

Redes Complexas

Aula 8

Aula passada

- Modelos de redes
- Grafos aleatórios
- Modelo $G(n, p)$
- Propriedades

Aula de hoje

- Modelo $G(n, p)$
- Threshold functions
- Propriedades estruturais

Modelo $G(n,p)$

- Modelo aleatório para grafos
 - Modelo clássico, Erdos-Reyni
- Dois parâmetros (determinísticos)
 - n : número de vértices
 - p : prob. de existência de cada aresta
- Cada possível aresta do grafo ocorre com probabilidade p independentemente
 - grafo não-direcionado, sem loops

Estudo das propriedades topológicas deste modelo

G(n,p) com p(n)

- p(n) é uma função de n
 - caso anterior p(n) = cte

Qual p(n)?

- p(n) deve **decrecer** com n
- Exemplos (c é constante)

$$p(n) = \frac{c}{n}$$

$$p(n) = c n^{-2.5}$$

$$p(n) = \frac{c \log n}{n}$$

Propriedade de *Quase Todos os Grafos*

- Seja G um modelo aleatório para grafos e X uma propriedade topológica

- Se

$$P[G \text{ possuir } X] \rightarrow 1 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

- Então dizemos que quase todos os grafos de G possuem X
 - X ocorre em G a.a.s. (*asymptotically almost surely*)

Threshold Functions

- Seja X uma propriedade do grafo e $p(n)$ uma função que define a prob. da aresta
- Dizemos que $t(n)$ é uma *threshold function* para propriedade X quando

■ Se $\frac{p(n)}{t(n)} \rightarrow 0$ Então $G(n,p)$ **não possui** a propriedade X , a.a.s.

■ Se $\frac{p(n)}{t(n)} \rightarrow \infty$ Então $G(n,p)$ **possui** a propriedade X , a.a.s.

$t(n)$ é divisor de águas!

Exemplo

- $X = \text{“ser conexo”}$

$t(n) = \frac{\log n}{n}$ é threshold function para X

- Se $p(n)$ decresce mais rápido, então grafo $G(n,p)$ é desconexo, a.a.s.
- Se $p(n)$ decresce mais devagar, então grafo $G(n,p)$ é conexo, a.a.s.

**$\log n / n$ é divisor de águas
para propriedade ser conexo!**

Subgrafo H

- Dado um grafo H (não rotulado)
- Prob. de H ser subgrafo de $G(n,p)$?
 - para n grande o suficiente

Resultado surpreendente

- Probabilidade tende a zero ou tende a um
- Depende apenas do número de vértices e arestas de H (assumindo que H é balanceado)
 - e de $p(n)$

Grafo Balanceado

- **Intuitivamente:** Grafo H que não possui partes muito diferentes
- Grau médio de um subgrafo H'
 - $2m(H')/n(H')$
- Considere subgrafo induzido H'
 - subgrafo que contém todas arestas de G entre vértices de H'
- Grafo H é balanceado se grau médio de todo subgrafo induzido H' é menor ou igual ao grau médio de H
- Ex. de grafos balanceados
 - árvores, ciclos, grafos completos

Subgrafo H

- Dado um grafo H (não rotulado) balanceado
 - k vértices e l arestas ($l > 0$)
- Prob. de H ser subgrafo de $G(n,p)$?
 - H “aparece” em $G(n,p)$ se existe ao menos um subgrafo de G que seja isomorfo a H
- Propriedade $X = \text{“H é subgrafo de } G(n,p)\text{”}$

$t(n) = n^{-k/l}$ é *threshold function* para X

Exemplo de Árvores

- $H =$ árvore com $k > 1$ vértices (ordem k)
 - necessariamente, $k-1$ arestas
- Quando que tais árvores aparecem no $G(n,p)$?

$t(n) = n^{-k/(k-1)}$ é threshold function para árvores de ordem k

- Se $p(n)$ decresce mais rápido, então grafo $G(n,p)$ não possui árvore de ordem k , a.a.s.
- Se $p(n)$ decresce mais devagar, então grafo $G(n,p)$ possui árvore de ordem k , a.a.s.
- Se $p(n) = \log n / n$ terei subgrafos que são árvores de que tamanho (fixo)?

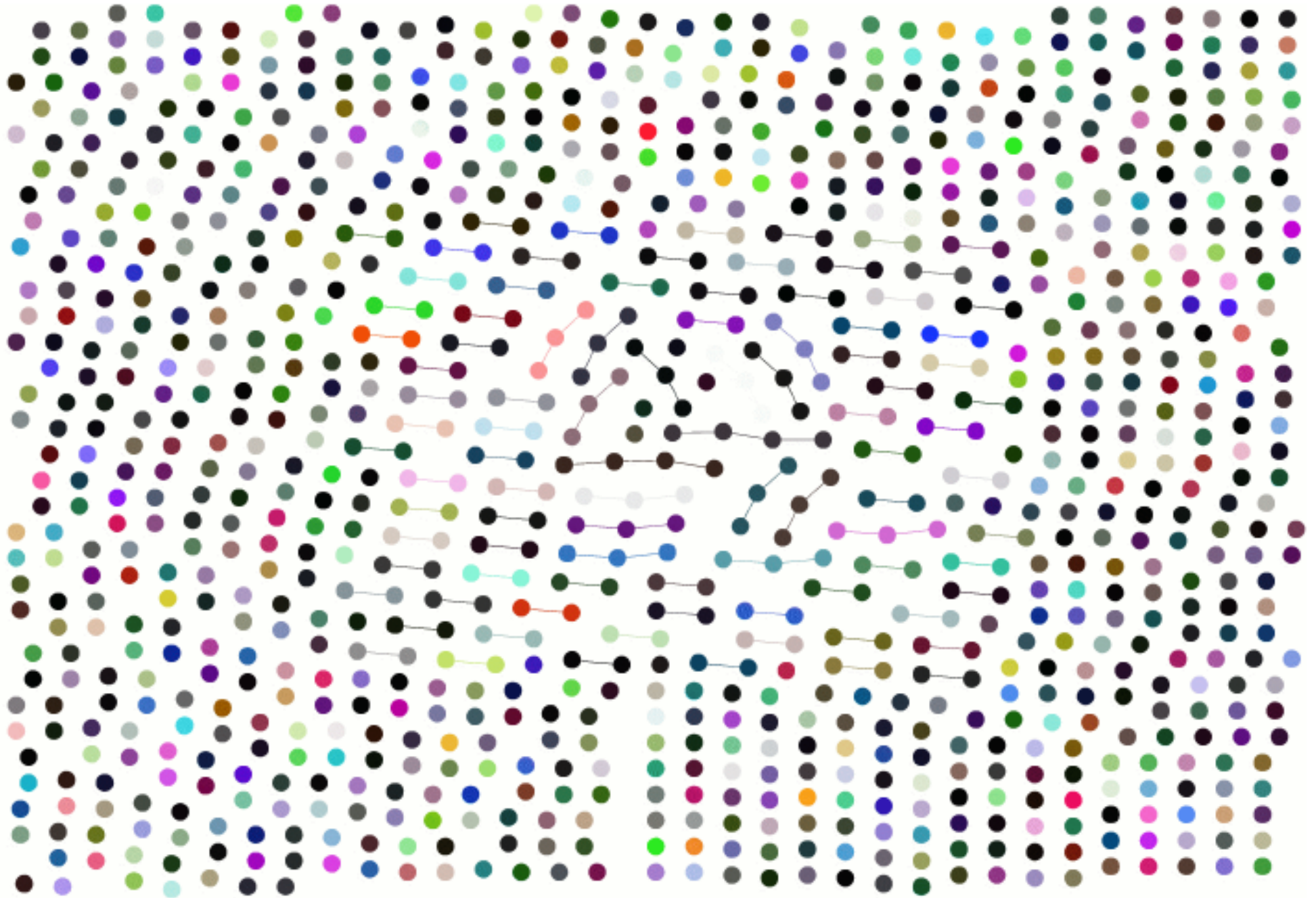
Exemplo de Ciclos

- $H =$ ciclo com $k > 2$ vértices (tamanho k)
 - necessariamente, k arestas
- Quando que tais árvores aparecem no $G(n,p)$?

$t(n) = n^{-1}$ é threshold function para qualquer ciclo de tamanho fixo

- Se $p(n)$ decresce mais rápido, então grafo $G(n,p)$ não possui ciclo de tamanho k , a.a.s.
- Se $p(n)$ decresce mais devagar, então grafo $G(n,p)$ possui ciclo de tamanho k , a.a.s.

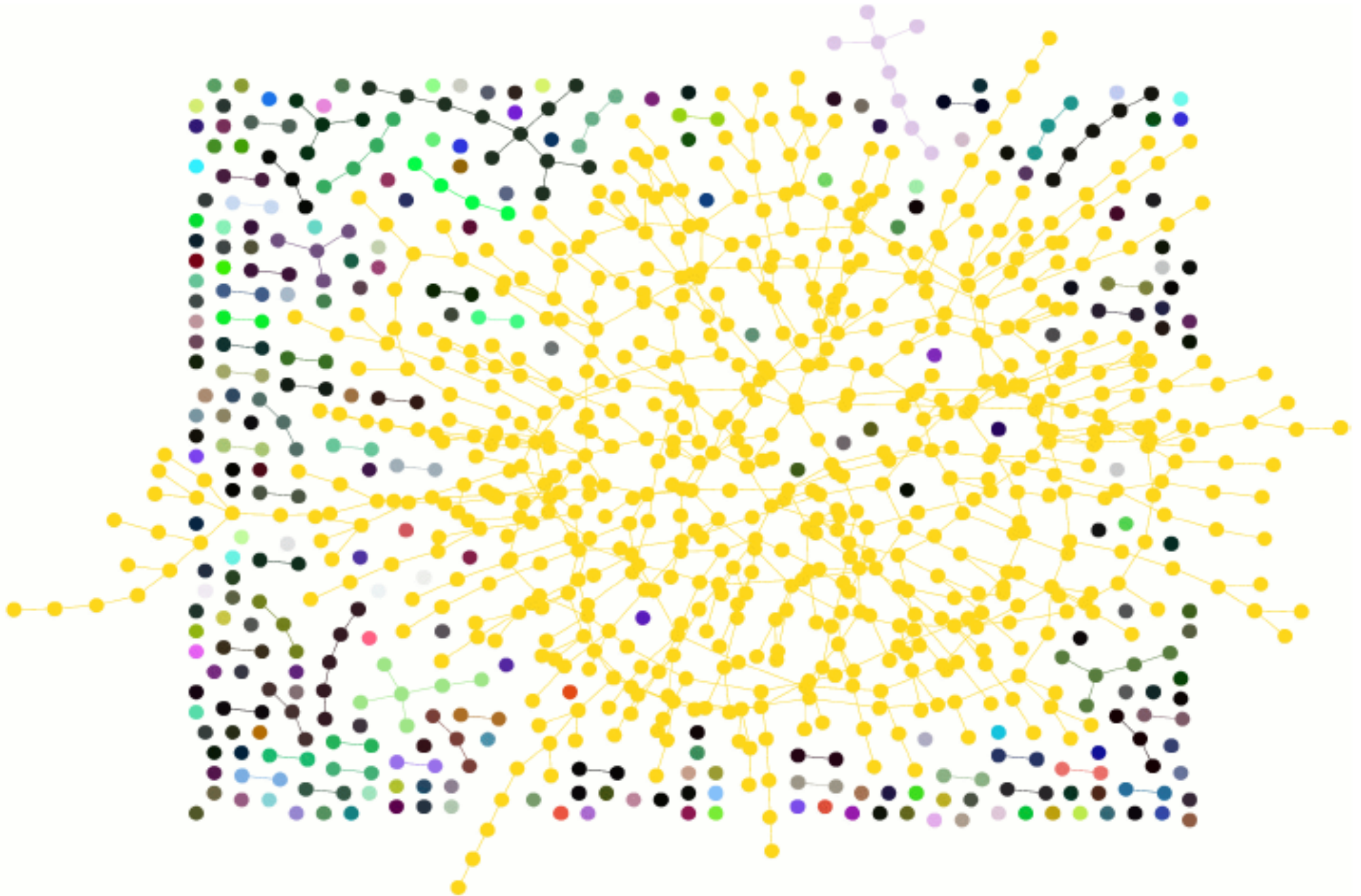
$G(1000, 0.2/1000)$



G(1000,0.5/1000)



$G(1000, 1.5/1000)$



G(n,p) com grau médio fixo

- Grau médio fixo, igual a z

$$p(n) = z / (n - 1)$$

- Propriedades estruturais dependem de z
 - estudo em função de z
- Tamanho das componentes conexas

Intuição?

- Divisor de águas: $z < 1$, $z > 1$?

Componentes Conexas

- z : grau médio de um vértice
- $z < 1$ (subcrítico)
 - componentes conexas tem tamanho $O(\log n)$ (a.a.s.)
 - Muitas componentes conexas
- $z > 1$ (supercrítico)
 - maior componente conexa tem tamanho $\Omega(n)$
 - todas outras de tamanho $O(\log n)$

Transição de fase na estrutura do grafo!

$G(n,p)$, distância média

- Distância média entre os vértices
 - vértices da componente gigante
- Assumir $p(n) = z / (n - 1)$, $z > 1$
- Distância média no $G(n,p)$ é $O(\log n / \log z)$ a.a.s.
- Como provar este resultado?
- Idéia: escolher dois vértices aleatórios, mostrar que um está na vizinhança do outro depois de $\log n / \log z$ passos
- Processo de ramificação

Grau Crescente

- Outra função interessante

$$p(n) = \frac{c \log n}{n-1} \quad \leftarrow \text{Com } c \text{ constante } > 0$$

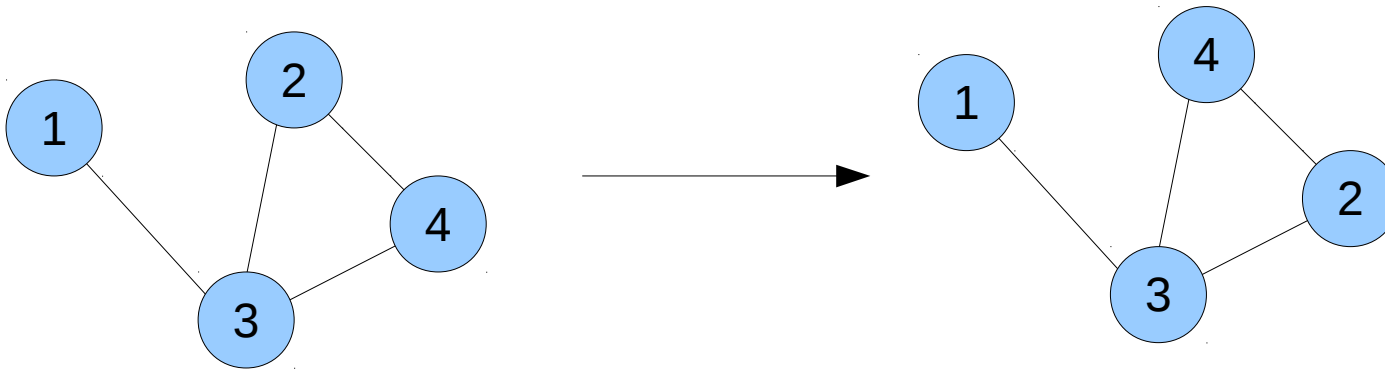
- Grau médio cresce devagar com n
- Possui outras propriedades estruturais
- Conectividade: grafo gerado é conexo
- Ponto crítico em $\log n / n$

$G(n,p)$, grau médio $\Omega(\log n)$

- Para $p(n) > c \log n / n$, $G(n,p)$ é conexo a.a.s.
- Como provar este resultado?
- Idéia: mostrar que o número de vértices isolados vai a zero
- Mostrar que o número de componentes pequenos vai a zero

Automorfismos

- Permutação dos rótulos dos vértices que não modifica o conjunto de arestas



- Alguns grafos possuem automorfismos, outros não
 - grafos assimétricos ou simétricos
- Se $p(n) > c \log n / n$, $G(n,p)$ não possui automorfismos a.a.s.