicar!