Aula 5

Roteiro

- Lei dos grandes números (fraca e forte)
- Erro e confiança
- Margem de erro
- Falácia do apostador

Fração Relativa de Resultados

- Jogar um dado honesto *n* vezes
- X_i : resultado da *i*-ésima jogada
- $Y_i = \mathrm{I}(X_i = 1)$: indicadora que resultado é número 1
- $N_1(n)$: número de vezes que resultado é 1
- $F_1(n)$: fração de vezes que resultado é 1

$$N_1(n) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad\qquad F_1(n) = \frac{N_1(n)}{n}$$

- Quanto vale $F_1(10)$, $F_1(100)$, $F_1(1000)$ = ?

$F_1(n)$ é aleatório!

Lei dos Grandes Números

- $F_1(n)$ converge quando n → infinito
- Frequência relativa converge para a probabilidade do evento

Conexão da teoria com a prática!

- Resultado fundamental em probabilidade e estatística
- Atribui significado físico a um conceito abstrato
  - a fração de resultados aleatórios quando muitos, convergem (lei dos “muitos” números)
  - probabilidade como algo prático

Média Amostral

- Seja X_i uma sequência de v.a. iid, tal que
  - $\mu = E[X_i]$, $\sigma^2 = Var[X_i]$
- Seja $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ← média amostral (média aritmética dos *n* valores)

- M_n é uma v.a. Qual seu valor esperado, variância?

$$E[M_n] = \frac{1}{n} E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

$$Var[M_n] = \frac{1}{n^2} Var[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Lei Fraca dos Grandes Núm.

- M_n possui mesmo valor esperado que X_i e variância que vai a zero com n

$$E[M_n] = \mu \qquad Var[M_n] = \frac{\sigma^2}{n}$$

- Lei fraca dos grandes números
  - se μ finito, para qualquer ε > 0, temos

$$\lim_{n \to \infty} P[|M_n - \mu| < \epsilon] = 1$$

- Chamado de “convergência em probabilidade”
- Probabilidade de M_n estar ε de distância da média vai a 1, para qualquer ε positivo (ex. $\varepsilon = 10^{-10}$)

Provando a Lei

- Prova assumindo que σ^2 é finito
- Para qualquer $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \to \infty} P[|M_n - \mu| < \epsilon] = 1$

$$E[M_n] = \mu_{M_n} = \mu \quad Var[M_n] = \sigma_{M_n}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

- Lembrando desigualdade de Chebyshev

$$P[|M_n - \mu_{M_n}| \geq k\sigma_{M_n}] \leq \frac{1}{k^2}$$

- Aplicando, temos

$$k\sigma_{M_n} = \epsilon \rightarrow k = \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}$$

Provando a Lei

- Usando a probabilidade complementar

$$P[|M_n-\mu|<\epsilon]=1-P[|M_n-\mu|>\epsilon]$$

- Usando Chebyshev

$$P[|M_n-\mu|\geq k\,\sigma_{M_n}]\leq\frac{1}{k^2}=\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n}$$

- Substituindo acima, temos

$$P[|M_n-\mu|<\epsilon]=1-P[|M_n-\mu|>\epsilon]\geq 1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n}$$

- Cujo limite vai a 1 com n → infinito

Lei Forte dos Grandes Núm.

- M_n possui mesmo valor esperado que X_i e variância que vai a zero com n

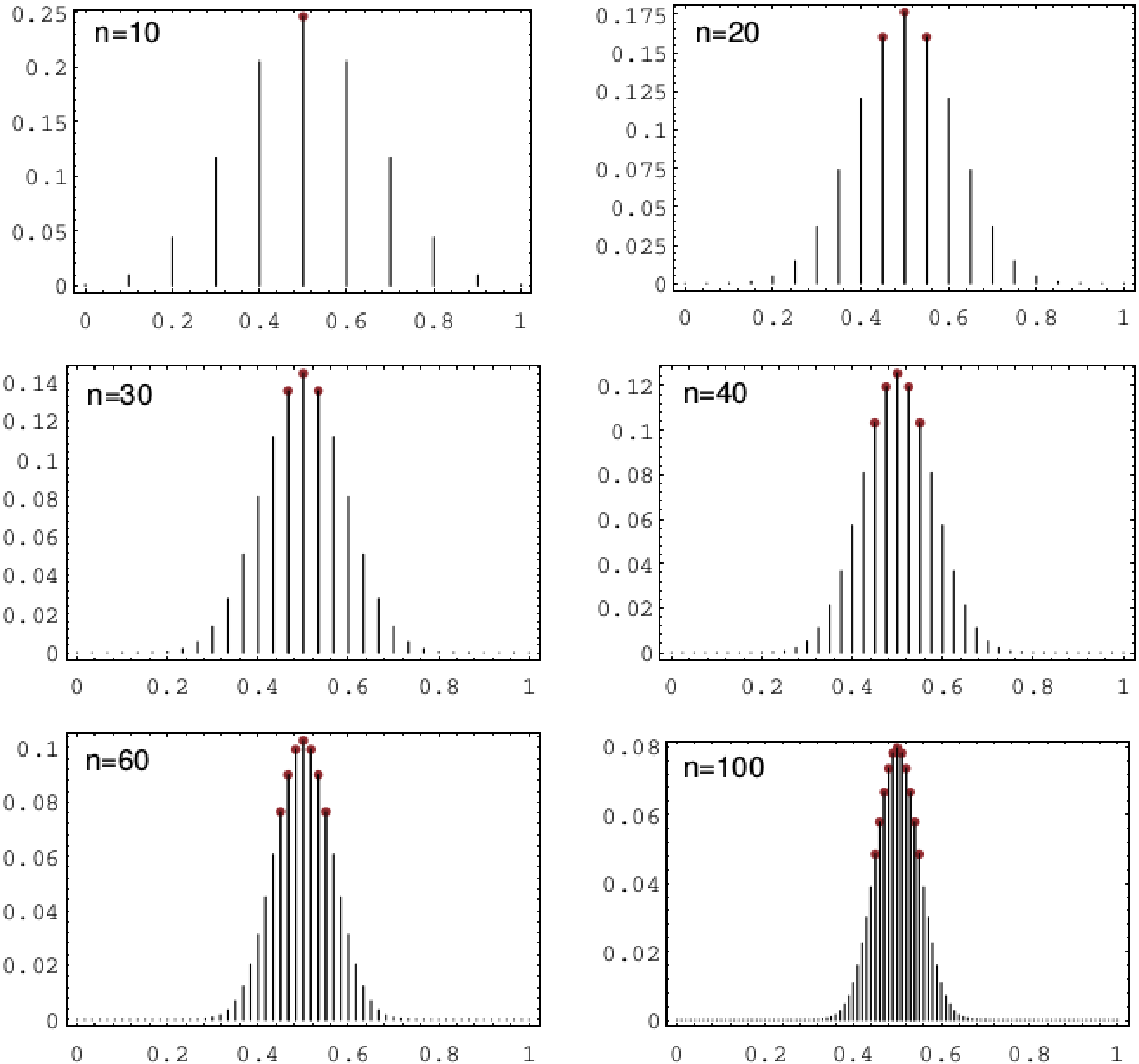
$$E[M_n]=\mu \qquad Var[M_n]=\frac{\sigma^2}{n}$$

- Para μ, σ^2 finitos, temos

$$P[\lim_{n\to\infty} M_n=\mu]=1$$

- Chamado de “convergência quase certamente” (*almost surely*)
- Resultado bem mais forte (não temos ε)
  - M_n de fato converge para sua média!

Exemplo



- Moeda honesta, fração de caras

$$E[M_n] = \frac{1}{2}$$

$$Var[M_n] = \frac{1}{4n}$$

- Conforme n aumenta, M_n fica mais centrada!

Figueiredo 2021

Erro e Confiança

- Podemos usar Chebyshev para calcular precisão e confiança da lei dos grande números
- Seja precisão ε, confiança β

$$P[M_n \in [\mu - \epsilon, \mu + \epsilon]] > \beta$$

- Dado precisão ε, confiança β (além de μ e σ^2), determinar valor de *n* para garantir esta relação

Erro e Confiança

- Lembrando

$$P\left[\left|M_n-\mu\right| < \epsilon\right] \geq 1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n} \longrightarrow 1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n}=\beta$$

- Resolvendo para *n*, temos

$$n=\frac{\sigma^2}{\epsilon^2(1-\beta)}$$

- Confiança: influencia *n* linearmente
- Precisão: influencia *n* de forma quadrática
- Implicações importantes
  - aumentar a precisão (reduzir ε) demanda mais do que aumentar a confiança (aumentar β)

Exemplo

- Suponha uma moeda enviesada, com probabilidade de cara sendo 45%
- Você quer testar se moeda é mesmo enviesada Quantas vezes lançar a moeda?
- Supor $\varepsilon = 0.01$ e $\beta = 0.95$
- Temos $\mu = 0.45$, $\sigma^2 = 0.45*0.55$

$$P[M_n \in [0.44, 0.46]] > 1 - \frac{(0.45*0.55)}{(0.01)^2 n} = 0.95$$

- Logo, $n = 49500$

Estimando Margem de Erro

- Pesquisa com 1000 cariocas revelou que entre praia e cachoeira, 70% preferem praia
- Qual a margem de erro da pesquisa com 90% de confiança?
- Modelar cada pessoa com uma Bernoulli, $X_i = 1$ se a pessoa prefere praia
- Supor $p = \mu = 0.7$ (resultado da pesquisa), e então $\sigma^2 = 0.7*0.3 = 0.21$
- Calcular ε dado $n = 1000$ e $\beta = 0.9$

$$P\left[\left|M_n - \mu\right| < \epsilon\right] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n} \longrightarrow \epsilon^2 = \frac{\sigma^2}{n(1-\beta)}$$

- Logo, $\varepsilon = 0.046 = 4.6\%$

Falácia do Apostador

- Se um evento ocorre mais frequentemente que o esperado no passado então ele vai ter menos chances de ocorrer no futuro (ou vice-versa)
  - falácia comum em cassinos e jogos
- Ex. jogo de roleta sai vermelho 10 vezes seguidas, então a chance de sair vermelho na próxima vez é menor
- Seja X_i indicadora da cor vermelha na *i*-ésima rodada
  - Assumindo sequência iid, temos

$$P[X_{11}=1 | X_1=1 \wedge \ldots \wedge X_{10}=1] = P[X_{11}=1]$$

- Passado não influencia aletoriedade do futuro, pois já foi observado e é independente
  - nem na teoria (assumindo iid), nem na prática (assumindo condições para iid)

Falácia e Lei

- Lei dos Grandes Números não torna a falácia verdadeira?

Não! São afirmações diferentes

- Lei diz que fração relativa das observações converge para sua respectiva probabilidade
- Falácia diz que observações passadas influenciam a probabilidade de observações futuras
- Fonte de muita confusão e discussão, ao menos desde Laplace no final do século XVIII
  - falácia é indicativo da dificuldade de compreender aletoriedade e independência