

# Redes Complexas

## Aula 13

### **Aula passada**

- Experimento de Milgram
- Modelo “Small World”
- Propriedades estruturais

### **Aula de hoje**

- Configuration Model
- Propriedades
- Stochastic Block Model
- Propriedades



# Configuration Model

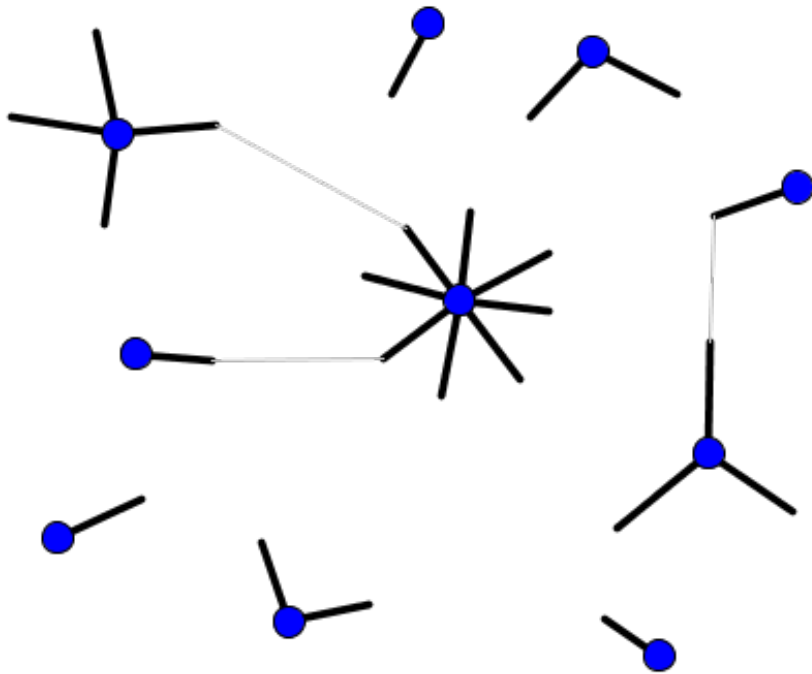
- Como construir modelo com determinada distribuição de grau?

**Graus como parâmetro do modelo!**

- Dado  $n$  vértices e uma sequência de graus:  $d_1, d_2, \dots, d_n$ 
  - soma de  $d_i$  deve ser par
- Criar cada nó com  $d_i$  pontas de arestas (stubs)
  - 1) Escolher duas pontas livres uniformemente
  - 2) Conectar as pontas. Voltar para (1)

# Configuration Model

- Exemplo com  $n=10$



- Escolher duas pontas e conectar!

- Múltiplas arestas e loops (auto-aresta) podem acontecer

- valor esperado é constante, fração vai a zero com  $n$  crescente

# Probabilidade de Aresta

- Qual probabilidade da aresta (i, j)?
- Grau de i, j é dado por  $d_i, d_j$

$$m = \sum_{i=1}^n d_i \quad \text{Soma dos graus}$$

- Cada stub de i tem chance  $d_j / (2m - 1)$  de ser incidente a j
- Como temos  $d_i$  stubs em i

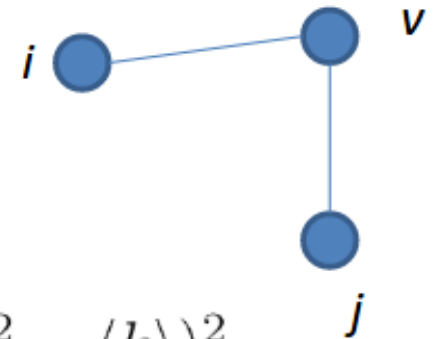
$$p_{ij} = \frac{d_i d_j}{2m - 1} \approx \frac{d_i d_j}{2m}$$

# Clusterização

- Probabilidade de restante de grau
  - seguir uma aresta ao acaso

$$q_k = \frac{(k+1) p_{k+1}}{\bar{d}} \quad q_k = \text{prob. de restante de grau ser } k$$

- Dado  $v$  conectado a dois vértices,  $i$  e  $j$
- Chance de fechar o triângulo?
- Condicionar no restante de grau!



$$C = \sum_{k_i, k_j=0}^{\infty} q_{k_i} q_{k_j} \frac{k_i k_j}{2m} = \frac{1}{2m} \left( \sum_{k=0}^{\infty} k q_k \right)^2 = \dots = \frac{1}{n} \frac{(\langle k \rangle^2 - \langle k \rangle)^2}{\langle k \rangle^3}$$

Obs:  $k_i$  é o restante de grau do vértice  $i$  na equação acima

# Componente Gigante

- GCC : componente conexa gigante
  - maior componente conexa tem  $\varepsilon n$  vértices, para algum  $\varepsilon > 0$ , a.a.s.
- Condição para termos uma GCC em um grafo aleatório qualquer em grafo aleatório

$$E[d_i | i-j] > 2, \text{ para todos vértices } i, j \text{ dentro da GCC}$$

- Condição pode ser reescrita em função do primeiro e segundo momento da distribuição de grau

$$E[d_i | i-j] > 2 \quad \longleftrightarrow \quad \kappa = \frac{E[d^2]}{E[d]} > 2$$

# Chung-Lu Model

- Variação do Configuration Model
  - preferida pelos matemáticos
- Vetor de pesos  $w_1, w_2, \dots, w_n$  associado aos vértices (possivelmente reais)
- Conectar cada par de vértices com probabilidade (permitindo loops)

$$P_{ij} = \frac{w_i w_j}{\sum_k w_k}$$

- valor esperado de grau do vértice  $i$ :  $\bar{d}_i = \sum_j P_{ij} = \sum_j \frac{w_i w_j}{\sum_k w_k} = w_i$
- $w_i$  é o grau esperado do vértice  $i$ , diferente do Configuration Model



# Modelos com Homofilia

- Como criar modelos com padrões de conexão distintos (ex. homofilia)?

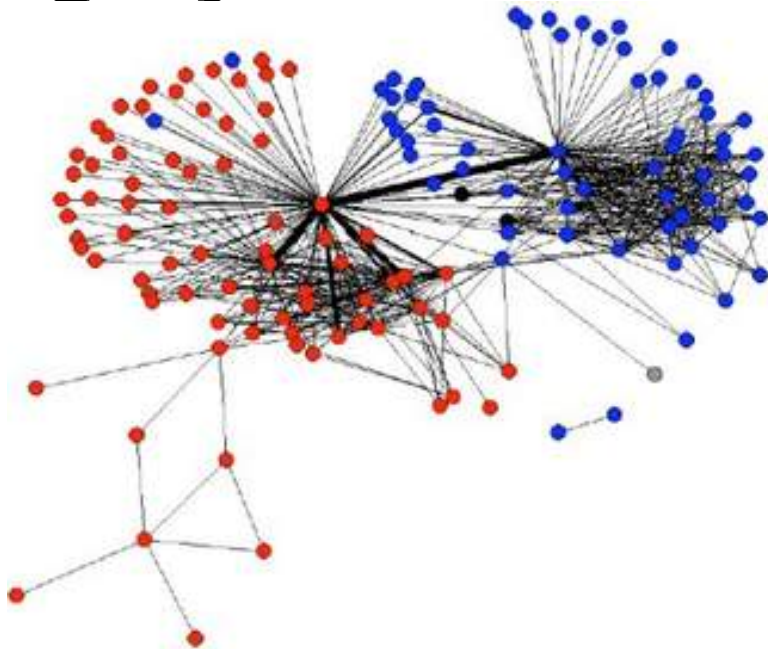
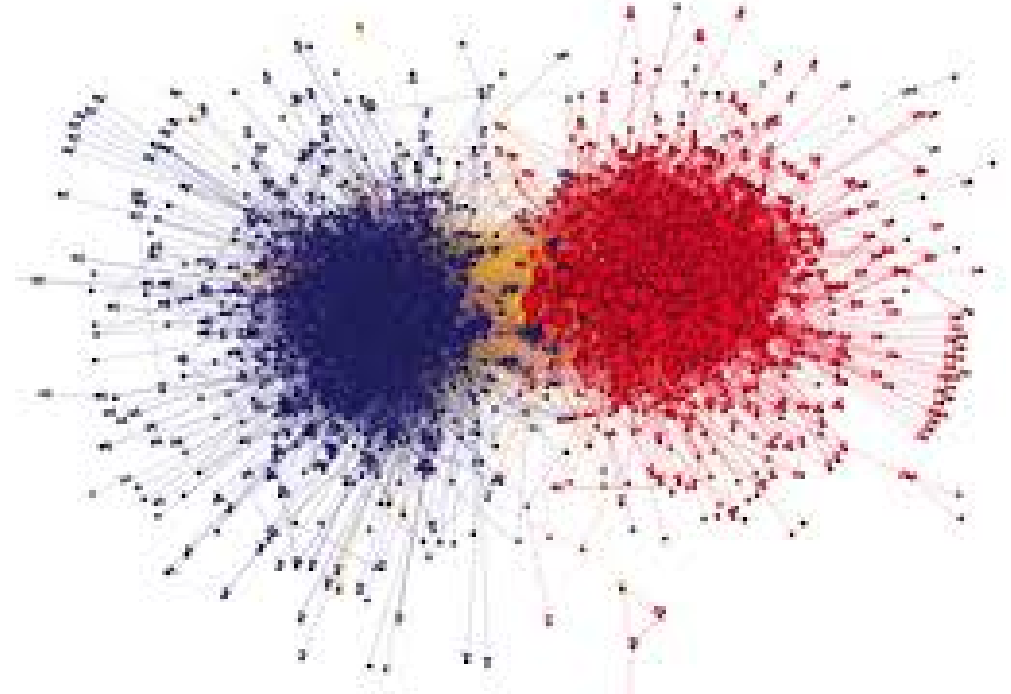


Figure 5: Strong ties in the candidate network

Políticos nos EUA (DEM x REP)



Blogs nos EUA (DEM x REP)

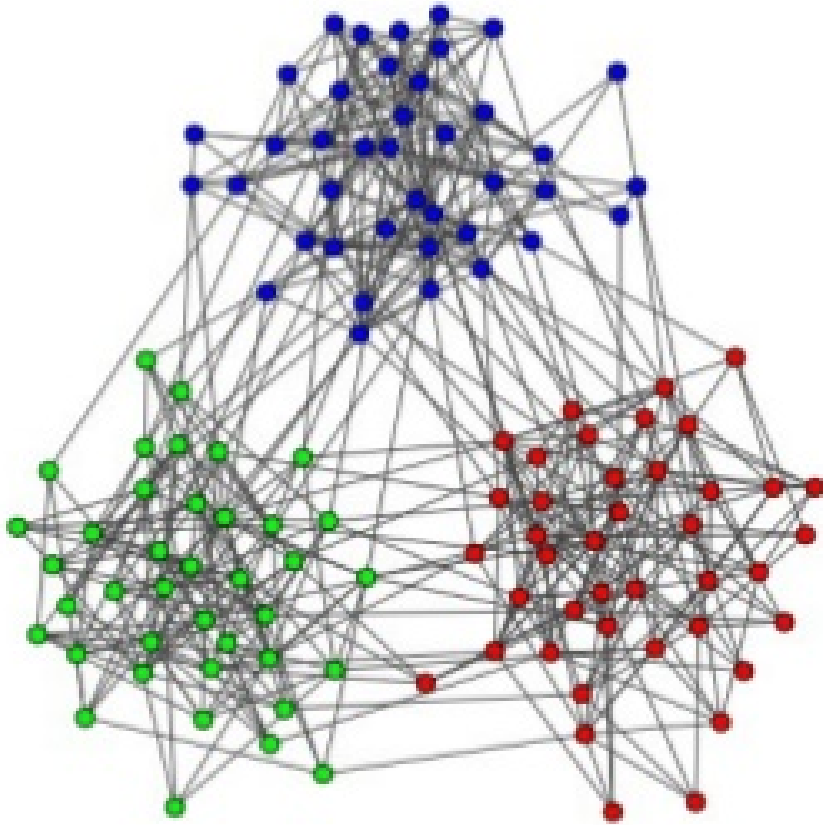
**Embutir padrões no modelo!**



# Stochastic Block Model (SBM)

- Generalização do  $G(n,p)$  para grupos
- Modela homofilia entre grupos (blocos)
  - proposto em 1983, em *Social Networks*
- $k$  blocos,  $V_i$  conjunto de vértices no bloco  $i$ ,  $n_i = |V_i|$ , tamanho do bloco  $i$
- $B$  = matriz (simétrica) de probabilidade de aresta entre vértices dos blocos
  - $b_{ij}$  = prob. de aresta  $(u,v)$ ,  $u$  em  $V_i$ ,  $v$  em  $V_j$
- Em geral,  $b_{ii}$  maior que  $b_{ij}$ ,  $j \neq i$ 
  - captura homofilia

# SBM Exemplo



- 3 blocos ( $k=3$ )
- $n_k = 40$  para todo  $k$

$$B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.2 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- Valor esperado do grau do vértice  $v$ ?
- Condicionar no bloco ( $v$  no bloco  $i$ )!

$$E[d_v | v \in V_i] = \sum_{j=1}^k n_j b_{ij}$$

# SBM

- Modelo canônico para redes com comunidades (grupos)
  - em geral,  $k=2$ ,  $n_k = n$
- Importante no estudo de algoritmos de detecção de comunidades
  - como saber que algoritmo detectou corretamente? Usar SBM para avaliar!