Redes Complexas
Aula 15

Aula passada

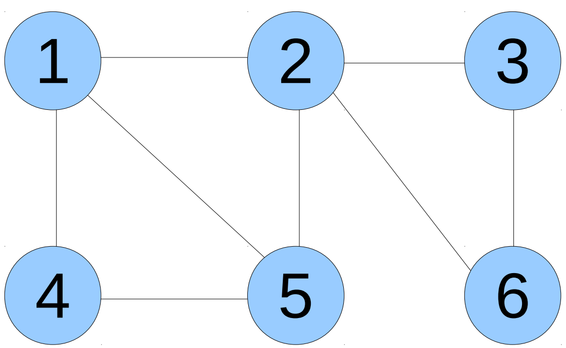
- Busca em redes
- Explorando estrutura
- Navegação em redes
- Algoritmo eficiente e estrutura

Aula de hoje

- Resilience (“robustez”)
- Tipo de falhas
- Influência da estrutura
- Análise do ponto crítico

Redes e Falhas

- Rede: abstração de um sistema real
  - ex. Internet, rede social, web
- "Componentes" da rede podem falhar
  - vértices ou arestas



Mudanças estruturais!

O que acontece quando falhas ocorrem?

Resilience (“robustez”)

- Capacidade da rede de *operar* na presença de falhas
  - vértices ou/e arestas
- Medida da redundância existente na rede
  - muitas métricas
- Robustez em função da topologia
  - impacto da topologia na robustez
- Aplicação depende do contexto
  - ex. robustez da Internet a falhas nos AS

Métricas de Robustez

- Métricas locais
  - impacto em um ou poucos vértices
  - ex. número de arestas para desconectar um vértice qualquer
- Métricas globais
  - impacto na rede como um todo
  - ex. tamanho da componente gigante

Interesse em métricas globais

Métricas Globais

- Tamanho da componente gigante
  - absoluto ou relativo
- Tamanho médio das componentes
  - excetuando a componente gigante
- Distância média entre todos os pares
- Diâmetro da rede
  - maior distância entre qualquer par

Outras?

Tipo de Falhas

- Como vértices ou arestas falham?
- Aleatoriamente
  - uniforme: todos tem mesma prob de falhar
  - não-uniforme: algum fenômeno
- Deterministicamente
  - Definir ordenação: quem falha primeiro, segundo, etc.
  - ex. ordenação decrescente por grau
- Falhas por defeito: aleatório
  - ex. roteador queimou
- Falhas propositais: determinístico
  - ex. roteador foi atacado

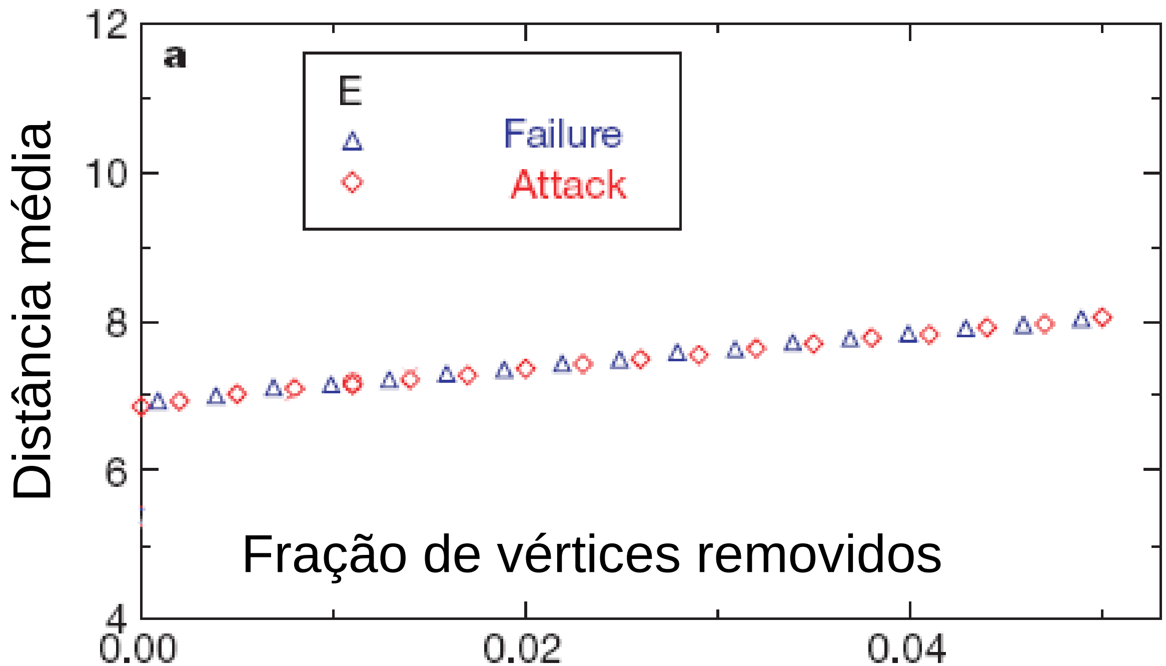
Resilience e Falhas

- Robustez da rede na presença de falhas
  - Aleatórias (uniforme), determinísitica (grau)
  - Ex. distância média entre pares
- Diferença com relação ao tipo de falha?
  - para uma mesma fração que falha
- Influência da topologia da rede?
  - para mesmo n e grau médio

Modelo G(n,p)? Modelo BA?

Falhas no G(n,p)

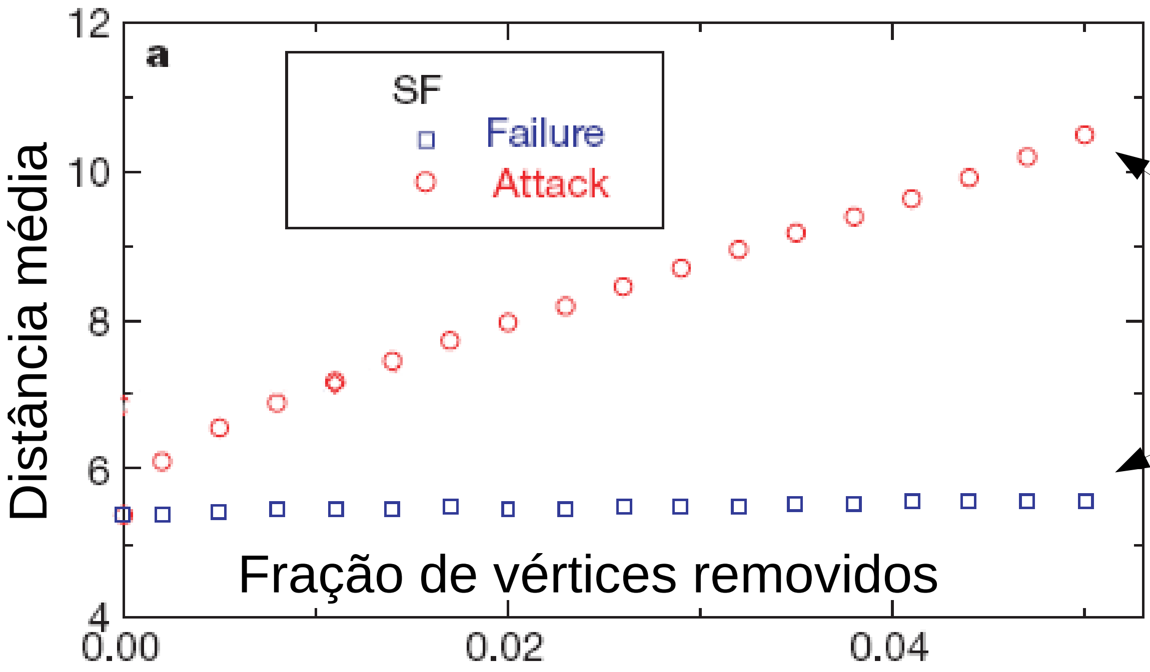
- **Intuição?**
- Falhas aumentam (mas não muito) a distância média entre vértices
- Falhas aleatórias se parecem com falhas determinísticas
  - grau máximo é próximo ao grau médio



- N = 10000, <D> = 4

Falhas no BA

- **Intuição?**
- Falhas aleatórias **não** se parecem com falhas determinísticas
- Falhas aleatórias: pouco impacto
  falhas determinísticas: muito impacto



- N = 10000, <D> = 4

5% dos vértices removidos; distância média dobrou!

5% dos vértices removidos; distância média não variou

Falhas Aleatórias

- Modelo BA, lei de potência

- Remoção aleatória (uniforme)
- Pouco impacto, rede robusta

Falhas Determinísticas

- Modelo BA, lei de potência
- Remoção por ordem decrescente do grau

- Impacto devastador
- Estrutura tem papel fundamental

Modelo BA

- Distribuição do grau segue lei de potência

- Maioria dos vértices tem grau pequeno
- Pouca importância na rede

↓

- Tolerante a falhas aleatórias

- Poucos vértices com grau grande
- Interconectam a rede

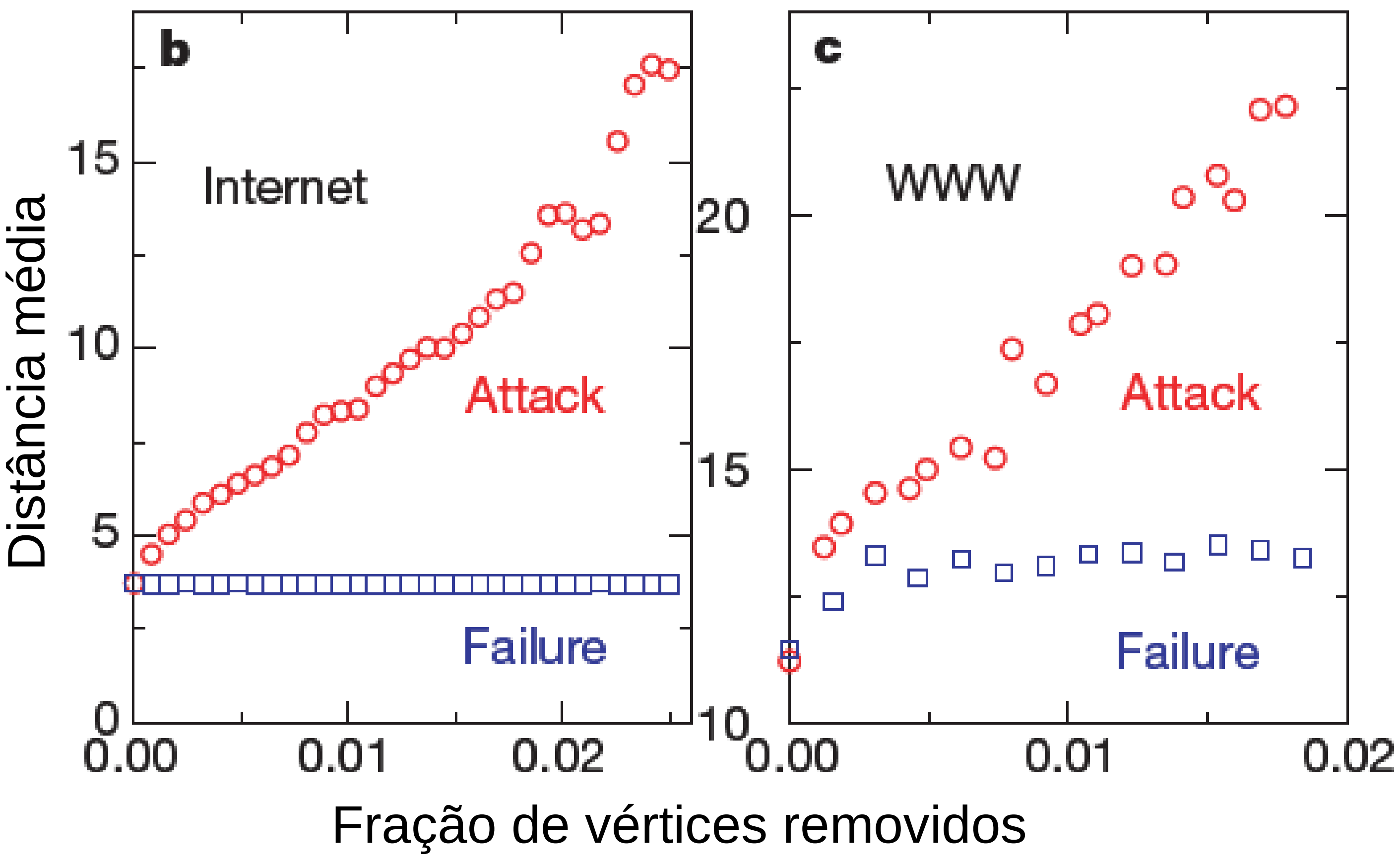
↓

- Vulnerável a ataques direcionados

Propriedade de redes livre de escala!

Robustez em Redes Reais

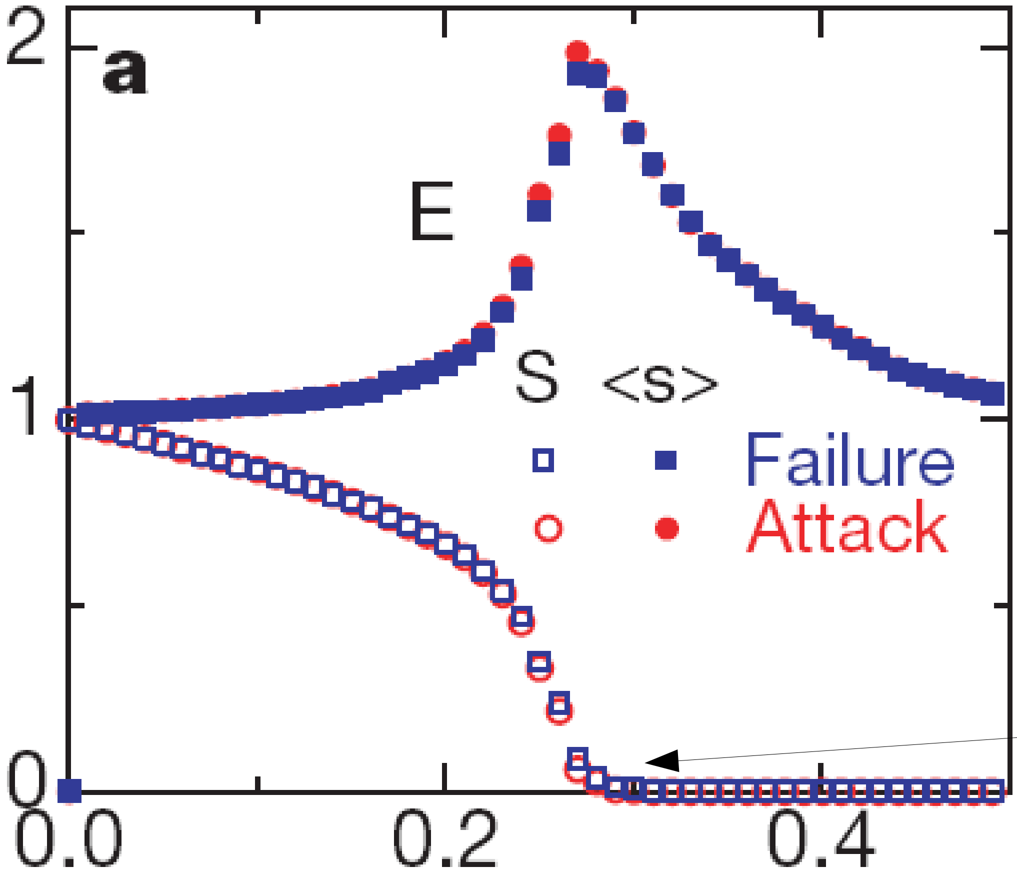
- WebGraph, AS Graph
  - Redes seguem lei de potência no graus



- Comportamento parecido com modelo BA
- Tolerante a falhas, vulnerável a ataques
- AS não é roteador!

Outras Métricas

- Tamanho relativo da componente gigante (GCC)
- Tamanho médio das outras componentes
- **Intuição G(n,p)?**

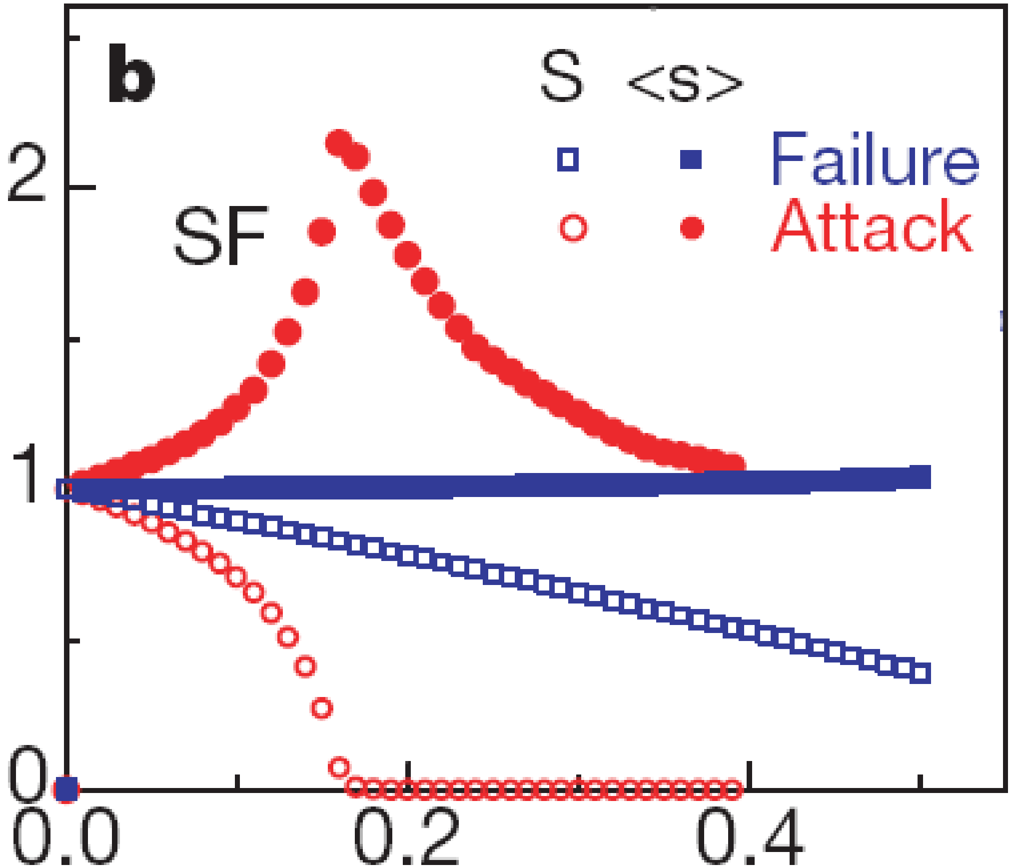


- Falhas eventualmente destroem componente gigante
- Tamanho médio das outras componentes vai a um
- Rede despedaçada!

Transição de fase?

Outras Métricas

- Intuição para modelo BA?
- Falha aleatória diferente de falha determinística



- Decrescismento linear tamanho relativo da GCC
- Tamanho médio das outras CC é 1
- Rede despedaçada para falhas direcionadas
- Despedaça antes da G(n,p)

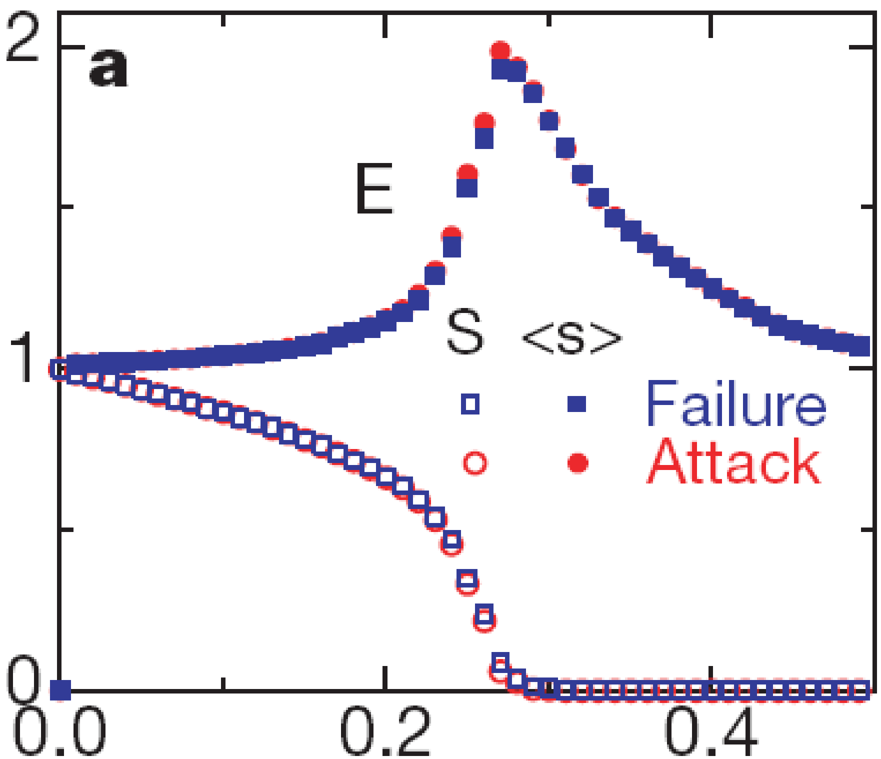
Transição de Fase

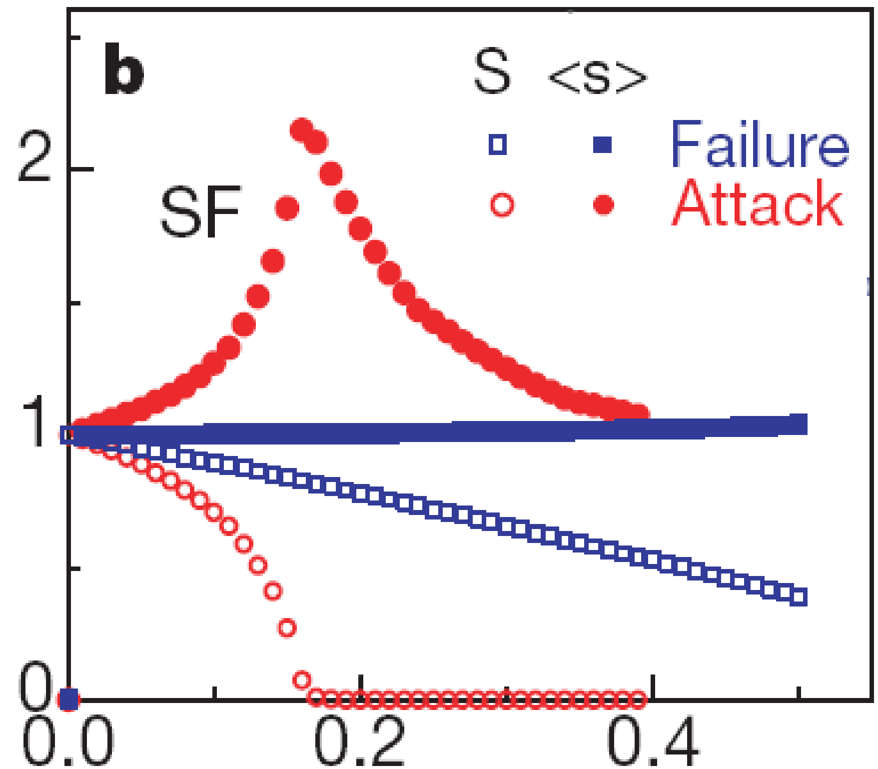
- Tamanho relativo da componente gigante
  - vai a zero rapidamente, para p grande suficiente

Valor de p que desintegra GCC?

- Depende do modelo de falhas
  - Aletório ou determinístico
- Depende da estrutura
  - G(n,p), BA, etc

Tamanho da Maior CC





- G(n,p), indiferente quanto ao tipo de falha
- BA, “robusta enquanto frágil”

Estudo Analítico

- GCC : componente conexa gigante
  - maior componente conexa tem εn vértices, para algum $\varepsilon > 0$, a.a.s.
- Condição (aprox) para termos uma GCC em um grafo aleatório qualquer

$E[d_i | i - j] > 2$, para todos vértices i, j dentro da GCC

- Valor esperado do grau de i, dado que i e j são vizinhos
- Intuição?
- Condição no G(n,p) ?
- E[d] > 1

Condição Equivalente

- Condição (aprox) para termos uma GCC em um grafo aleatório qualquer

$$E[d_i | i-j] > 2 \quad \longleftrightarrow \quad \kappa = \frac{E[d^2]}{E[d]} > 2$$

- Depende apenas do primeiro momento E[d] e do segundo momento $E[d^2]$ da distribuição do grau dos vértices!
- Distribuição do grau dos vértices depois da falha determina existência do GCC
- Problema: calcular dois momentos da distribuição (depos da remoção)!

Distribuição do Grau

- Considere distribuição de grau original
  - P[D = k], é dada
- Após falha dos vértices, qual nova distribuição do grau?
  - P[D' = k]
- Depende do modelo de falhas!
- Assumir modelo aleatório (uniforme)
- Obs: remover uma fração ***p*** dos vértices equivale a cada vértice deixar de existir com probabilidade ***p***

Distribuição do Grau

- Dado grau original k, probabilidade do grau ser k' após falha?

$$P[D'=k'|D=k]=\binom{k}{k'}(1-p)^{k'}p^{k-k'}$$

- Descondicionando

$$P[D'=k']=\sum_{k=k'}P[D=k]\binom{k}{k'}(1-p)^{k'}p^{k-k'}$$

Distribuição original
(antes das falhas)

Momentos e Ponto Crítico

- Podemos então calcular os momentos de D' (distribuição do grau após falhas)

$$E[D'] = E[D](1-p)$$

$$E[D'^2] = E[D^2](1-p)^2 + E[D]\,p(1-p)$$

- Usando a condição, podemos determinar o ponto crítico, p_c

$$p_c = 1 - \frac{E[D]}{E[D^2] - E[D]}$$

Momentos da distribuição de grau original (pré-falhas)

- Valores menores mantém uma GCC

Grau Segundo Lei Potência

- Ponto crítico em redes cujo grau segue lei de potência

$$p_c = 1 - \frac{E[D]}{E[D^2] - E[D]}$$

- Lei de potência: $P[D=k] = C\,k^{-\alpha}$
- Para $\alpha < 3$, o que acontece?
- Momentos divergem! Logo, $p_c = 1$
- Não existe transição de fase!
- GCC nunca se desintegra (quando n tende infinito)
- Rede é altamente tolerante a falhas!

Grau Segundo Lei Potência

- Para $\alpha > 3$, o que acontece?
- Temos os dois momentos defindos
  - Dependem de α (exponente)
- Relação aproximada entre p_c e α
  - detalhes no artigo
- Intuição?
  - Maior α menor é o valor de p_c

Generalizando Análise

- Análise anterior para falhas aleatórias (uniforme)
- Generalização para falhas aleatórias em função do grau
- Generalização para falhas determinísticas
  - função do grau
- Análise do ponto crítico, do tamanho das componentes gigante, tamanho médio das outras componetes
- Análise via percolação e função geradora

Mais detalhes no artigo!