

# Redes Complexas

## Aula 8

### **Roteiro**

- Modelo  $G(n, p)$
- Funções de threshold
- Surgimento de subgrafos
- Componentes conexas
- Distâncias
- Automorfismos

# Modelo $G(n,p)$

- Modelo aleatório para grafos
  - Modelo clássico, Erdos-Reyni
- Dois parâmetros (determinísticos)
  - $n$ : número de vértices
  - $p$ : prob. de existência de cada aresta
- Cada possível aresta do grafo ocorre com probabilidade  $p$  independentemente
  - grafo não-direcionado, sem loops

**Estudo das propriedades topológicas deste modelo**

# G(n,p) com p(n)

- p(n) é uma função de n
  - aula passada, p(n) = cte

## Qual valor para p(n)?

- p(n) deve **decrecer** com n
- Exemplos (c é uma constante)

$$p(n) = \frac{c}{n^{1.5}}$$

$$p(n) = \frac{c}{n}$$

$$p(n) = \frac{c \log n}{n}$$

# Propriedade de *Quase* *Todos os Grafos*

- Seja  $G$  um modelo de grafos aleatórios e  $X$  uma propriedade topológica

- Se

$$P[G \text{ possuir } X] \rightarrow 1 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

- Então dizemos que quase todos os grafos de  $G$  possuem propriedade  $X$ 
  - $X$  ocorre em  $G$  a.a.s. (*asymptotically almost surely*)

# Funções de Threshold

- Seja  $X$  uma propriedade estrutural monotônica
  - propriedade não se perde com a adição de arestas
- Dizemos que  $t(n)$  é uma *função de threshold* para propriedade  $X$  quando

■ Se  $\frac{p(n)}{t(n)} \rightarrow 0$  Então  $G(n,p)$  **não possui** a propriedade  $X$ , a.a.s.

■ Se  $\frac{p(n)}{t(n)} \rightarrow \infty$  Então  $G(n,p)$  **possui** a propriedade  $X$ , a.a.s.

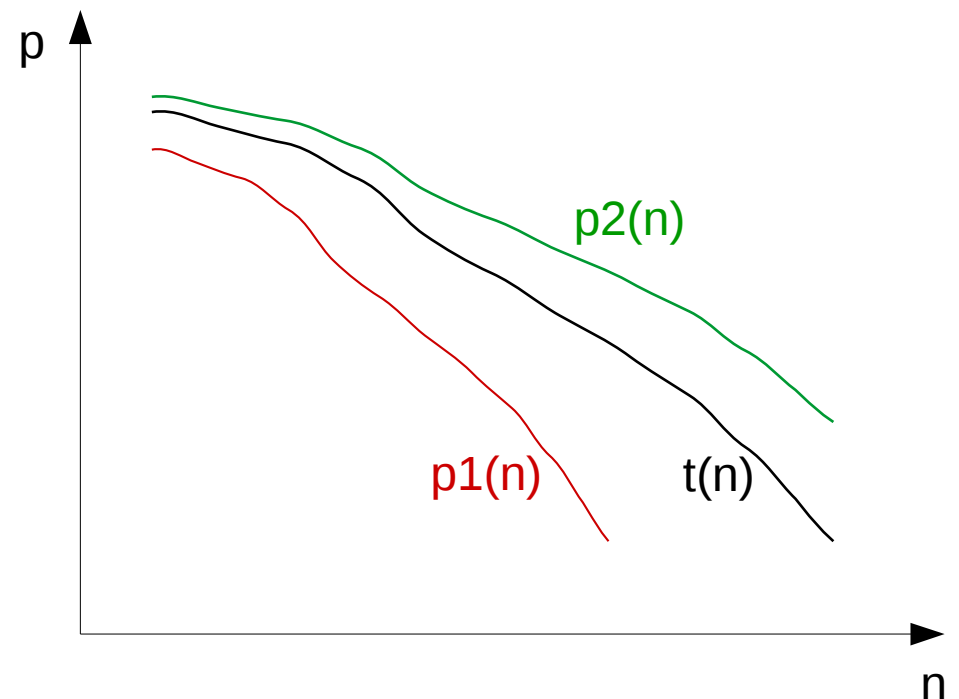
**$t(n)$  é divisor de águas para  $X$ !**

# Exemplo

- $X$  = “sua propriedade monotônica favorita”
- $t(n)$  é função de threshold para  $X$

- Se  $p(n)$  decresce mais rápido, então grafo  $G(n,p)$  não possui  $X$ , a.a.s.

- Se  $p(n)$  decresce mais devagar, então grafo  $G(n,p)$  possui  $X$ , a.a.s.



- $p1(n)$ :  $G(n,p)$  não possui  $X$ , a.a.s.
- $p2(n)$ :  $G(n,p)$  possui  $X$ , a.a.s.

# Subgrafo H

- Dado um grafo H (não rotulado)
- Prob. de H ser subgrafo de  $G(n,p)$ ?
  - para n grande o suficiente
- Probabilidade tende a zero ou tende a um
- Depende apenas do número de vértices e arestas de H e de  $p(n)$
- Resultados específicos para grafos balanceados

**Resultado binário é surpreendente!**

- com desdobramentos para combinatória

# Grafo Balanceado

- **Intuitivamente:** Grafo  $H$  que não possui partes muito diferentes
- Grau médio de um subgrafo  $H'$  de  $H$
- Considere subgrafo induzido  $H'$  de  $H$ 
  - subgrafo que contém todas arestas de  $G$  entre vértices de  $H'$
- Grafo  $H$  é balanceado se grau médio de todo subgrafo induzido  $H'$  é menor ou igual ao grau médio de  $H$
- Ex. de grafos balanceados
  - árvores, ciclos, grafos completos



# Subgrafo H

- Dado um grafo H (não rotulado) balanceado
  - k vértices e l arestas ( $l > 0$ )
- Prob. de H ser subgrafo de  $G(n,p)$ ?
  - H “aparece” em  $G(n,p)$  se existe ao menos um subgrafo de G que seja isomorfo a H
- Propriedade  $X =$  “H é subgrafo de  $G(n,p)$ ”
  - propriedade de ser subgrafo é monotônica

$t(n) = n^{-k/l}$  é função de threshold para X

# Exemplo de Árvores

- $H =$  árvore com  $k > 1$  vértices (ordem  $k$ )
  - necessariamente,  $k-1$  arestas
- Quando que tais árvores aparecem no  $G(n,p)$ ?

$t(n) = n^{-k/(k-1)}$  é função de threshold para árvores de ordem  $k$

- Se  $p(n)$  decresce mais rápido, então grafo  $G(n,p)$  não possui árvore de ordem  $k$ , a.a.s.
- Se  $p(n)$  decresce mais devagar, então grafo  $G(n,p)$  possui árvore de ordem  $k$ , a.a.s.
- Pergunta: Se  $p(n) = n^{-1}$  árvores de que tamanho ocorrem como subgrafos?

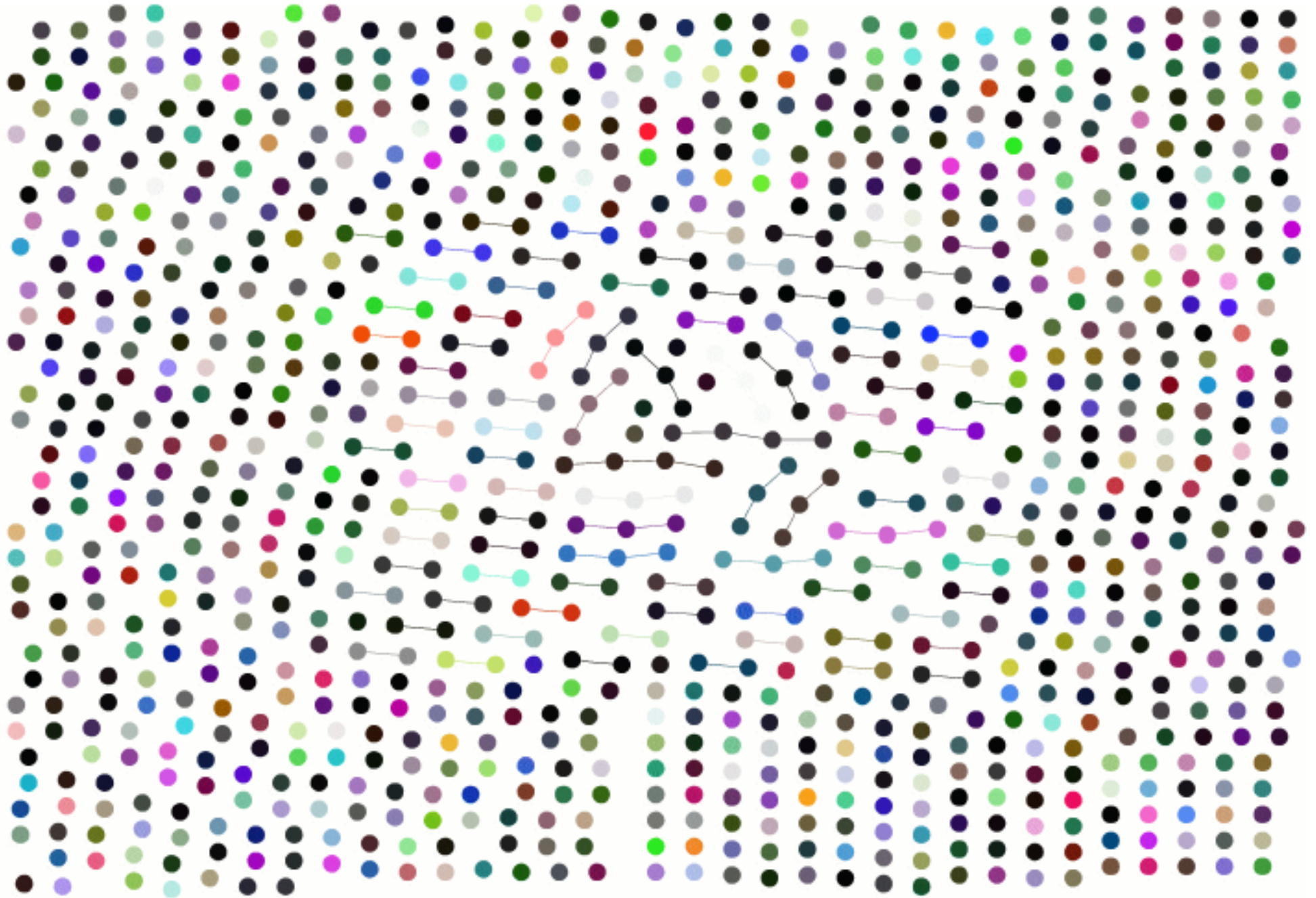
# Exemplo de Ciclos

- $H =$  ciclo com  $k > 2$  vértices (tamanho  $k$ )
  - necessariamente,  $k$  arestas
- Quando que tais ciclos aparecem no  $G(n,p)$ ?

$t(n) = n^{-1}$  é função de threshold para qualquer ciclo de tamanho fixo

- Se  $p(n)$  decresce mais rápido, então grafo  $G(n,p)$  não possui ciclo de tamanho  $k$ , a.a.s.
- Se  $p(n)$  decresce mais devagar, então grafo  $G(n,p)$  possui ciclo de tamanho  $k$ , a.a.s.

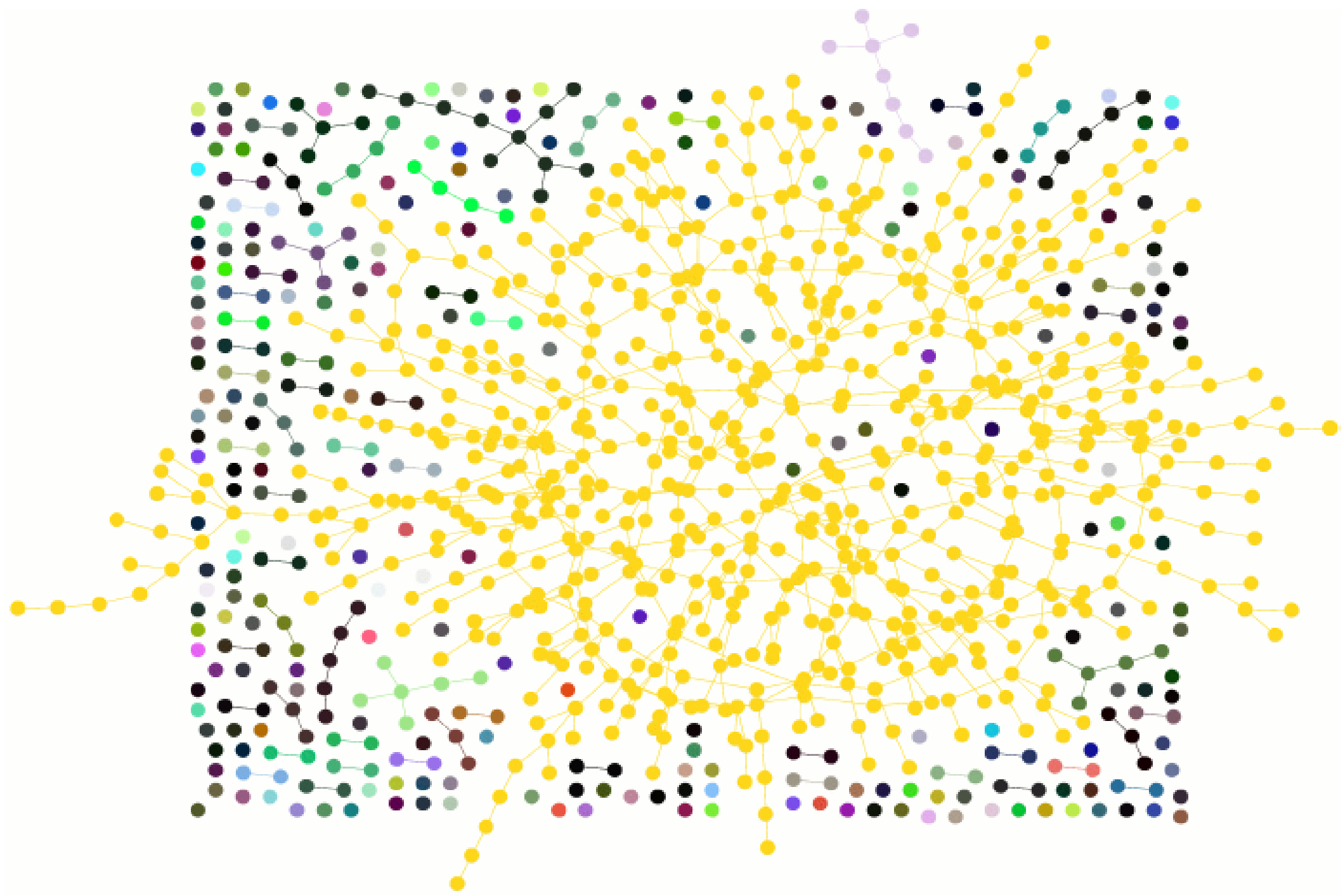
$G(1000, 0.2/1000)$



G(1000,0.5/1000)



$G(1000, 1.5/1000)$



# G(n,p) com grau médio fixo

- Grau médio fixo, igual a  $z$

$$p(n) = z / (n - 1)$$

- Propriedades estruturais dependem de  $z$ 
  - estudo em função de  $z$
- Mais refinado do que funções de threshold

**Intuição?**

- Divisor de águas:  $z < 1$  ,  $z > 1$  ?

# Componentes Conexas

- $z$  : grau médio constante
- $z < 1$  (subcrítico)
  - componentes conexas tem tamanho  $O(\log n)$  (a.a.s.)
  - Muitas componentes conexas
- $z > 1$  (supercrítico)
  - maior componente conexa tem tamanho  $\Omega(n)$
  - todas outras de tamanho  $O(\log n)$

**Transição de fase na estrutura do grafo!**



# Grau Médio Crescente

- Outra função interessante

$$p(n) = \frac{\log n}{n-1}$$

- Grau médio cresce devagar, como  $\log n$
- É função de threshold para algumas (importantes) propriedades estruturais

# $G(n,p)$ é Conexo

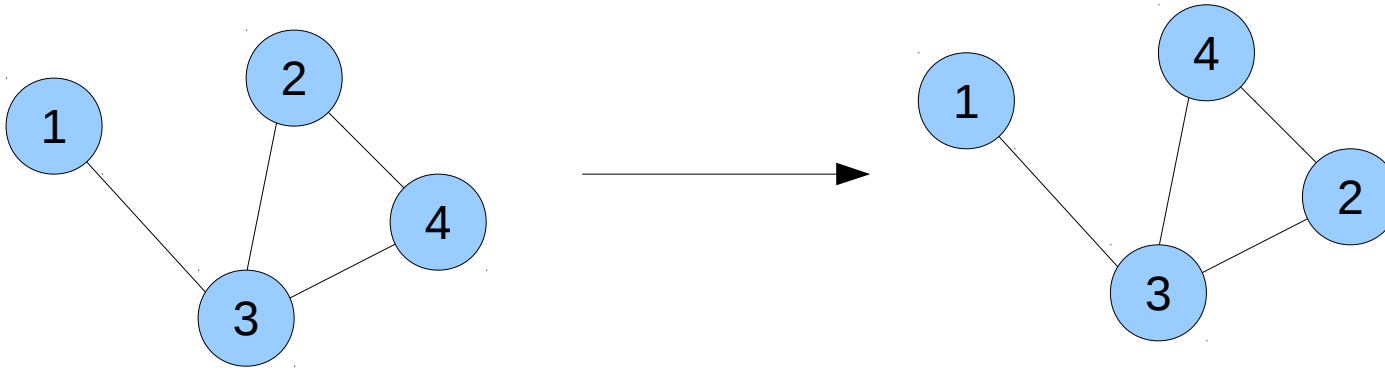
- Quando  $G(n,p)$  é conexo?
  - $p(n) > 1/n$  temos CC gigante
- $t(n) = \log n / n$  é função de threshold para  $G(n,p)$  ser conexo
  - $p(n) > \log n / n$  temos  $G(n,p)$  conexo, a.a.s.
- Como provar este resultado?
- **Ideia:** mostrar que o número de vértices isolados vai a zero
- Mostrar que o número de componentes conexas pequenas vai a zero

# $G(n,p)$ , distância média

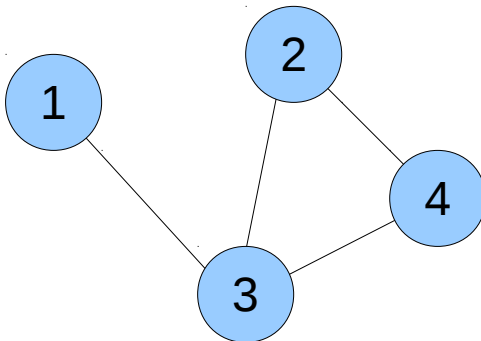
- Distância média entre os vértices
  - vértices da componente gigante
- Assumir  $p(n) = z / (n - 1)$ ,  $z > 1$
- Distância média no  $G(n,p)$  é  $O(\log n / \log z)$  a.a.s.
- Como provar este resultado?
- Ideia: escolher dois vértices aleatórios, mostrar que um alcança o outro depois de  $\log n / \log z$  saltos
- Usar processo de ramificação

# Automorfismos

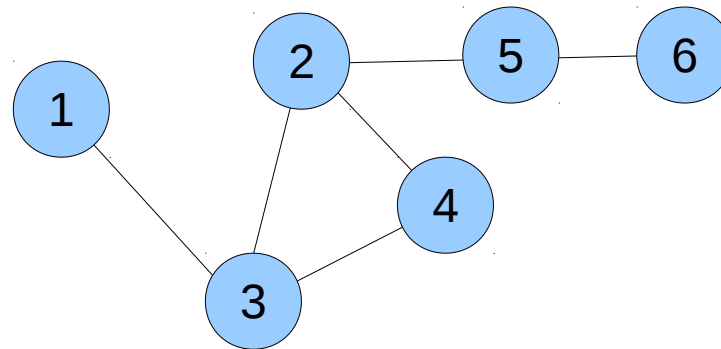
- Permutação dos rótulos dos vértices que não modifica o conjunto de arestas



- Alguns grafos possuem automorfismos, outros não



Simétrico (possui ao menos 1 automorfismo)



Assimétrico (não possui automorfismos)

# Automorfismos no $G(n,p)$

- Quando  $G(n,p)$  é assimétrico?
  - não possui automorfismos
- Se  $p(n) > c \log n / n$ ,  $G(n,p)$  não possui automorfismos a.a.s.
  - vértices são estruturalmente únicos, pois não temos simetria no grafo
- Não é função de threshold
  - ser assimétrico não é monotônico
  - grafos muito densos voltam a ser simétricos