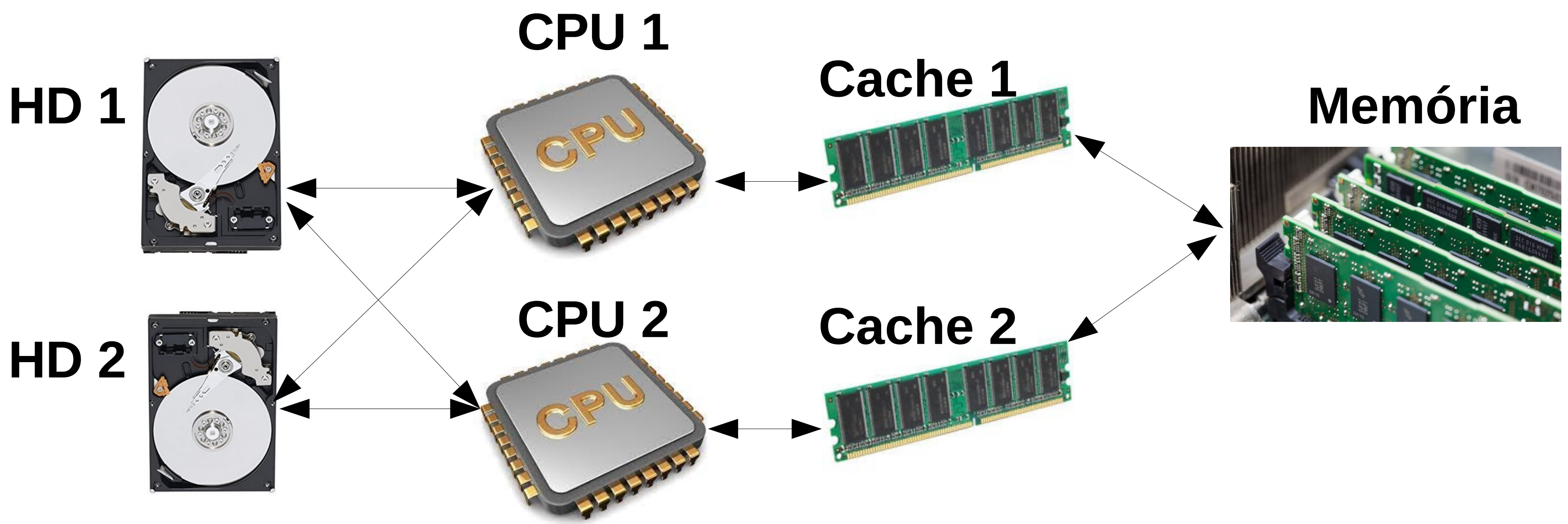
Aula 9

Roteiro

- Cadeias de Markov
- Definição e exemplos
- Modelo On-Off
- Sem memória
- Distribuição no tempo
- Irredutibilidade
- Aperiodicidade

Sistema Computacional

- CPUs, com respectivos caches, memória compartilhada, discos
  - um processo acessa um desses recursos a cada tempo

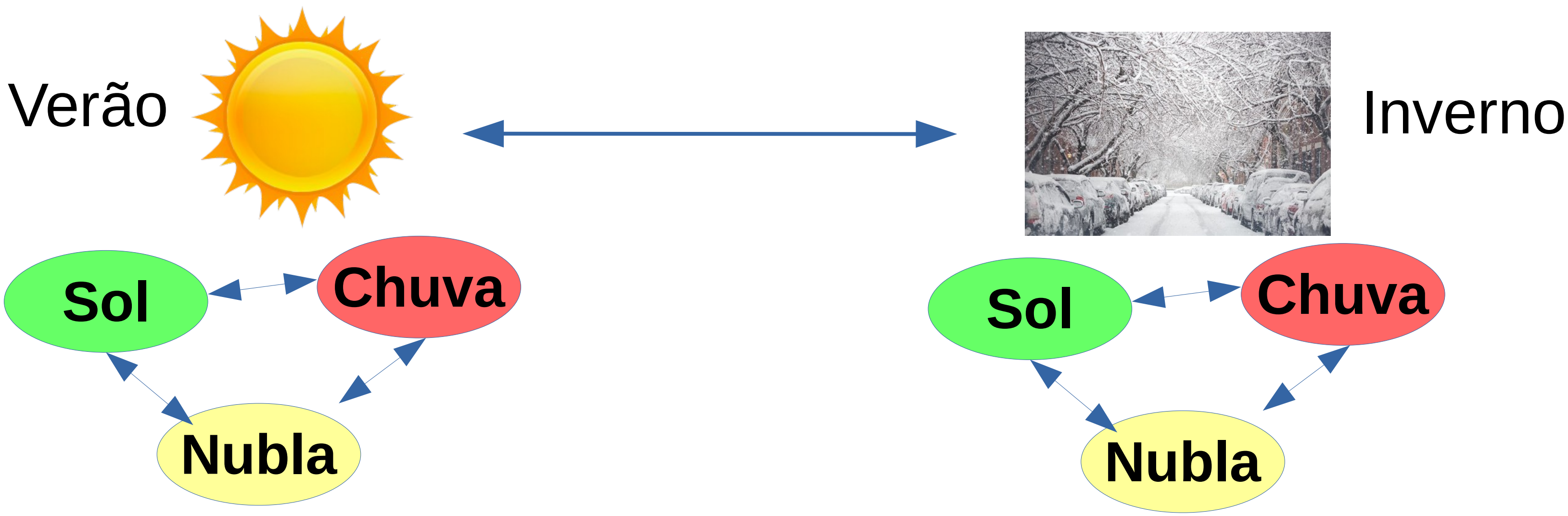


- Objetivo: avaliar e/ou melhorar desempenho
- Como representar a *dinâmica* deste sistema?

Modelo matemático!

Previsão do Tempo

- Estações do ano, tipos de dia diferentes



- Objetivo: avaliar e/ou prever os dias
- Como representar a *dinâmica* deste sistema?

Modelo matemático!

Figueiredo 2021

Cadeias de Markov

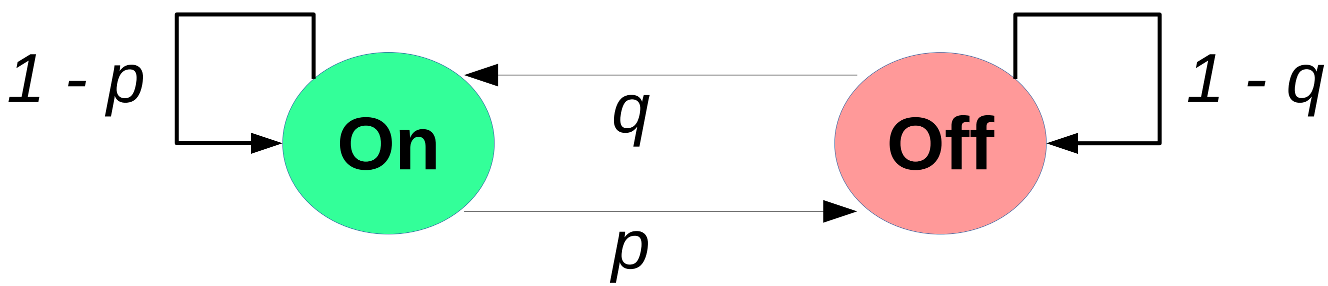
- Ferramenta de modelagem matemática
  - como equações diferenciais
- Representam dinâmica de sistemas com aleatoriedade
  - sequência de variáveis aleatórias dependentes
- Muito poderosa, na teoria e na prática
  - estudada e aplicada amplamente por matemáticos e engenheiros (e médicos, biólogos, etc)
  - pode codificar sistemas de grande complexidade
- Estudadas pelo matemático Andrey Markov (1906)
  - independência não é necessária para lei fraca dos grandes números

Cadeias de Markov

- **Espaço de estados:** todos os possíveis estados no qual um sistema pode se encontrar
  - possíveis valores que as v.a. podem assumir
  - finito ou infinito, contável ou não (interesse em finito)
- **Matriz de transição:** todas as possíveis transições de estado que o sistema pode fazer
  - transições são aleatórias, dependem do estado atual
- **Tempo discreto:** uma transição a cada passo de tempo
  - tempo contínuo também é possível
- **Estado inicial:** estado onde o sistema começa
  - pode ser escolhido de forma aleatória

Cadeias de Markov

- Representada por um grafo direcionado com pesos
  - vértices: estados do sistema
  - arestas: possíveis transições
  - pesos: probabilidade (soma dos pesos de saída igual a 1)
- Modelo On-Off
  - a mais simples e mais usada cadeia de Markov
  - dois estados: On e Off, todas possíveis transições



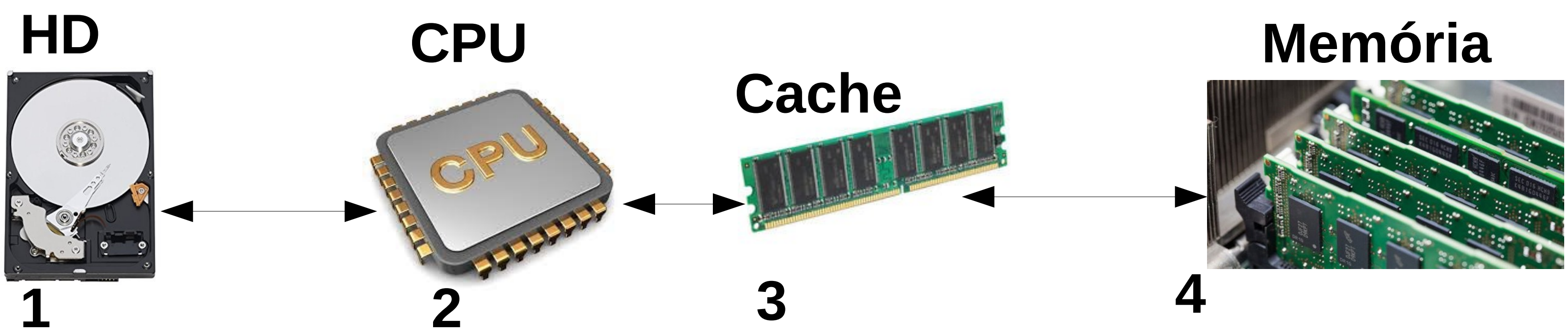
$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

Matriz de transição de estados.
P(*i*, *j*) = prob. de transição do estado *i* para estado *S*

Figueiredo 2021

Sistema Computacional

- Dinâmica de um processo (programa) no computador
- Estados: recurso sendo utilizado pelo processo
- Transições: definidas empiricamente (ou modelagem)
    - possíveis transições e valores de probabilidade



$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 \\ 0 & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ 0 & 0 & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}$$

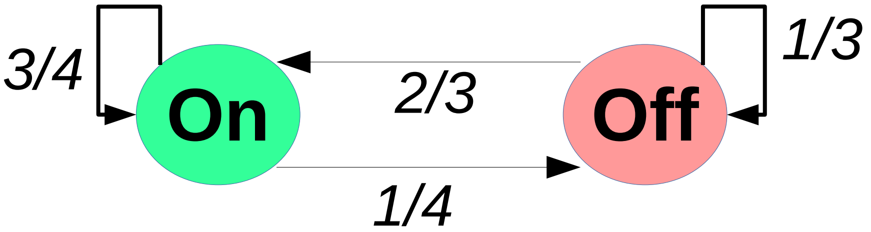
$$\sum_{j=1}^{4} p_{ij}=1$$, para todo *i*

- probabilidade de saída tem que somar 1

Figueiredo 2021

Definição Formal

- *S :* espaço de estados da CM
- *P* : matriz de transição de estados
- X_t : v.a. que determina o valor do estado do sistema no instante de tempo *t*, para *t* = 0,1,2,…
- Para cada *t*, X_t possui uma distribuição diferente
  - P[$X_t = s$] para todo *s* em *S*
- Exemplo: Modelo On-Off, p=1/4, q=2/3
  - $X_0 = 1$ (On) → $P[X_0 = 1] = 1$
  - $P[X_1 = 1] = 3/4$, $P[X_1 = 2] = 1/4$
  - $P[X_2 = 1] = 35/48$, $P[X_2 = 2] = 13/48$
  - $P[X_3 = 1] = ?$, $P[X_3 = 2] = ?$



Propriedade *Sem Memória*

- CM não tem memória (*memoryless property*)
  - próximo estado só depende do estado atual, e não de como chegamos ao estado atual
- Considere uma trajetória de estados pelo sistema
  - $X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots , X_{t-1} = s_{t-1}, X_t = s_t$
  - onde s_i é um estado qualquer em S
- Temos que

$$P[X_{t+1}=s | X_0=s_0, X_1=s_1, \ldots , X_t=s_t] = P[X_{t+1}=s | X_t=s_t]$$

$$= p_{st,s}$$

- Distribuição de X_{t+1} só depende de X_t, e não da trajetória
  - toda a evolução é função da matriz P

Distribuição Inicial

- CM começa em algum estado no tempo t = 0
  - escolha é de quem constrói a cadeia
- Estado inicial pode ser aleatório
  - P[X_0 = *s*] = $\pi_s(0)$, para todo *s* em *S*
  - tal que $\sum_{s \in S} \pi_s(0) = 1$
- Podemos começar em um único estado?
- Sim! $\pi_s(0)$ = 1 para um *s* qualquer
- No exemplo do Modelo On-Off

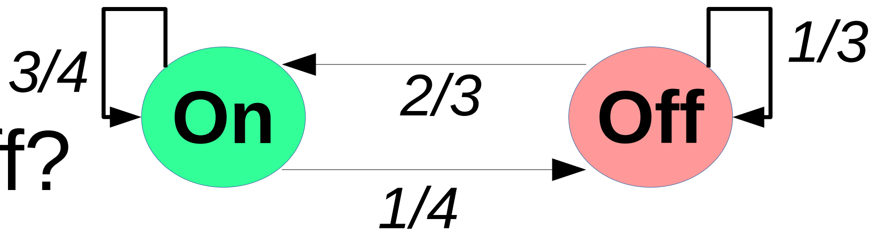
$$\pi(0) = (\pi_1(0) \quad \pi_2(0)) = (1 \quad 0) \longleftarrow$$ vetor de probabilidade inicial

Distribuição no Tempo *t*

- $\pi(t)$: vetor com distribuição de X_t (estado da CM)
- P [$X_t = s$] = $\pi_s(t)$: probabilidade do sistema "estar" no estado *s* no tempo *t*
- Em forma vetorial

$$\pi(t) = (\pi_1(t) \ \ \pi_2(t) \ \ \ldots \ \ \pi_n(t)) = (P[X_t = 1] \ \ \ldots \ \ P[X_t = n])$$

- Quanto vale $\pi(t)$?
- No exemplo do modelo On-Off?



  - $\pi_1(t) = 3/4 * \pi_1(t-1) + 2/3 * \pi_2(t-1)$
  - $\pi_2(t) = 1/4 * \pi_1(t-1) + 1/3 * \pi_2(t-1)$

Distribuição no Tempo *t*

- Generalizando a ideia anterior, temos o seguinte

$$\pi_i(t) = P[X_t = i] = \sum_j P[X_t = i | X_{t-1} = j] P[X_{t-1} = j]$$

Lei prob tota!l

$$= \sum_j P_{ji} \pi_j(t-1)$$

- De forma matricial (π é vetor linha), temos

$$\pi(t) = \pi(t-1) P = \pi(t-2) PP = \ldots = \pi(0) P^t$$

  - onde *P* é a matriz de transição de estados, e P^t é a multiplicação dela mesma *t* vezes
- **Boa notícia:** para encontrar a distribuição π(t) basta multiplicar pela matriz *P*
- **Má notícia:** multiplicação de matriz é $O(n^3)$

Comunicação entre Estados

- Veremos algumas propriedades importantes
- Considere dois estados s_i e s_j em S
- Dizemos que s_i se comunica com s_j , ou seja $s_i \rightarrow s_j$, sse existe algum $t > 0$ tal que

$$P[X_{t_0+t} = s_j | X_{t_0} = s_i] > 0$$

- Esta propriedade não depende de t_0, e a prob é dada simplesmente por $P^t[i, j]$
  - basta haver caminho de s_i para s_j no grafo direcionado
- Se $s_i \rightarrow s_j$ e $s_j \rightarrow s_i$ então dizemos que s_i e s_j se intercomunicam, ou seja $s_i \leftrightarrow s_j$

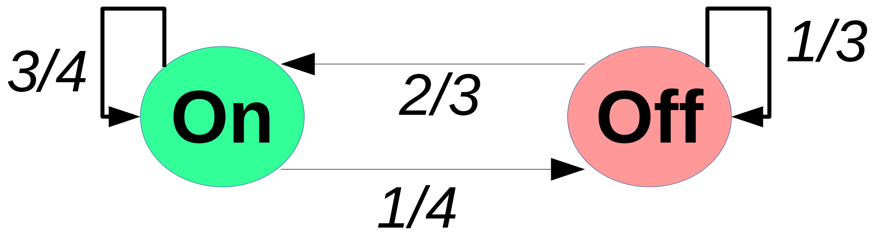
Irredutível

- Uma CM é dita irredutível (*irreducible*) se para todo par de estados s_i e s_j em S, temos que $s_i \leftrightarrow s_j$
    - caso contrário a CM é dita redutível (*reducible*)

- Considerando o grafo direcionado induzido pela matriz de transição P
    - se há caminho direcionado entre qualquer par de vértices, então CM é irredutível
    - grafo fortemente conexo = CM irredutível

Exemplos

- Exemplo do Modelo On-Off é irredutível?



Sim!

- CM definida por *P* abaixo é irredutível?

$$P = \begin{pmatrix} 0 & .2 & .8 & 0 \\ .6 & 0 & 0 & .4 \\ 0 & 0 & .9 & .1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Não!

Periodicidade

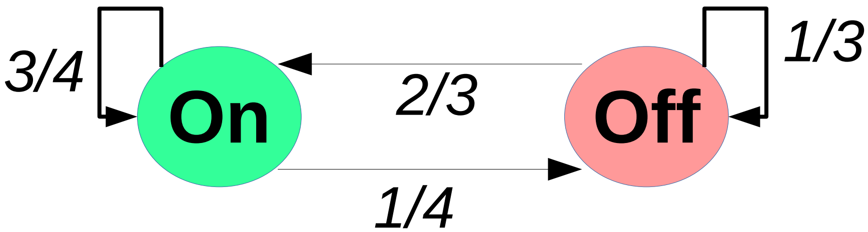
- Seja $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ um conjunto de inteiros
- $gcd(A)$ = maior divisor comum dos inteiros em A
  - ex. $A = \{9, 15, 30\} \rightarrow gcd(A) = 3$
  - ex. B = $\{4, 6, 3\} \rightarrow gcd(B) = 1$
- Seja s_i um estado da CM, e A_i o conjunto dos comprimentos de caminho que iniciam e terminam em s_i
  - $A_i = \{\ t : P^t[i, i] > 0\ \}$
  - prob. positiva de sair e voltar a s_i em t passos, possivelmente passando por s_i
- O período de s_i é dado por $d(s_i) = gcd(A_i)$

Aperiódica

- Seja s_i um estado da CM, e $d(s_i)$ seu período
- Dizemos que s_i é aperiódico sse $d(s_i) = 1$
  - caso contrário, s_i é dito periódico
- Intuitivamente, s_i é aperiódico se existe caminho de volta a s_i de todos os comprimentos maiores que um determinado valor
- Uma CM é dita aperiódica se todos os seus estados são aperiódicos
  - caso contrário, a CM é dita periódica

Exemplos

- Exemplo do Modelo On-Off é aperiódico?

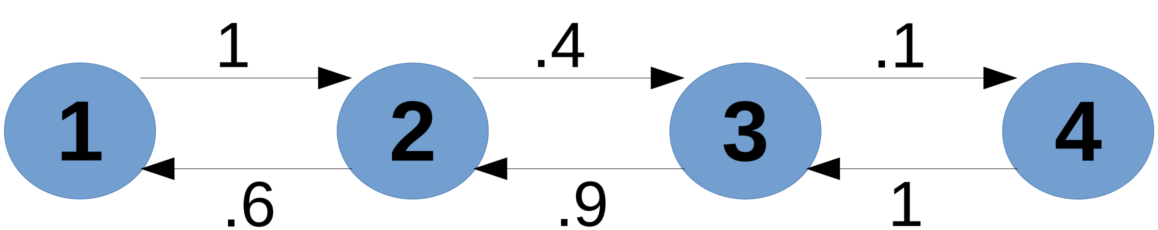


Sim!

- CM definida por *P* abaixo é aperiódica?

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ .6 & 0 & .4 & 0 \\ 0 & .9 & 0 & .1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Não!** Período de qualquer estado é 2
- Não consigo voltar ao estado 1 em tempo ímpar



Propriedade

- Considere uma CM irredutível, tal que existe s_i em S tal que $p_{ii} > 0$
  - CM tem ao menos um estado com aresta em *loop*
- Esta CM é aperiódica ou periódica?

Aperiódica!

- Podemos usar *loop* para gerar qualquer tempo de retorno grande o suficiente para qualquer estado!
- **Lema:** Em uma CM irredutível, todos os estados são aperiódicos ou todos são periódicos com o mesmo período!
  - basta caracterizar um estado para caracterizar a cadeia