

Redes Complexas

Aula 10

Roteiro

- Experimento de Milgram
- Mundo pequeno
- Modelo de Watts-Strogatz
- Propriedades estruturais

Mundo Pequeno

- Seria o mundo um vilarejo?
 - pessoas conectadas por enlaces de amizade
 - redes sociais (reais) como objeto de estudo
 - indagações do início do século XX
- **Experimento de Milgram:** comprovar empiricamente que o mundo é pequeno
 - caminho na rede de amizades entre duas pessoas não relacionadas é curto
- Realizadas por Milgram na década de 60
 - professor de Harvard, psicólogo social influente
 - cunhou o termo “small world”

Experimentos de Milgram

- Enviar uma carta para uma pessoa em Boston
 - nome e formação fornecidos
- Carta deve ser enviada a alguém que você conhece pessoalmente
 - e repassada até chegar ao destino
 - cartão postal enviado a Milgram a cada passo (rota das cartas)
- Origem: pessoas das cidades de Omaha e Kansas (interior dos EUA)
 - centenas de sujeitos, escolhidos aleatoriamente
 - grande distância física e social



Resultados

- Maioria das cartas nunca chegaram ao destino
 - pessoas não passavam carta adiante
- Das que chegaram ao destino
 - comprimento médio dos caminhos foi 5.5 saltos
- Surpreendente
 - população 10^8 , dois indivíduos não relacionados estão muito próximos na rede social

Seis graus de separação!

- Experimento ajudou a popularizar esta noção
 - termo não foi cunhado por Milgram

Small World Hoje

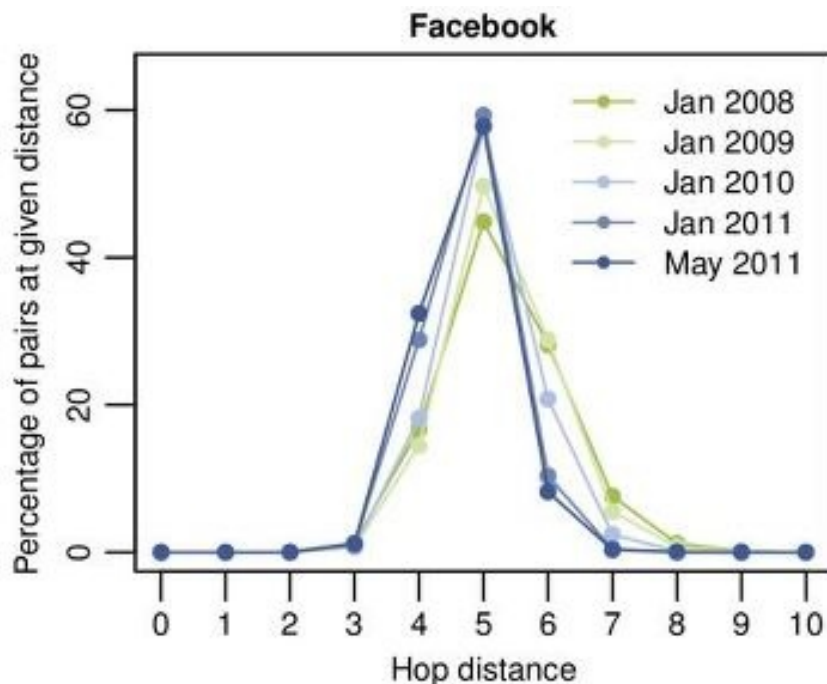
- Small World Project (2003), Columbia Univ.
 - versão moderna do experimento: *email ao invés de carta*
 - escala global: milhares de pessoas (muitos voluntários), vários países, 18 alvos diferentes
- Resultados relativamente similares
 - maioria das correntes não chegaram ao destino
 - comprimento médio dos caminhos entre 5 e 7

Peter S. Dodds, Roby Muhamad, Duncan J. Watts,
"An Experimental Study of Search in Global Social Networks", Science (2003)

Small World Hoje

Facebook anatomy

- menor caminho possível entre duas pessoas na rede de amizades do Facebook
- diferente do caminho que pessoas encontram



- $n=721$ Mi, $m=68.7$ Bi
- $p=0.00000026$ (muito esparsa)

- Distância média é menor (4.7)
- Distâncias **diminuem** com o crescimento da rede!
- Tecnologia reduzindo caminhos na rede social?

Modelo Small World

- Inspirado nos resultados de Milgram
- Proposto por Watts and Strogatz (Cornell, Matemática Aplicada)
 - “*Collective dynamics of 'small-world' networks*”
Nature, 1998 – 46K+ citações (Google Scholar)
 - 30 anos depois de Milgram
- Modelo visa construir redes esparsas com distâncias curtas e alta clusterização
 - aspectos observados empiricamente em redes reais

Clusterização e Distâncias

- Considere um grafo esparso
 - densidade de arestas é muito baixa
- Considere alta clusterização e caminhos curtos

Propriedades Antagônicas?

- **Alta clusterização:** muitos triângulos, arestas “desperdiçadas”, caminhos não avançam pela rede
- **Caminhos curtos:** arestas usadas eficientemente, avanço rápido pela rede

Modelo Small World

- Começar com um látice regular
 - N vértices organizados em um círculo
 - arestas para vizinhos a distância k ou menor

- Para cada aresta, reposicionar suas extremidades com probabilidade p
 - nova extremidade escolhida de maneira uniforme entre os pares de vértices

Modelos Small World

- Modelo possui 3 parâmetros
 - n , k , p
- k controla grau e clusterização
- p controla aleatoriedade do grafo
 - $p = 0$, grafo látice regular
 - $p = 1$, grafo aleatório (todas arestas são reposicionadas aleatoriamente)
- Propriedades topológicas do grafo
 - distância média
 - clusterização
 - distribuição dos graus, etc

Propriedades Estruturais

- Considere n grande, k constante
- $C(p)$: clusterização em função de p
 - $C(0)$, alta clusterização
 - $C(1)$, baixa clusterização
- $I(p)$: distância média em função de p
 - $I(0)$, distância média alta
 - $I(1)$, distância média baixa

O que ocorre quando p é intermediário?

Calculando $C(0)$

Clusterização

fração de aresta entre vizinhos:

Média dos vértices

$$C_i = \frac{E_i}{\binom{d_i}{2}}$$

de vizinhos de i

Grau do vértice i

$C(0) = ?$

Não depende de n , pois é igual para todo vértice

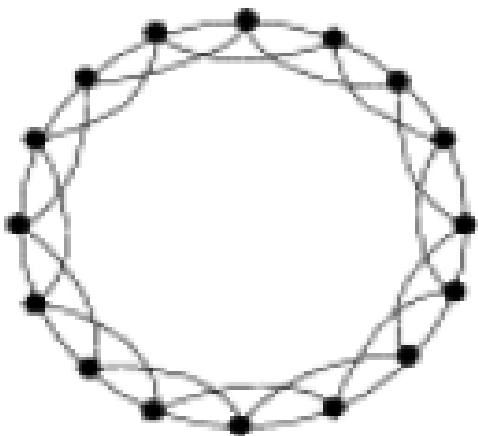
mas depende de k

Ex. $k = 2$

Para K genérico?

$$C(0) = \frac{3(k-1)}{2(2k-1)} \sim \frac{3}{4}$$

constante!



$$C(0) = 1/2$$

Calculando $l(0)$

■ Distância média entre vértices

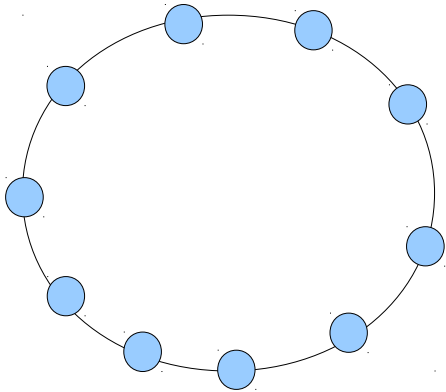
■ Entre todos os pares de vértices

■ $l(0) = ?$

■ Depende de n e de k

■ Ex. n ímpar, $k = 1$

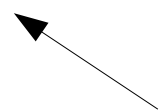
$$l = \frac{\sum_{u, v \in V} d(u, v)}{\binom{n}{2}}$$



$$l(0) = \frac{1+2+3+\dots+n/2}{n/2} = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$$

■ Para K genérico?

$$l(0) \sim \frac{n}{4k}$$



Crescimento linear com n

Calculando $C(1)$ e $l(1)$

- Com $p=1$, grafo é totalmente aleatório
- Modelo $G(n,m)$, onde m é o número fixo de arestas
 - ponta das arestas escolhidas aleatoriamente entre todos os vértices (sem repetição)
 - primo do $G(n,p)$
 - propriedades estruturais equivalentes
- No $G(n,p)$: clusterização e distância média?

$$C = p \quad l \sim \frac{\log(n)}{\log(d)}$$

Calculando $C(1)$ e $l(1)$

- Modelo SW

- Grau médio é $2k$

- Número de arestas é nk

- Fração de arestas

$$\rho = \frac{nk}{\binom{n}{2}} = \frac{2k}{n-1} \sim \frac{2k}{n}$$

- Logo, com $p=1$

$$C(1) = \frac{2k}{n}$$

decrece
linearmente com n

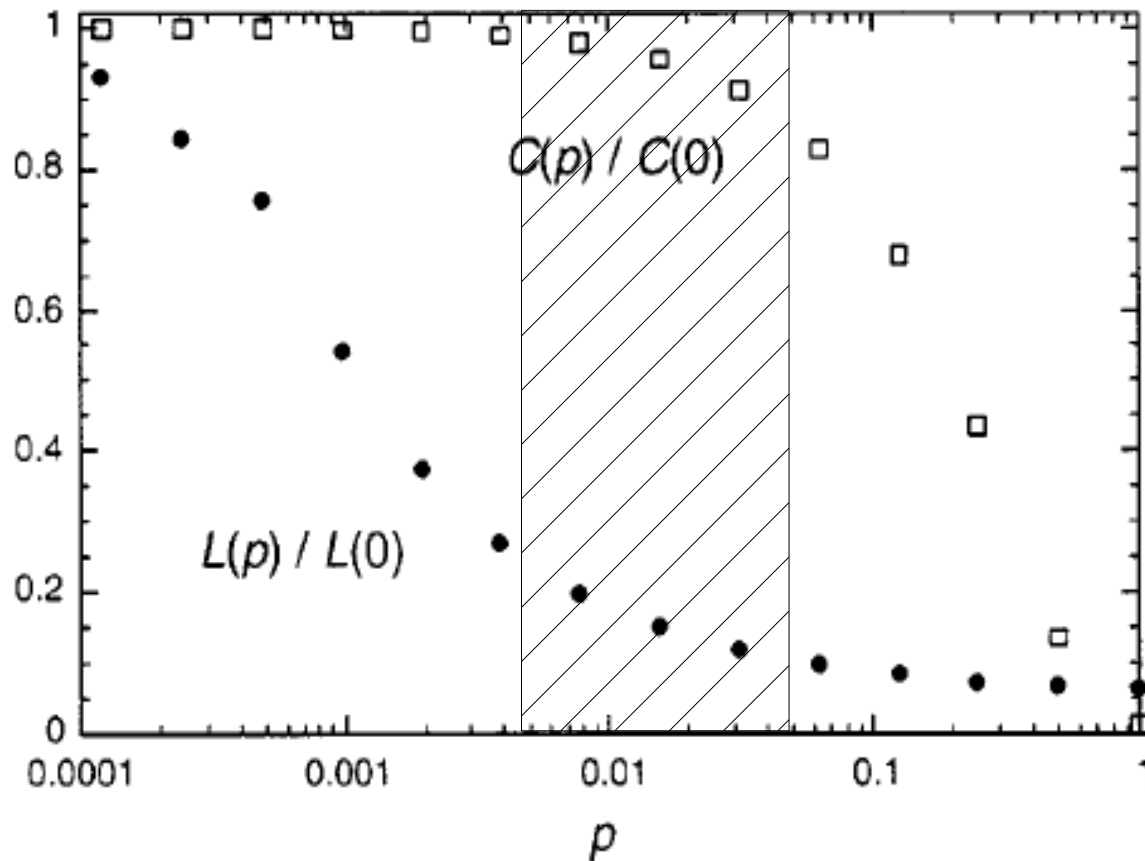
$$l(1) = \frac{\log(n)}{\log(2k)}$$

Crescimento
logaritmico com n

Análise Numérica

■ Relação entre $C(p)/C(0)$ e $L(p)/L(0)$

- $C(0)$ maior clusterização, $L(0)$ maior distância média



- Distância média decresce rapidamente
- Clusterização decresce mais devagar
- Alta clusterização, distâncias curtas ocorrem (para alguns valores de p)
- Small World Networks

Distância nos Extremos

- $p = 0$

$$l(0) \sim \frac{n}{2k} \quad \leftarrow \text{Distância cresce linearmente com } n$$

- $p = 1$

$$l(1) = \frac{\log n}{\log(2k)} \quad \leftarrow \text{Distância cresce logaritmicamente com } n$$

- Mudança fundamental de comportamento em função do valor de p

Onde ocorre transição?

Análise da Distância

- Distância decresce rapidamente em p
- Intuição: poucas arestas aleatórias são suficientes para diminuir distâncias significativamente
 - arestas criam atalhos
- Número médio de atalhos é dado pelo número médio de arestas reposicionadas
 - $a = p k n$
- Transição de fase em função de a

$$l(n, k, p) \sim n/k \quad \text{quando } a \ll 1, a = o(1)$$

$$l(n, k, p) \sim \log(p k n) / (p k^2) \quad \text{quando } a \gg 1, a = \Omega(1)$$

Críticas ao Modelo SW

- Distribuição de grau não possui cauda pesada
 - próximo da binomial, baixa diversidade de graus
- Modelo não permite crescimento da rede
- Modelo não é inspirado em um processo de formação
- Análise teórica rigorosa de suas propriedades é complicado

Todas as limitações acima superadas em modelos subsequentes!