

Redes Complexas

Aula 5

Roteiro

- Lei de potência
- Distribuição Zeta
- Propriedades
- Distribuição Zipf
- Exemplos

Lei de Potência

- Qualquer função que tenha a forma

$$f(x) \sim c x^a$$

c, a são constantes

- $f(x)$ evolui de acordo com uma potência
 - lei de potência (ou polinômio com grau real)
- Relação ocorre quando x grande

$$f(x) \sim g(x) \longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \quad \text{quando } x \rightarrow \infty$$

Invariância em Escala

- Propriedade de “*scale free*”
- Multiplicar o argumento por k mantém a *forma* da função

$$f(kx) \sim c(kx)^a \sim k^a cx^a = k^a f(x)$$

constante depende apenas de k



- Forma é preservada em qualquer escala
- Ex. $a = 2, k = 3$
 - $f(3x) = 9 f(x)$
 - evento 3 vezes maior tem 9 vezes mais impacto, independente do tamanho do evento (x)

Escala log-log

- Aplicar logaritmo aos dois lados da equação

$$f(x) \sim c x^a$$

- Temos então

$$\log(f(x)) \sim \log(c x^a) = a \log x + \log c$$

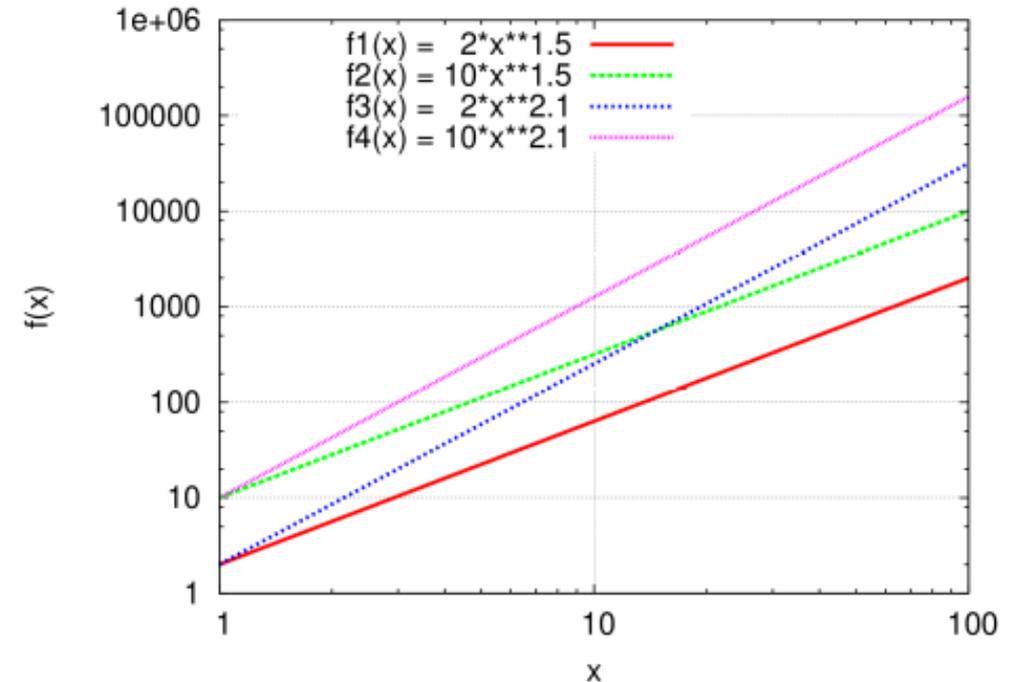
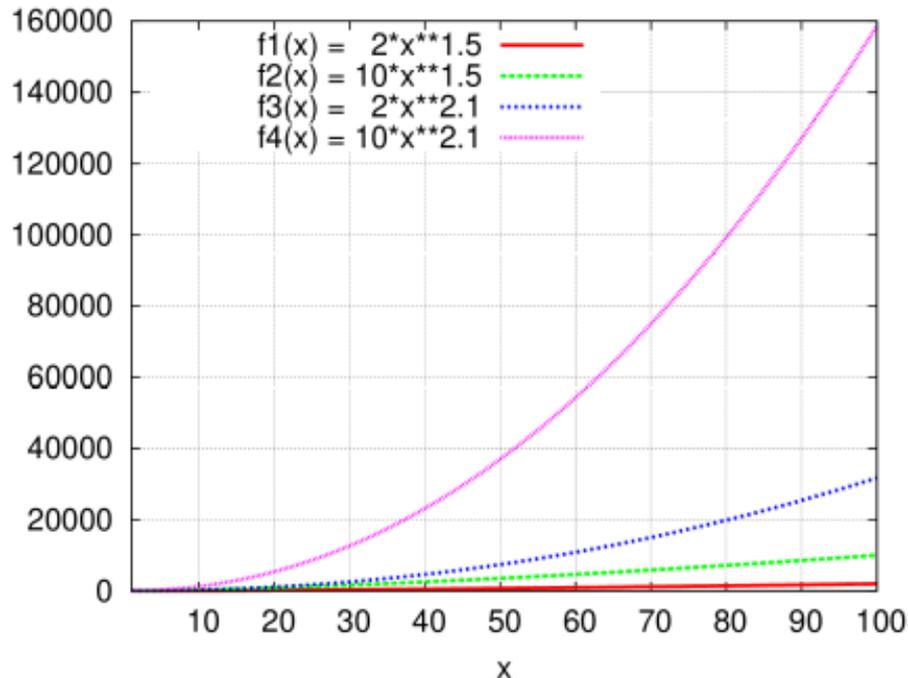
- Relação linear entre $\log f(x)$ e $\log x$ com inclinação a
- Expoente determina inclinação da reta na escala log-log
- Invariância de escala
 - inclinação (forma) não depende de x

Exemplo Fictício

Escala Linear



Escala Log-Log

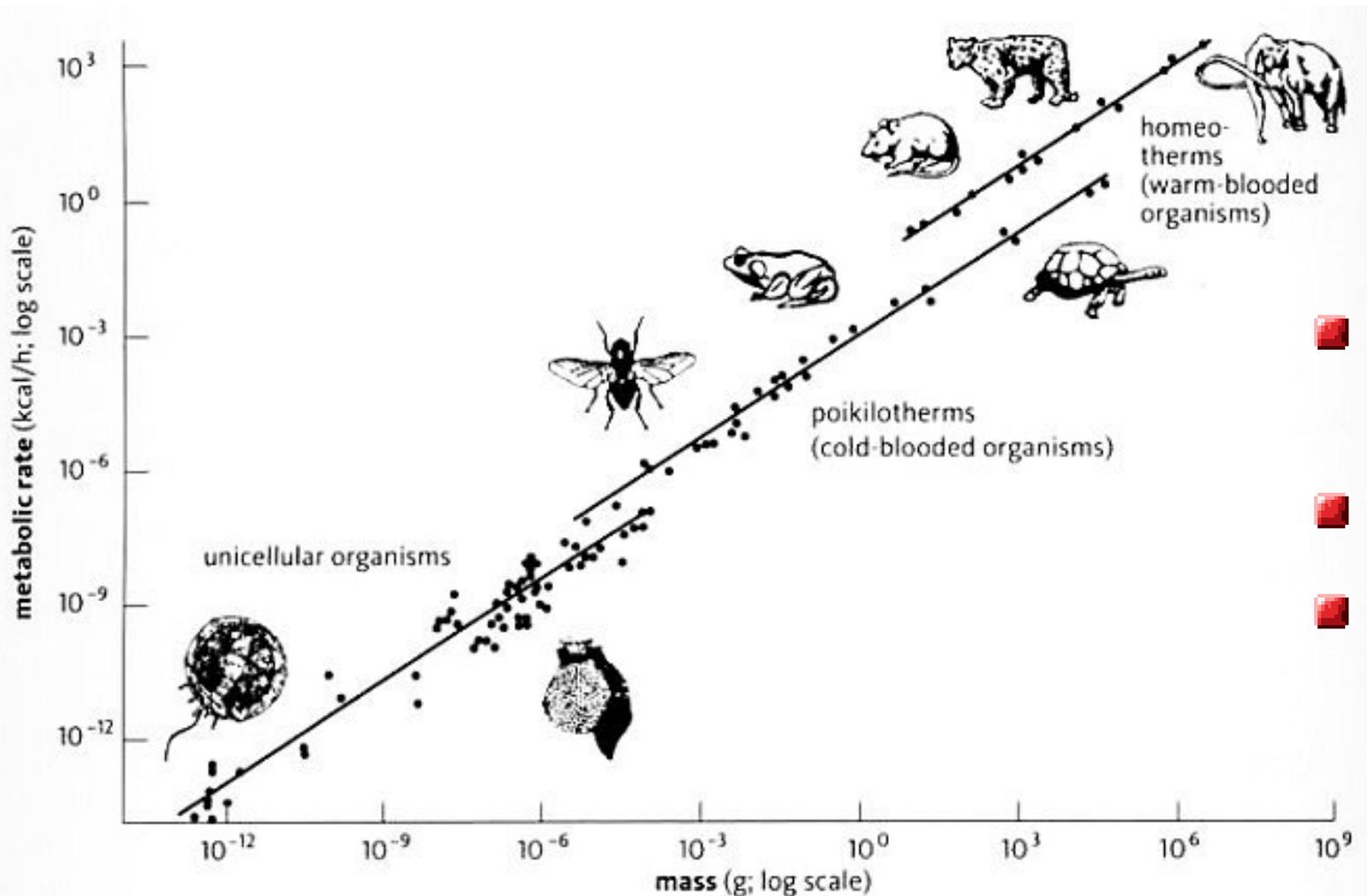


- f1 e f2: retas paralelas
- f3 inclinação maior que f1

■ Mais fácil interpretar comportamento quando apresentado em escala log-log

Exemplo Real

- Muitos fenômenos naturais e artificiais seguem lei de potência



- R: taxa metabólica
- M : massa
- Lei de Kleiber

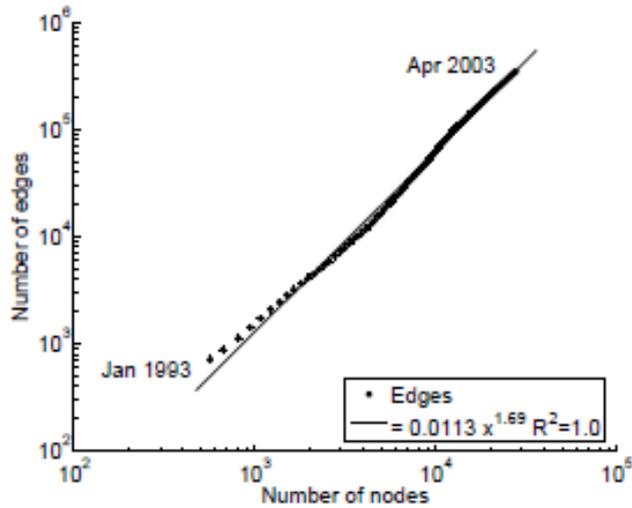
$$R \sim M^{3/4}$$

1 kcal/h = 1.162 watts

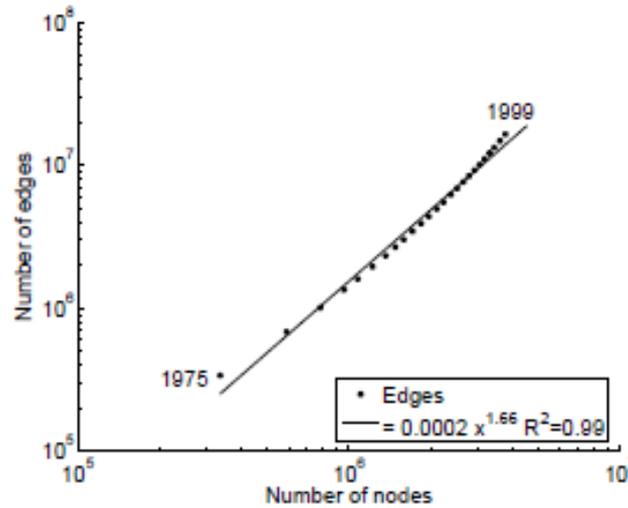
Tamanho das Redes

■ Número de vértices x número de arestas

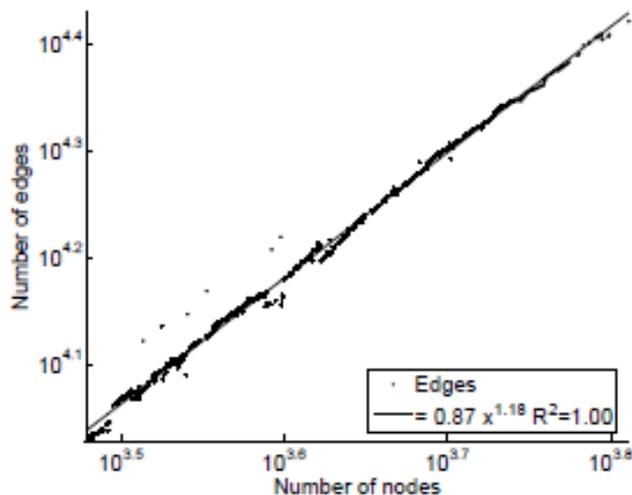
■ pontos correspondem a diferentes instâncias da rede



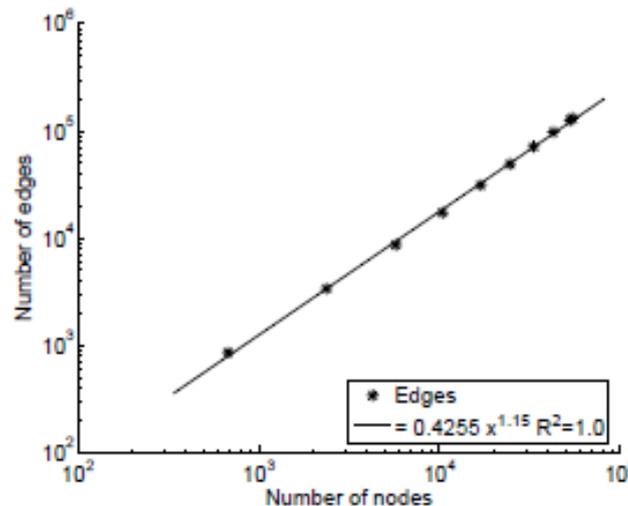
(a) arXiv



(b) Patents



(c) Autonomous Systems



(d) Affiliation network

■ Taxa de crescimento da rede

■ Arestas mais rápido que vértices

$$E \sim V^\alpha$$

↖ > 1

Distribuição de Lei de Potência

- Lei de potência aplicada a distribuição de probabilidade

$$f_X(x) \sim c x^{-a} \leftarrow \text{expoente negativo}$$

- onde X é uma v.a. e $f_X(x)$ sua função de probabilidade, $f_X(x) = P[X = x]$
- X pode ser discreta ou contínua, limitada ou ilimitada superiormente
 - se contínua, $f_X(x)$ é a função densidade

Distribuição Zeta

- Seja X uma v.a. discreta ilimitada superiormente
- X assume valores $1, 2, \dots$

$$p_k = P[X = k] \sim ck^{-a}$$

- Determinar constante c de normalização

$$p_k = ck^{-a}$$

- Temos então

$$\sum_{k>0} p_k = 1 \longrightarrow c = 1 / \sum_{k>0} k^{-a} = 1 / z(a)$$

Função Zeta de Riemann

- $\zeta(a)$ é a função zeta de Riemann

$$\zeta(a) = \sum_{k>0} k^{-a}$$

Converge para qualquer valor de a ?

- Para $a=1$ temos a série harmônica ← Não converge
- Para $a=2$ temos a série quadrática ← Converge para $\pi^2/6$
- Quando $a>1$, $\zeta(a)$ converge
- Logo função de probabilidade definida apenas quando $a>1$

Momentos da Zeta

- Calcular momentos da distribuição zeta
 - n-ésimo momento é dado por $E[X^n]$
- Primeiro momento é valor esperado ($n=1$)

Como calcular n-ésimo momento?

- Aplicar definição

$$\begin{aligned} E[X^n] &= \sum_{k>0} k^n p_k = \sum_{k>0} k^n c k^{-a} = \\ &= \frac{1}{z(a)} \sum_{k>0} k^{-(a-n)} = \frac{z(a-n)}{z(a)} \end{aligned}$$

Momentos da Zeta

- n-ésimo momento é dado por

$$E[X^n] = z(a-n) / z(a)$$

Converge sempre?

- para $a - n > 1$ ou seja, $a > n + 1$
 - infinito caso contrário (não converge)
- Exemplo: $a = 2.3$, $E[X]$ existe? $\text{Var}[X]$ existe?
 - $\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$, função do segundo momento
 - $E[X]$ está definido, pois $2.3 > 1 + 1$
 - $E[X^2]$ é infinito, pois $2.3 < 2 + 1$
 - $\text{Var}[X]$ é infinita!

Invariância em Escala

- Razão entre probabilidades depende apenas da razão entre magnitudes
- Não depende do tamanho do evento (k)
- Matematicamente, seja b uma constante positiva

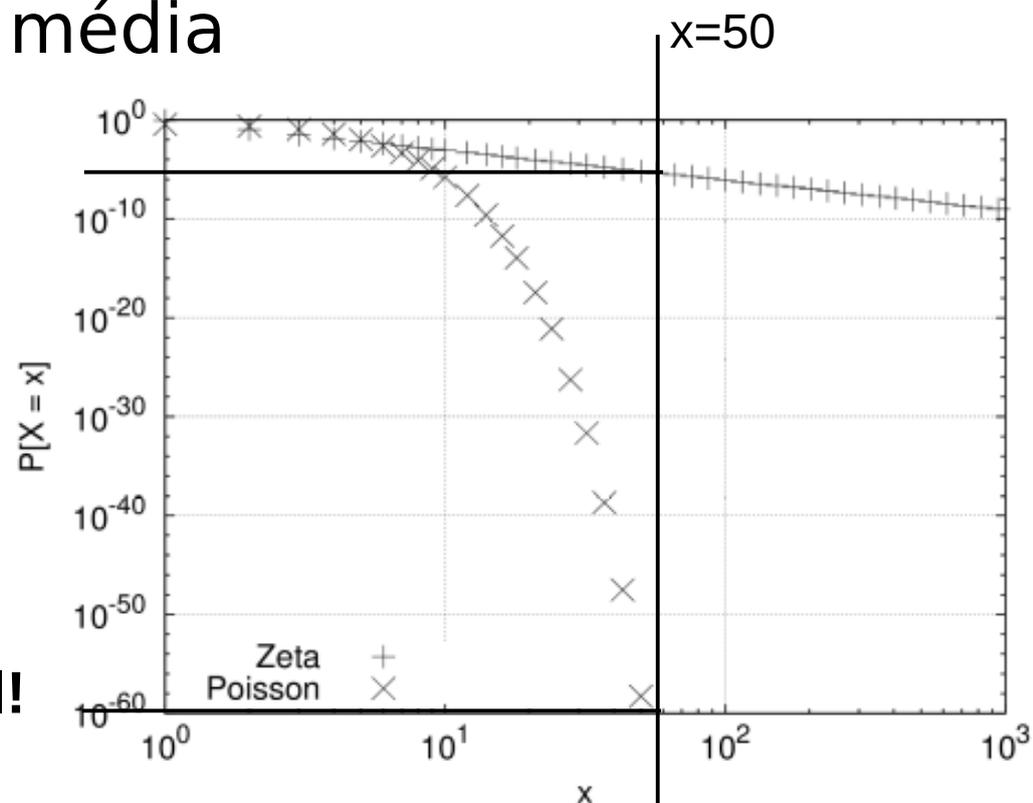
$$\frac{P_{bk}}{P_k} = \frac{c(bk)^{-a}}{ck^{-a}} = b^{-a}$$

↖ Não depende de k (escala), apenas de b (fator multiplicativo)

Cauda Pesada

- *Heavy tail* ou *long tail* ou *fat tail*
- Probabilidade decresce devagar com x
 - segue lei de potência, ao invés de lei exponencial
- Eventos “enormes” podem ocorrer com probabilidade não desprezível
 - muito maiores do que a média
- Comparação entre Zeta ($a = 3$) e Poisson
- Mesmo valor esperado, $E[X] = 5$
- Poisson tem cauda exponencial

**10^{50} vezes
mais provável!**



Distribuição de Zipf

- Variação de distribuição de Zeta
 - proposta por George Zipf em 1935 para caracterizar distribuição de palavras em textos
- Valores de X são limitados superiormente por n (parâmetro do modelo)

$$p_k = c k^{-a}$$

- Constante de normalização?

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1 \rightarrow c = 1 / \sum_{k=1}^n k^{-a} = 1 / H_{n,a}$$

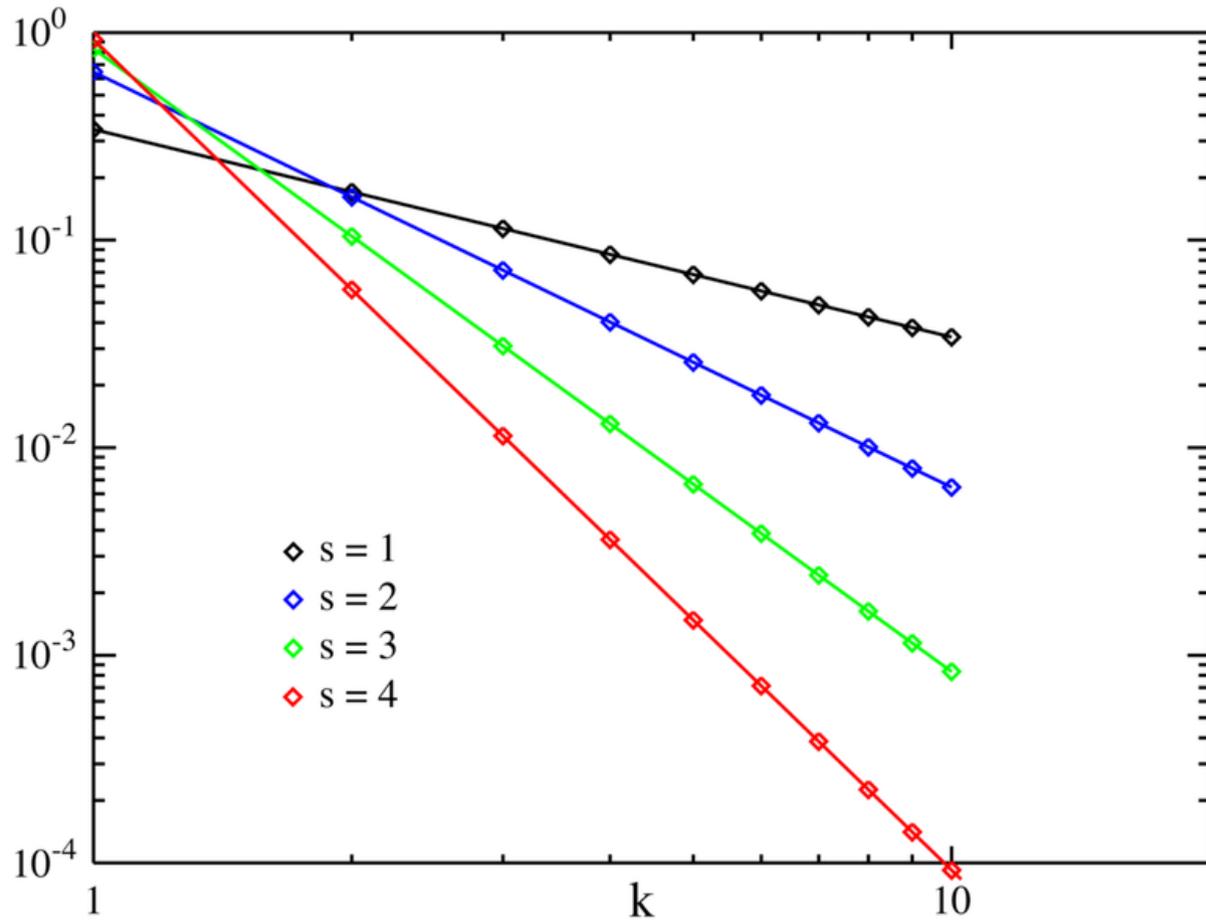
Distribuição de Zipf

- $H_{n,a}$ é o n-ésimo número harmônico generalizado

$$H_{n,a} = \sum_{k=1}^n k^{-a}$$

- Para qualquer n finito, $H_{n,a}$ converge
 - diferença fundamental para Zeta
- Momentos da Zipf?
 - aplicar definição, todos definidos

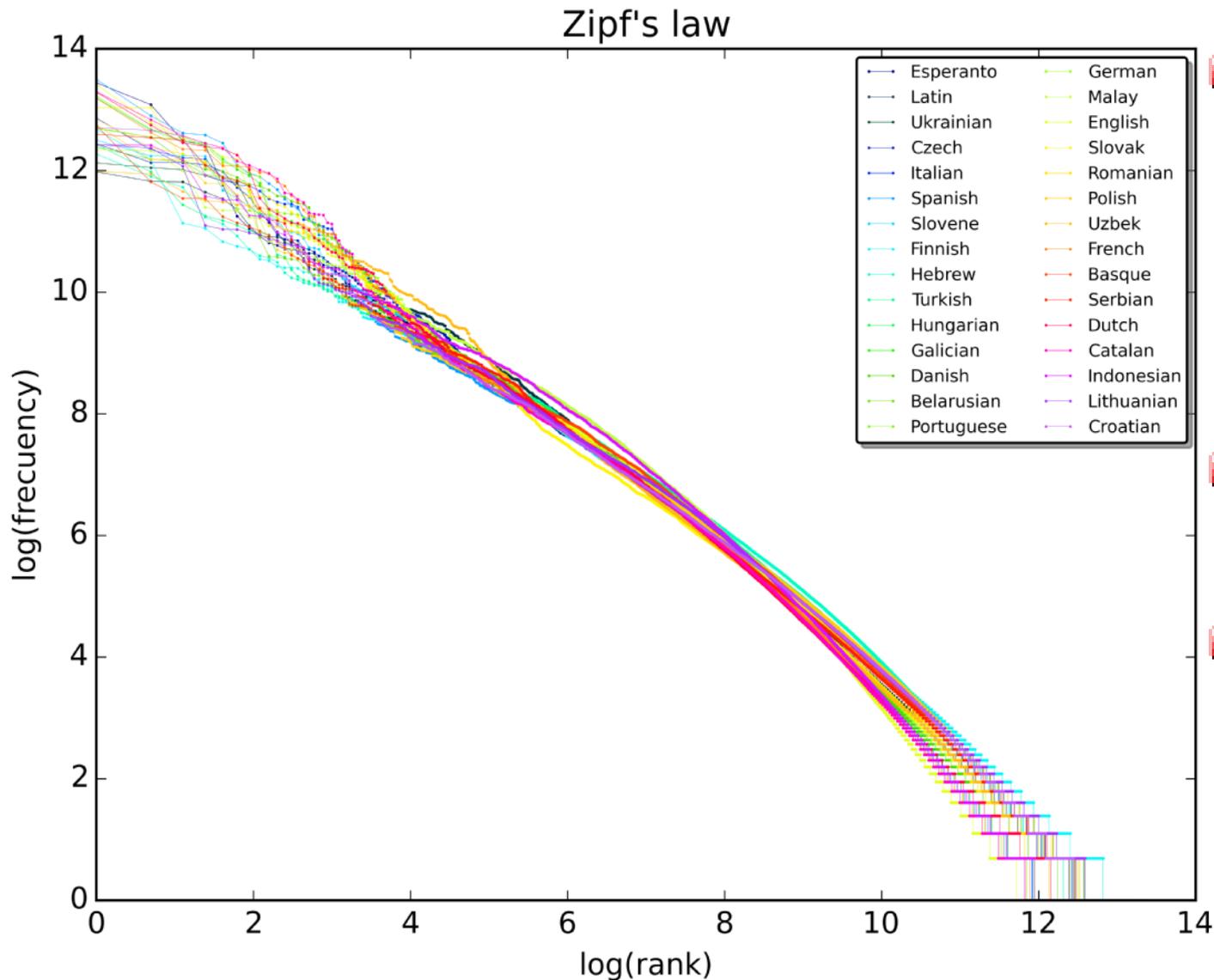
Exemplo da Zipf



■ Escala log-log (k versus p_k)

- $n = 10$
- Diferentes valores para a (s na figura)
- Maior s , menor é a cauda, pois distribuição *decrece* mais rapidamente
- Peso da cauda é inversamente proporcional ao expoente

Wikipedia (real)

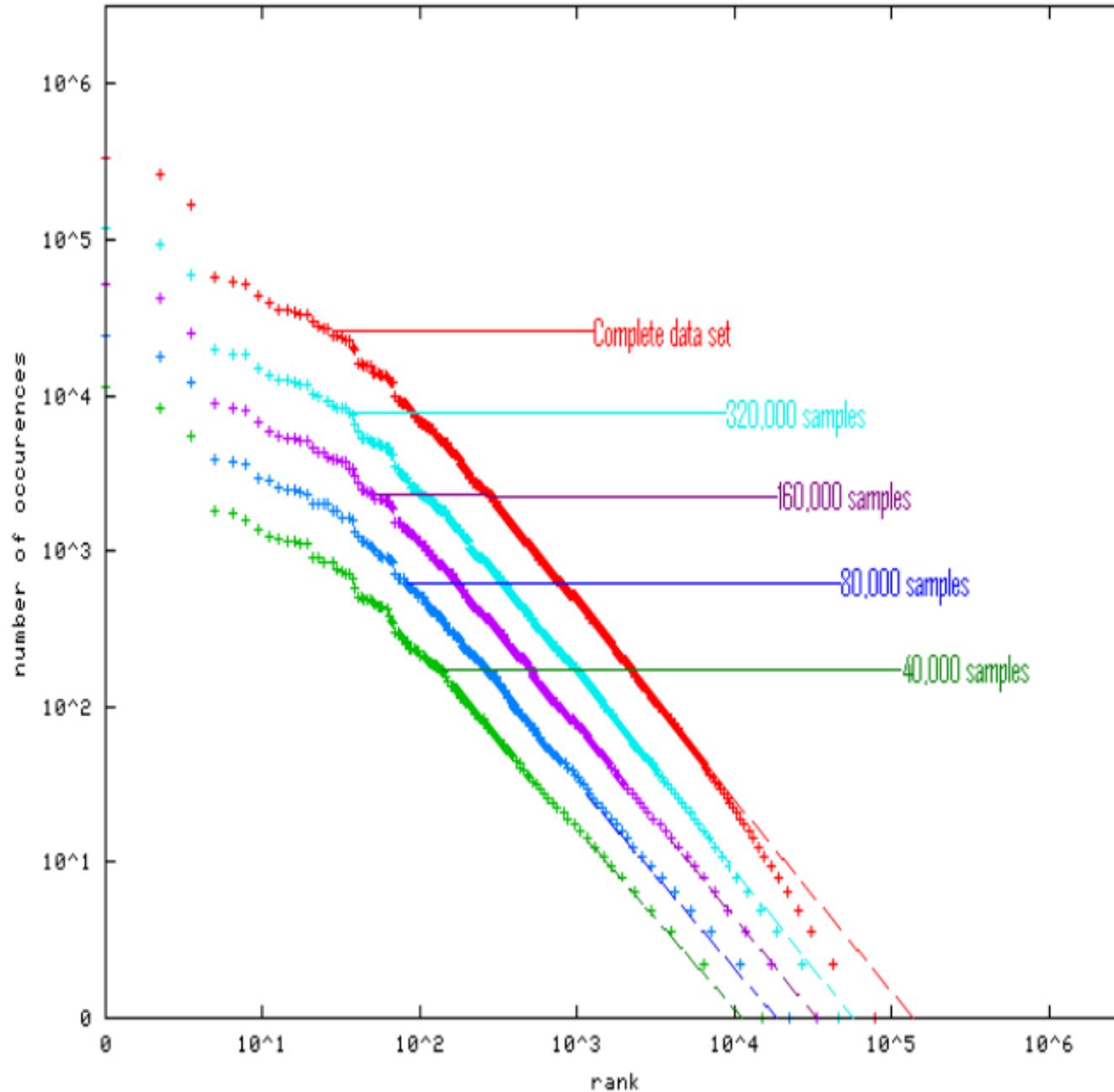


■ Frequência de palavras no Wikipedia em diferentes idiomas

■ Idiomas são parecidos

■ Muito bem representado por distribuição de Zipf

Bíblia (real)



- Frequência de palavras na Bíblia para diferente número de amostras
- amostras aleatórias de palavras (preservam a forma)

Figure 4: Word frequency in the Bible (including both the Old and the New Testament).