

Redes Complexas

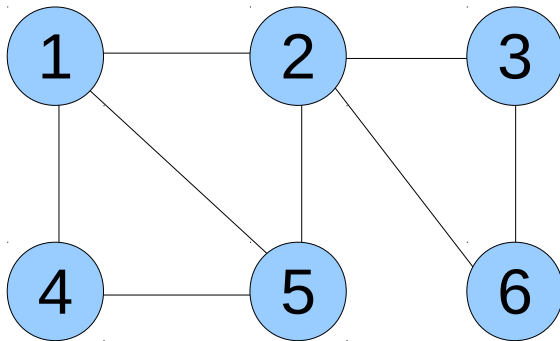
Aula 13

Roteiro

- Falhas em redes
- Medindo robustez
- Tipos de falha
- Influência da estrutura
- Ponto crítico

Redes e Falhas

- Rede: muitas vezes é uma abstração de um sistema real
 - ex. Internet, rede social, web
- “Componentes” da rede podem falhar
 - vértices ou arestas



Quando falhas ocorrem temos mudanças na estrutura da rede

Robustez da Rede

- Capacidade da rede de *operar* na presença de falhas (*fault tolerant*)
 - vértices ou/e arestas
- Medidas de robustez da rede
 - muitas métricas, depende do contexto
- Robustez em função da estrutura da rede
 - impacto da rede na robustez
- Aplicação depende do contexto
 - ex. robustez da Internet a falhas nos AS

Métricas de Robustez

- Métricas locais

- impacto em um ou poucos vértices
- ex. número de arestas para desconectar um vértice qualquer

- Métricas globais

- impacto na rede como um todo
- ex. tamanho da componente gigante

Maior interesse em métricas globais

Métricas Globais

- Tamanho da componente gigante
 - absoluto ou relativo
- Tamanho médio das componentes
 - excetuando a componente gigante
- Distância média entre todos os pares
- Diâmetro da rede
- Corte mínimo da rede

Muitas outras são possíveis!

Tipo de Falhas

- Modelo para falha de vértices ou arestas
- Aleatoriamente
 - uniforme: todos tem mesma prob de falhar
 - não-uniforme: seguindo algum fenômeno
- Deterministicamente
 - Definir ordenação: quem falha primeiro, segundo, etc.
 - ex. ordenação decrescente por grau
- Falhas por defeito: modelo aleatório
 - ex. roteador da rede queimou
- Falhas propositais: modelo determinístico
 - ex. roteador da rede foi atacado

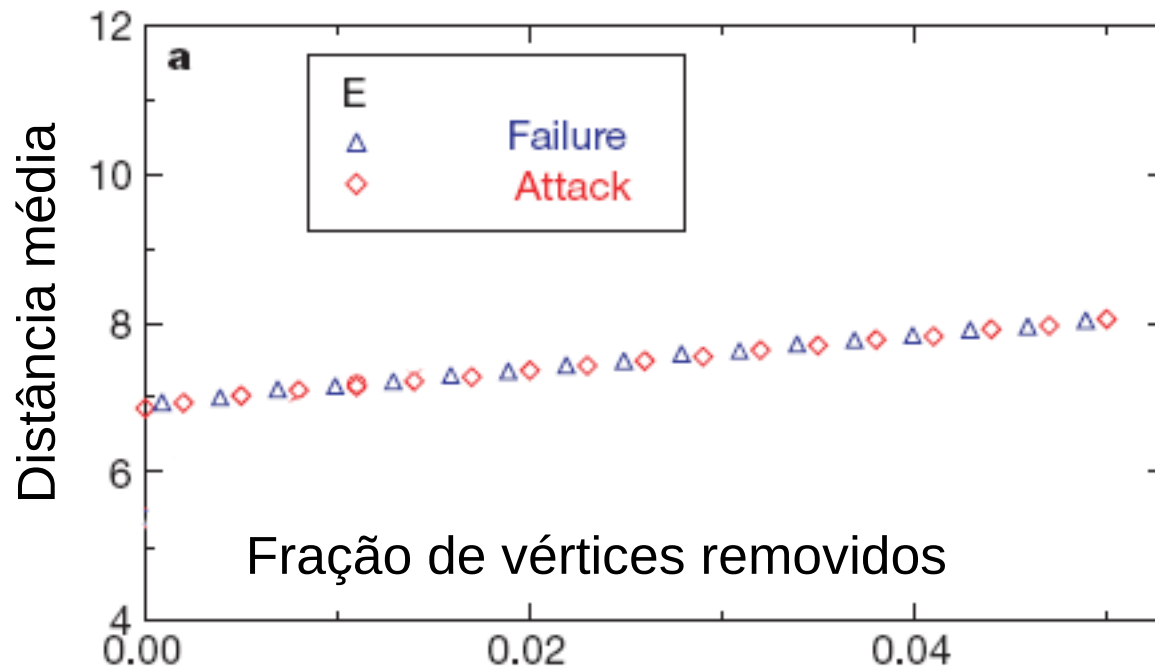
Robustez e Falhas

- Robustez da rede na presença de falhas
 - Aleatórias (uniforme), determinística (grau)
 - ex. distância média entre pares
- Diferença com relação ao tipo de falha?
 - para uma mesma fração que falha
- Influência da estrutura da rede?
 - para mesmo n e grau médio

Modelo $G(n,p)$? Modelo BA?

Falhas no $G(n,p)$

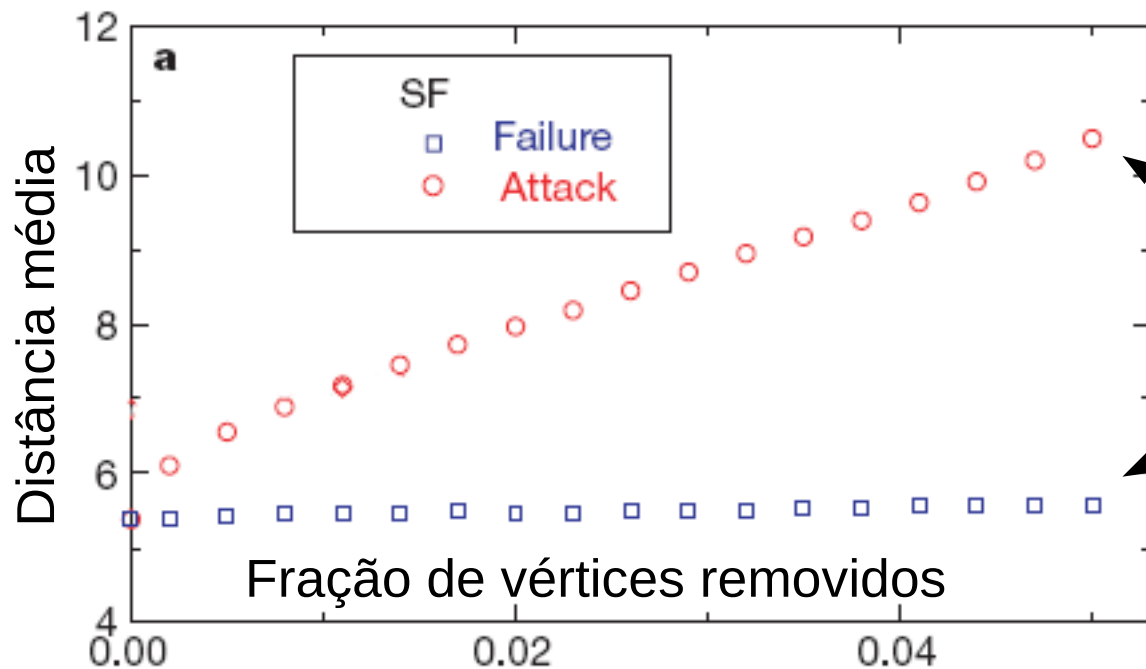
- Falhas aumentam (mas não muito) a distância média entre vértices
- Falhas aleatórias se parecem com falhas determinísticas
 - grau máximo é próximo ao grau médio



■ $n = 10000$, $\langle D \rangle = 4$

Falhas no BA

- Falhas aleatórias **não** se parecem com falhas determinísticas
- Falhas aleatórias: pouco impacto
falhas determinísticas: muito impacto



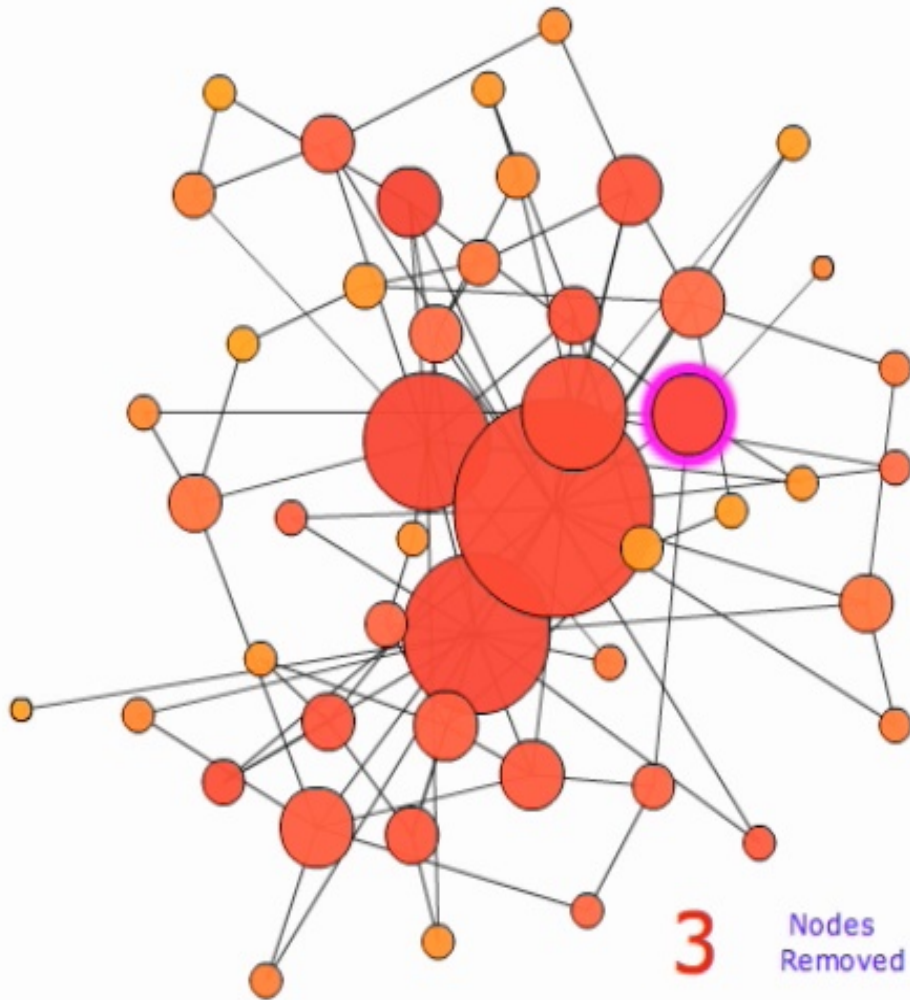
■ $n = 10000$, $\langle D \rangle = 4$

5% dos vértices removidos;
distância média dobrou!

5% dos vértices removidos;
distância média não variou

Falhas Aleatórias

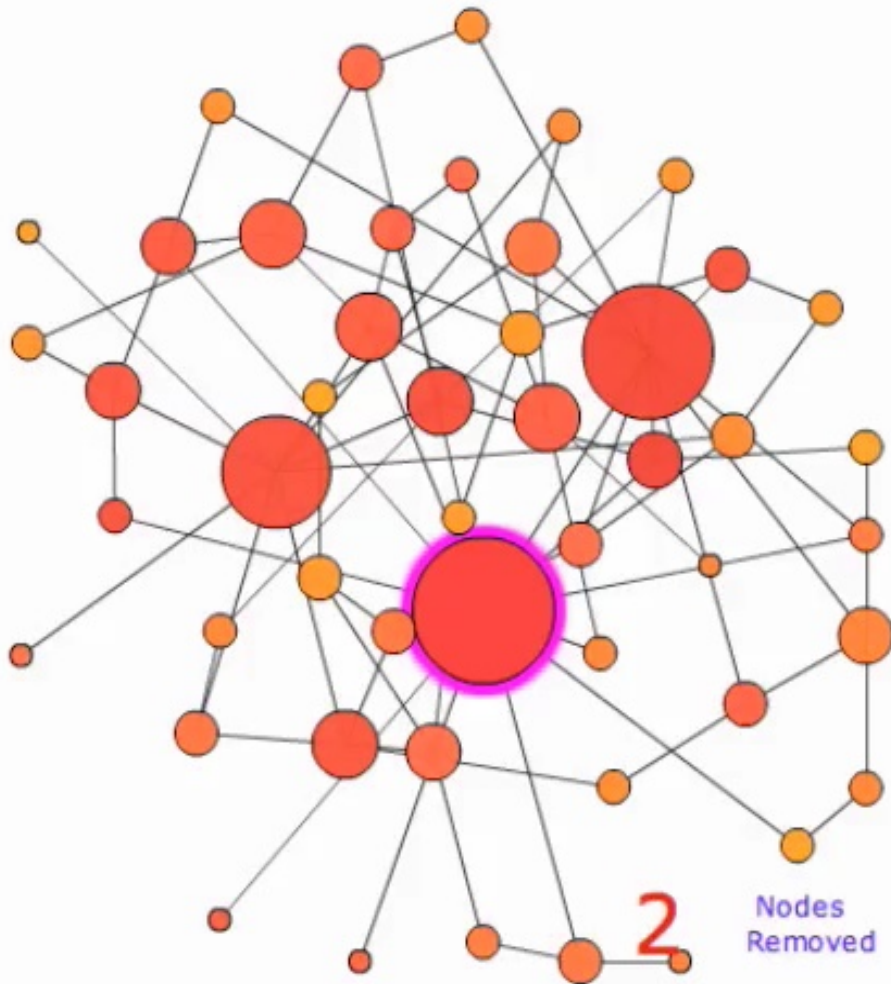
Rede do Modelo BA



- Remoção aleatória (uniforme)
- Pouco impacto na estrutura da rede

Falhas Determinísticas

Rede do Modelo BA



- Impacto devastador
- Tipo de falha e rede tem papel fundamental

Modelo BA

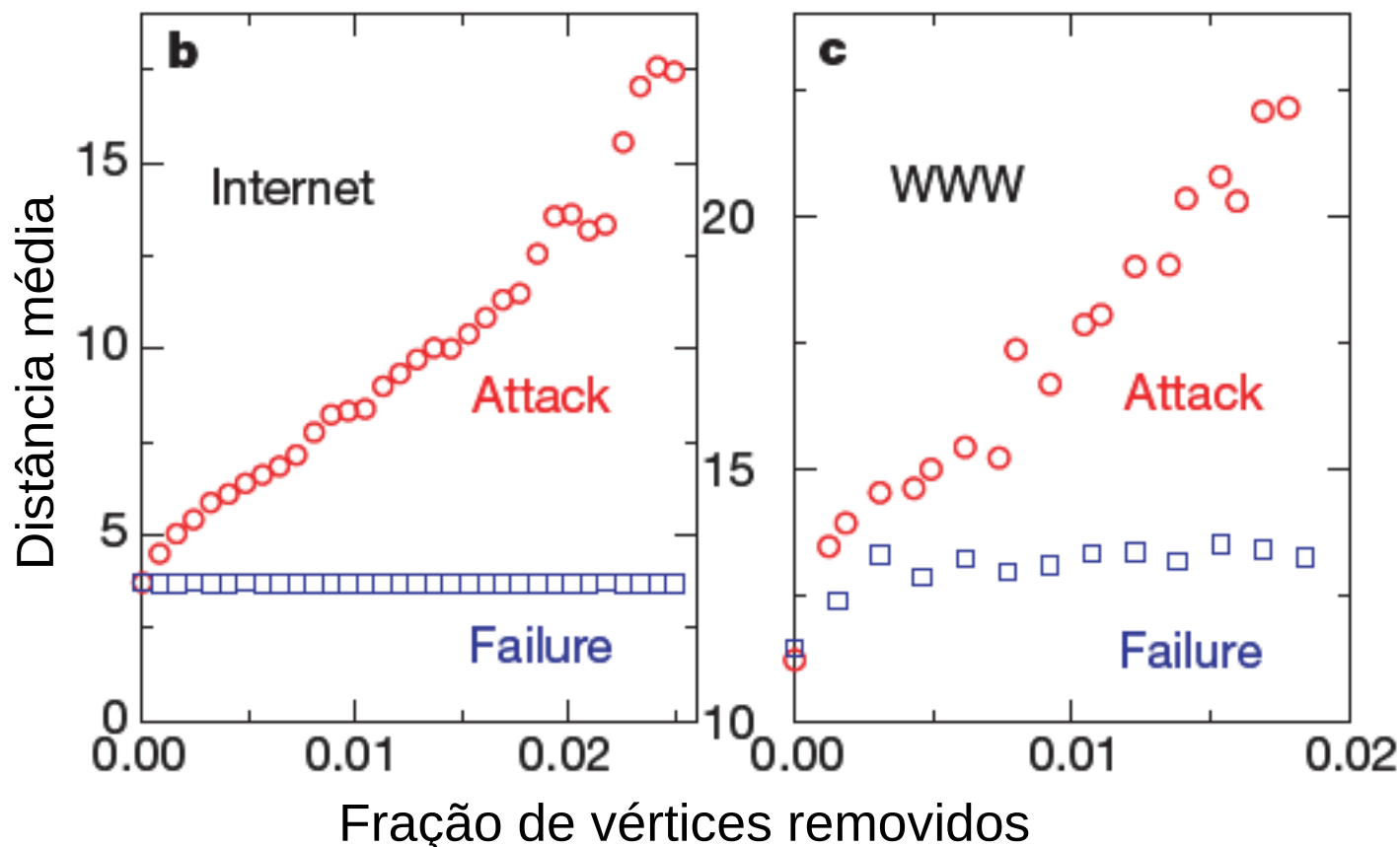
- Distribuição do grau segue lei de potência
 - Maioria dos vértices tem grau pequeno
 - Pouca importância na rede
 - ↓
 - Tolerante a falhas aleatórias
- Poucos vértices com grau grande
 - Interconectam a rede
 - ↓
 - Vulnerável a ataques direcionados

Propriedades de redes livre de escala!

Robustez em Redes Reais

- WebGraph, AS Graph

- Redes seguem lei de potência no graus



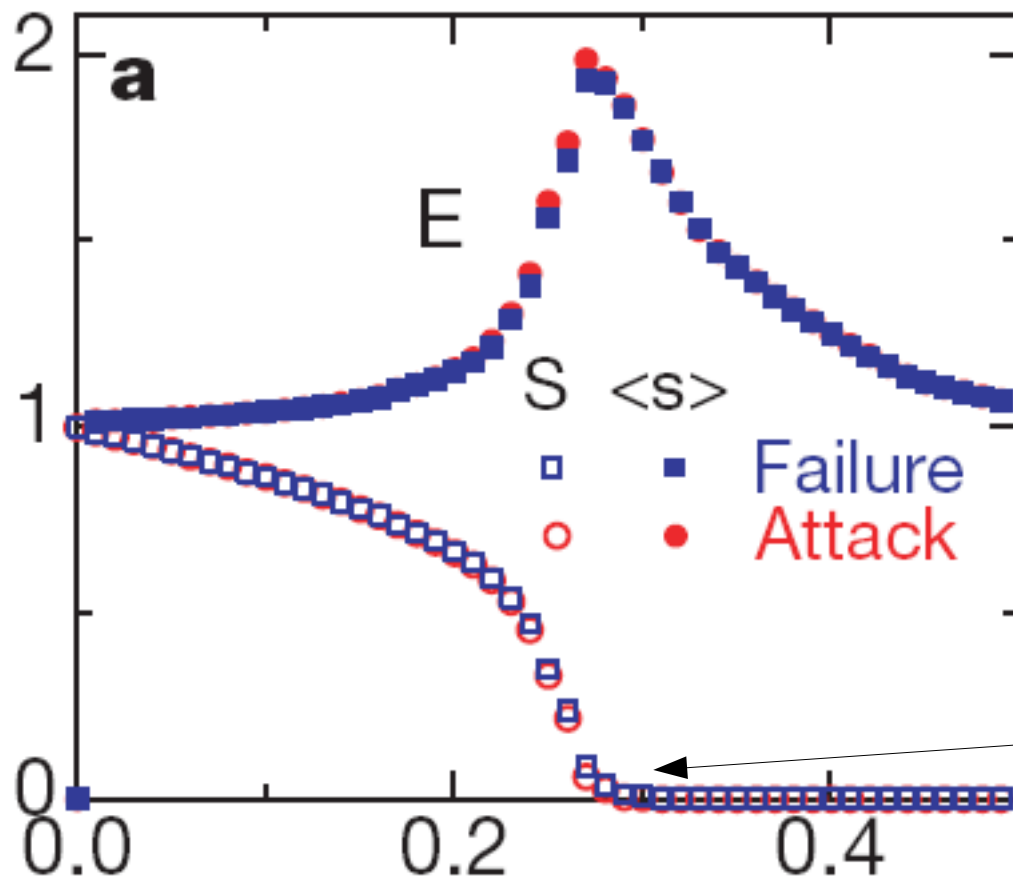
- Comportamento parecido com modelo BA

- Tolerante a falhas, vulnerável a ataques

- AS não é roteador!

Outras Métricas: $G(n,p)$

- Tamanho relativo da componente gigante (GCC)
- Tamanho médio das outras componentes

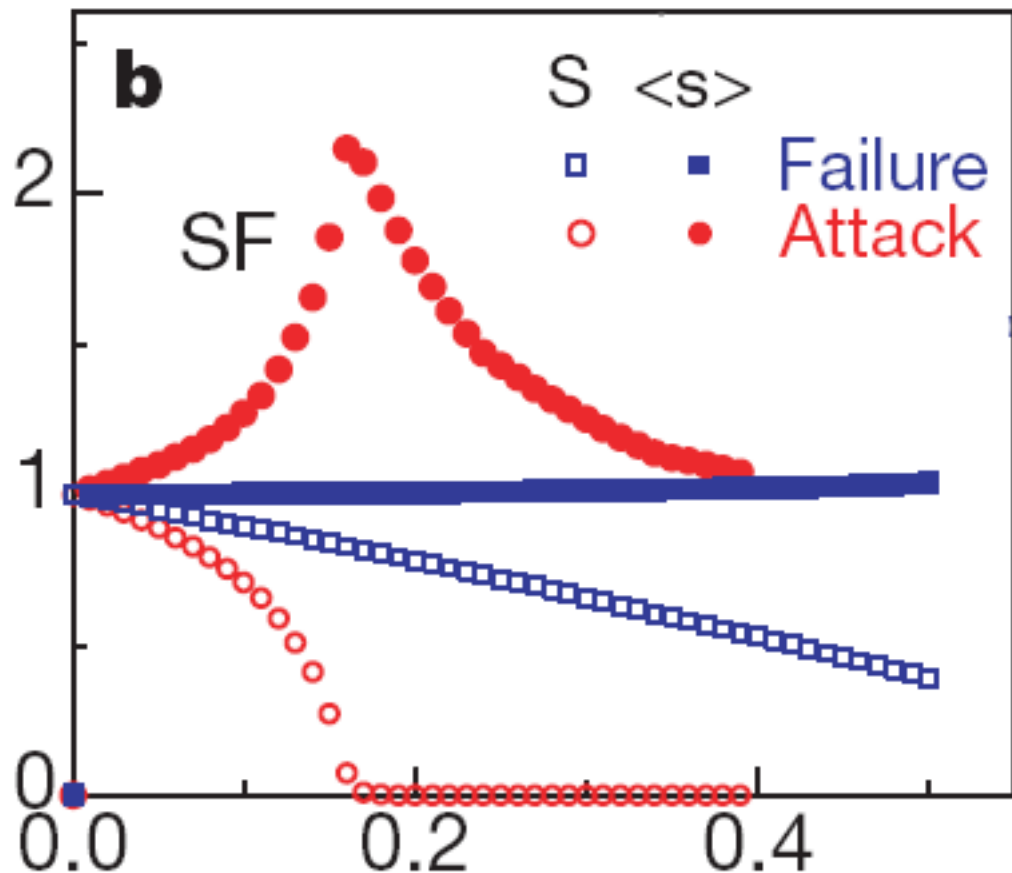


- Falhas eventualmente destroem componente gigante (S)
- Tamanho médio das outras componentes vai a um
- Rede despedaçada!

Transição de fase?

Modelo BA

- Falha aleatória muito diferente de falha determinística



- Decrescimento linear do tamanho relativo da GCC (S)
- Tamanho médio das outras CC é 1
- Rede despedaça para falhas direcionadas
- Bem antes que rede do $G(n,p)$

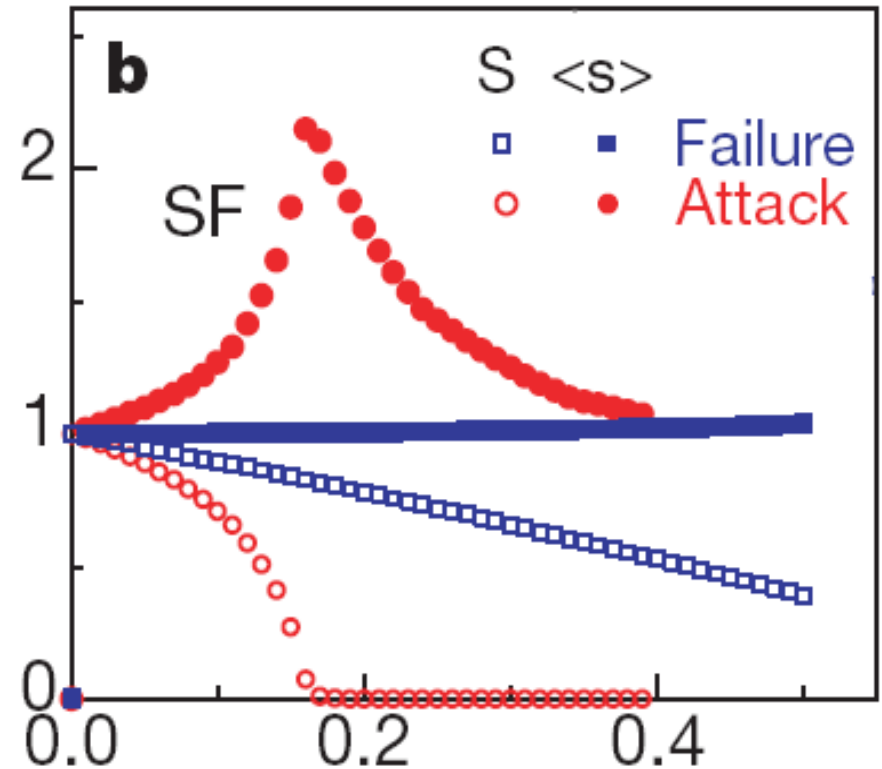
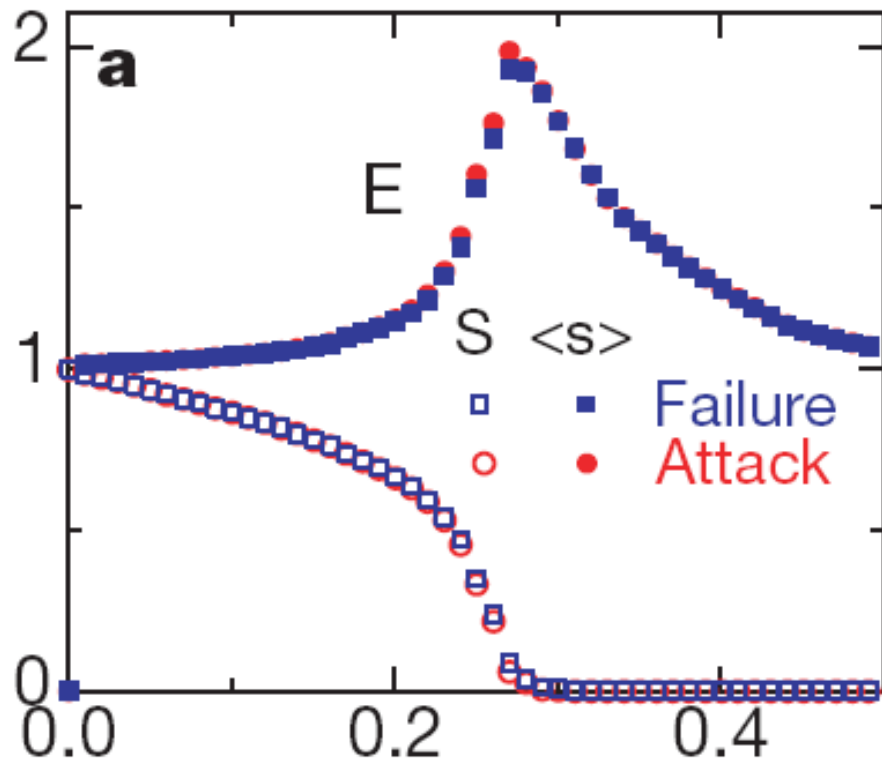
Transição de Fase

- Tamanho relativo da componente gigante
 - vai a zero rapidamente, para p grande suficiente

Valor de p que desintegra GCC?

- Depende do modelo de falhas
 - aleatório ou determinístico
- Depende da estrutura
 - $G(n,p)$, BA, etc

Tamanho da Maior CC



■ $G(n,p)$, indiferente quanto ao tipo de falha

■ BA, “robusta enquanto frágil”

Estudo Analítico

- GCC : componente conexa gigante
 - maior componente conexa tem εn vértices, para algum $\varepsilon > 0$, a.a.s.
- Condição (aprox) para termos uma GCC em um grafo aleatório qualquer

$$\kappa = \frac{E[d^2]}{E[d]} > 2$$

- Depende apenas do primeiro momento $E[d]$ e do segundo momento $E[d^2]$ da distribuição do grau
- Condição para GCC no modelo $G(n,p)$?
 - $E[d] > 1$, grau médio maior que 1

Estudo Analítico

- Distribuição do grau após falhas determina existência da GCC
- Calcular os dois momentos da distribuição de grau (após a falha)
- Verificar a relação

$$\kappa = \frac{E[d^2]}{E[d]} > 2$$

Distribuição do Grau

- Considere distribuição de grau original
 - $P[D = k]$, é dada
- Após falha dos vértices, qual nova distribuição do grau?
 - $P[D' = k]$
- Depende do modelo de falhas!
- Assumir modelo aleatório (uniforme)
- Obs: remover uma fração p dos vértices equivale a cada vértice ser removido com probabilidade p

Distribuição do Grau

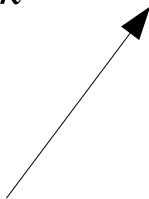
- Dado grau original k , probabilidade do grau ser k' após falha?
 - $k - k'$ vizinhos precisam falhar

$$P[D' = k' | D = k] = \binom{k}{k'} (1 - p)^{k'} p^{k - k'}$$

- Descondicionando

$$P[D' = k'] = \sum_{k=k'}^{n-1} P[D = k] \binom{k}{k'} (1 - p)^{k'} p^{k - k'}$$

Distribuição original
(antes das falhas)



Momentos e Ponto Crítico

- Podemos calcular os momentos de D' (distribuição do grau após falhas)
 - em função dos momentos da distribuição de grau

$$E[D'] = E[D](1 - p)$$

$$E[D'^2] = E[D^2](1 - p)^2 + E[D]p(1 - p)$$

- Usando a condição, podemos determinar o ponto crítico, p_c

$$p_c = 1 - \frac{E[D]}{E[D^2] - E[D]}$$

← Momentos da distribuição de grau original (pré-falhas)

- Valores menores de p mantêm uma GCC

Graus com Lei Potência

- Ponto crítico em redes cujo grau segue lei de potência

$$p_c = 1 - \frac{E[D]}{E[D^2] - E[D]}$$

- Lei de potência: $P[D=k] = C k^{-\alpha}$
- Para $\alpha < 3$, segundo momento diverge
 - logo, $p_c = 1$
- Não existe transição de fase neste caso
- GCC nunca se desintegra (quando n tende infinito)
- Rede é altamente tolerante a falhas!

Graus com Lei Potência

- Para $\alpha > 3$, o que acontece?
- Temos os dois momentos definidos
 - dependem de α (exponente)
- Relação aproximada entre p_c e α
 - quanto maior α , menor é o valor de p_c
 - cauda menos pesada desintegra mais facilmente

R Cohen, K Erez, D ben-Avraham, and S Havlin, "Resilience of the Internet to Random Breakdowns".
Phys. Rev. Lett., 85, 4626 (2000)

Callaway, D. S., Newman, M. E., Strogatz, S. H., & Watts, D. J. "Network robustness and fragility: Percolation on random graphs".
Phys. Rev. Lett., 85(25), 5468 (2000).

Generalizando Análise

- Análise anterior para falhas aleatórias e uniforme
- Generalização para falhas aleatórias em função do grau
- Generalização para falhas determinísticas
 - em função do grau
- Análise do ponto crítico, do tamanho das componentes gigante, tamanho médio das outras componentes
- Análise via percolação e função geradora

Cohen, R., Erez, K., Ben-Avraham, D., & Havlin, S. "Breakdown of the internet under intentional attack".
Phys. Rev. Lett., 86(16), 3682 (2001).

Callaway, D. S., Newman, M. E., Strogatz, S. H., & Watts, D. J. "Network robustness and fragility: Percolation on random graphs".
Phys. Rev. Lett., 85(25), 5468 (2000).