Aula 6.1

Roteiro

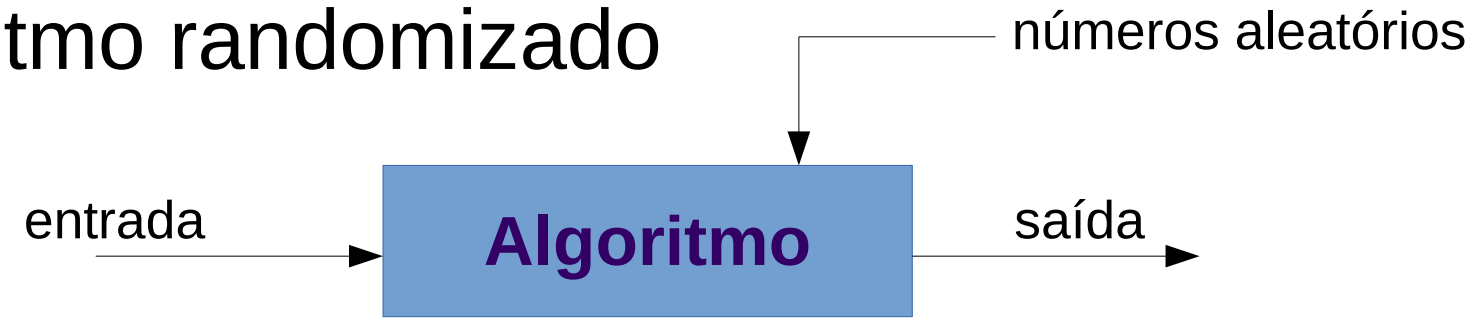
- Algoritmos randomizados
- Exemplos
- Algoritmo de Monte Carlo
- Algoritmos de Las Vegas
- Comparação
- Aplicações

Algoritmos Randomizados

- Algoritmo clássico (determinístico)

- Mostrar que algoritmo **sempre** gera saída correta em determinado tempo (complexidade)

- Algoritmo randomizado



- Mostrar que algoritmo geralmente gera saída correta em um tempo razoável
  - saída depende também dos números aleatórios

Exemplo 1

- Buscar por um elemento em um vetor
  - assumir V possui $x > 0$ elementos com valor s

```
busca_D(V,s)
  Para i=1,...,|V|
    Se V[i] == s
      Retorna i
  Retorna 0
```

- Resposta sempre correta, complexidade $\Theta(|V|)$

```
busca_A(V,s,n)
  Para i=1,...,n
    k = random(1,|V|)
    Se V[k] == s
      Retorna k
  Retorna 0
```

- Resposta errada com probabilidade $(1 - x/|V|)^n$, complexidade $\Theta(n)$
- Tempo de execução não depende de |V|

Exemplo 2

- Testar igualdade entre dois polinômios (nos inteiros)
  - $p(x) = (a_1 - x)(a_2 - x)...(a_d - x)$
  - $q(x) = b_d x^d + b_{d-1} x^{d-1} + \ldots + b_0 x^0$
- Algoritmo determinístico: expandir p(x), comparar constantes com q(x), complexidade $O(d^2)$

```
igualdade_A(r,n)
  Para i=1,...,n
    k = random(-r,r)
    Se p(k) != q(k)
      Retorna 0
  Retorna 1
```

- Se p != q então p(x) = q(x) se x é raiz de z(x) = p(x) – q(x)
- z(x) possui no máximo d raízes
- Resposta errada com probabilidade $(d/2r)^n$, complexidade $\Theta(n)$
- Probabilidade diminui com r e n (exponencialmente)

Algoritmo de Monte Carlo

- Algoritmo randomizado com complexidade (tempo de execução) que independe da aletoriedade
- Gera resposta errada com uma certa probabilidade (em geral, < ½)
- Não podemos determinar se resposta está correta
  - mas podemos executar várias vezes para reduzir probabilidade de erro (em geral, exponencialmente)
- Exemplos anteriores são algoritmos de Monte Carlo
- Algoritmos baseados em gerar amostras e calcular média amostral são algoritmos de Monte Carlo
  - média amostral possui precisão e erro

Voltando na Busca

- Outro tipo de algoritmo randomizado para o problema de busca em vetor
  - assumir V possui $x > 0$ elementos com valor s

```
busca_LV(V,s)
  Enquanto(1)
    k = random(1,|V|)
    Se V[k] == s
      Retorna k
```

- Sempre gera a resposta correta!
- Tempo de execução é aleatório, pior caso é infinito
- Analisar complexidade do caso médio
- Número de tentativas até sucesso ~ Geom(x/|V|)
- Valor esperado $\Theta(|V|/x)$

Quicksort com Aleatoriedade

- Algoritmo recursivo para ordenação de um vetor

```
QS(V)
    k = random(1,|V|)
    V1 = {elementos de V menores que V[k]}
    V2 = {elementos de V maiores que V[k]}
    V = QS(V1) . V[k] . QS(V2)
```

- Resposta sempre correta (ordenação)
- Tempo de execução é aleatório, pois depende das escolhas aleatórias
  - caso médio $\Theta(|V| \log |V|)$, pior caso $\Theta(|V|^2)$
- Com alta probabilidade, tempo de execução será próximo do caso médio

Algoritmos de Las Vegas

- Algoritmo randomizado que sempre gera a resposta correta
  - ou pode dizer que a resposta correta não foi encontrada
- Tempo de execução do algoritmo é aleatório
  - pior caso é infinito, mas podemos impor tempo máximo
- Calcular tempo médio de execução, e probabilidade do algoritmo parar próximo ao tempo médio
- Exemplo de busca e Quicksort são algoritmos Las Vegas
- Termo *Las Vegas* sugerido por László Babai (1979) para diferenciar da ideia de Monte Carlo

Monte Carlo x Las Vegas

	Tempo de Execução	**Corretude**
Monte Carlo	Determinado a priori (fixo). Não depende das escolhas aleatórias do algoritmo	Gera resposta errada com alguma probabilidade; análise da probabilidade de erro
Las Vegas	Depende das escolhas aleatórias do algoritmo; análise do tempo médio de execução	Sempre gera resposta correta (ou diz que resposta correta não foi encontrada)

- Teoria da computação (algoritmos) prefere algoritmos de Las Vegas
  - dar resposta correta é mais importante
- Engenharia prefere algoritmos de Monte Carlo
  - erro é tolerável, tempo de execução é importante

Monte Carlo == Las Vegas ?

- Convertendo entre os tipos de algoritmos
- Algoritmo de Las Vegas → Algoritmo de Monte Carlo
  - fixar limite de tempo de execução, gerar resposta aleatória ao final do limite
  - prob. de erro pode ser calculada a partir da prob. do tempo exceder o limite
- Algoritmo de Monte Carlo → Algoritmo de Las Vegas
  - ao final da execução, outro algoritmo determinístico avalia se resposta está correta
  - em geral, tal algoritmo não está disponível (ou não é eficiente, computacionalmente)
- Las Vegas → Monte Carlo, mas não o contrário

Algoritmos Randomizados

- Aplicação de Monte Carlo e Las Vegas em diferentes temas e problemas
- Estrutura de dados: árvores de buscas, tabelas *hash*
- Algoritmos em grafos: MST, caminhos mais curto, corte mínimo
- Contagem e enumeração: contagem de estruturas combinatoriais
- Algoritmos distribuídos: consenso, eleição de líder
- Computação quântica: todos os algoritmos são randomizados!

Importante Área da Computação
(na teoria e na prática)