Grafos – Aula 9

Roteiro

- Corretude de Dijkstra
- Fila de prioridades e Heap
- Complexidade de Dijkstra
- Tempo de execução

Algoritmo de Dijkstra

- **Ideias**
  - Manter dois conjuntos de vértices (explorado e não-explorado)
  - Manter comprimento do menor caminho conhecido até o momento para cada vértice
  - Avaliar vértice de menor caminho (para o conjunto explorado)
  - Atualizar distâncias
- Como tornar a ideia em algoritmo?

Algoritmo de Dijkstra

```
1. Dijkstra(G, s)
2.    Para cada vértice v
3.      dist[v] = infinito
4.    Define conjunto S = 0 // inicia vazio
5.    dist[s] = 0
6.    Enquanto S != V
7.       Selecione u em V-S, tal que dist[u] é mínima
8.       Adicione u em S
9.       Para cada vizinho v de u faça
10.        Se dist[v] > dist[u] + w(u,v) então
11.           dist[v] = dist[u] + w(u,v)
12.Retorna dist[]
```

- S = conjunto explorado
- V-S = conjunto não-explorado (V = conjunto de vértices)
- dist[v] = comprimento do menor caminho conhecido pelo algoritmo de s até v (inicialmente, é infinito)
- w(u,v) = peso da aresta (u,v)

Corretude do Algoritmo

- Provar que algoritmo sempre produz resultado correto
  - calcula a distância de s a qualquer outro vértice

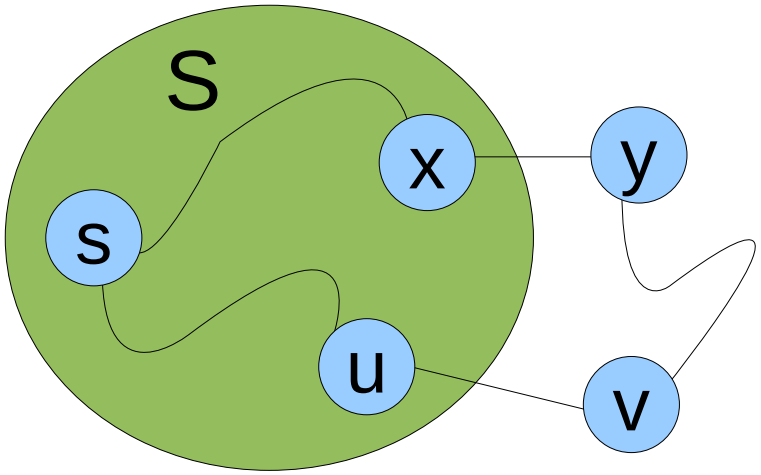
Teorema

- Considere um vértice *u* pertencente ao conjunto *S* em qualquer instante do algoritmo. Temos que “dist[u]” é a distância entre *s* e *u*.

Prova (1/3)

- Prova por indução no tamanho de S
- Caso base: |S| = 1
  - S = {s}, dist[s] = 0, devido inicialização
- Hipótese: |S| = k
  - para |S| = k, assuma que dist[u] é igual a distância entre *s* e *u*
- Caso geral: |S| = k + 1
  - k+1 adiciona *v* à S, dando origem a P_v
  - temos que mostrar que P_v é mínimo

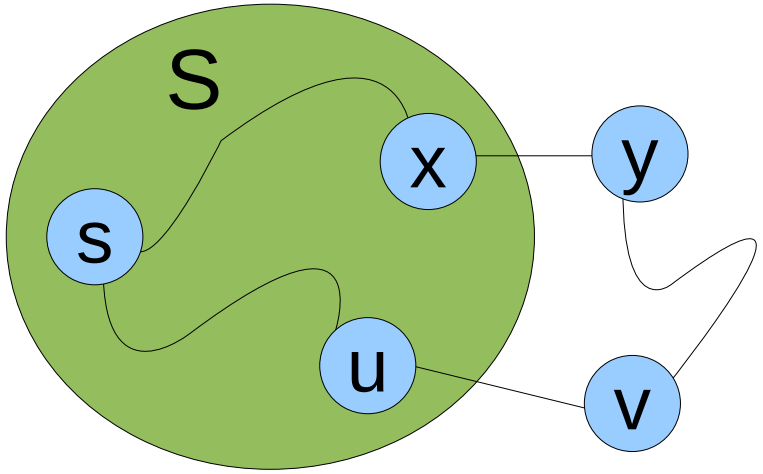
Prova (2/3)



- v é o novo vértice, do passo k+1
- seja (u,v) última aresta no caminho P_v
- pela hipótese, P_u é caminho mínimo s-u

- Considere outro caminho s-v, P, que não passa por u
- Precisamos provar que P é maior (ou igual) a P_v
- P passa pela aresta (x,y), com x em S e y fora de S (para algum x e y qualquer)

Prova (3/3)



- No passo k+1, algoritmo escolhe *v* para adicionar a S (e não *y*)
- Então, caminho s—y é maior ou igual a P_v

- Como dist(y,v) >=0, caminho P será maior ou igual a P_v
- Logo, P_v é caminho mínimo e dist[v] será distância até v
  - dist[v] não é alterada pelo algoritmo após vértice entrar no conjunto *S*

Complexidade

```
1. Dijkstra(G, s)
2.    Para cada vértice v
3.      dist[v] = infinito
4.    Define conjunto S = 0 // inicia vazio
5.    dist[s] = 0
6.    Enquanto S != V
7.       Selecione u em V-S, tal que dist[u] é mínima
8.       Adicione u em S
9.       Para cada vizinho v de u faça
10.        Se dist[v] > dist[u] + w(u,v) então
11.           dist[v] = dist[u] + w(u,v)
12.Retorna dist[]
```

- Percorre todas arestas do grafo (linha 6 + linha 9)
- Depende do tempo para escolher u (linha 7)

Complexidade

- Algoritmo simples
  - Percorre vértices e encontra dist[u] mínimo
  - Complexidade do algoritmo: $O(n^2)$

Outra ideia?

- Fila de prioridades
  - Chave: distâncias, conteúdo: id do vértice
  - Extrair o mínimo (vértice com menor distância)
  - Atualizar chaves (distâncias)

Fila de Prioridade

- Estrutura de dados poderosa *(priority queue)*
- Mantém um conjunto de elementos S
- Cada elemento possui uma chave (número de prioridade)
- Permite inserir, remover e modificar elementos de S através da chave
- Complexidade de *pior caso* para remoção, inserção e modificação: O(log n)
  - caso médio para algumas operações pode ser O(1), dependendo da implementação (ex. *Fibonacci Heap*)

Heap

Heap: Implementação de fila de prioridade

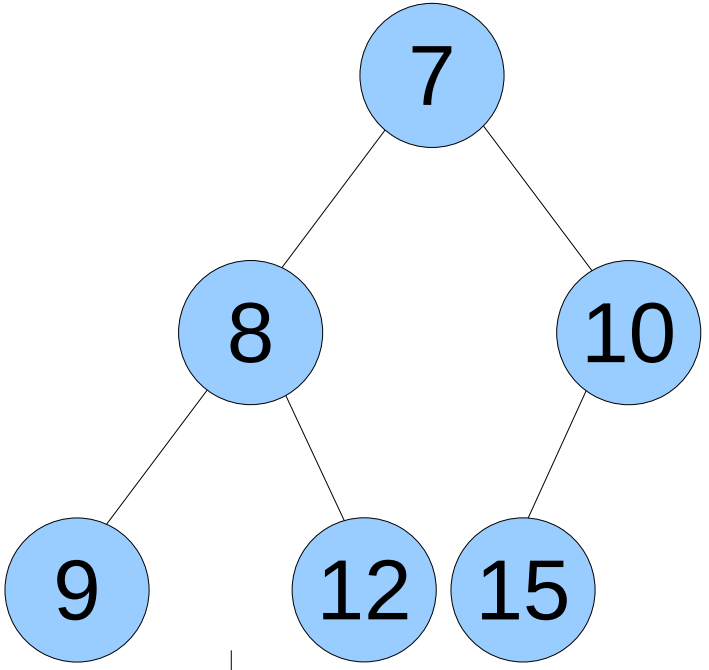
- Estrutura de dados em forma de árvore
- Armazena conjunto de elementos, todos associados a uma chave
- Chave dos elementos define a árvore
- *Heap order*

  1) Min-heap: chave(u) <= chave(v), quando u é pai de v (usado para remover menor chave primeiro)

  2) Max-heap: chave(u) >= chave(v), quando u é pai de v (usado para remover maior chave primeiro)

Heap Binário

- Estrutura organizada em uma árvore binária cheia
  - fácil implementação
- Operações básicas
  - adicionar, remover, atualizar chave
- Não serve para fazer busca (não está ordenada)



Max-heap ou Min-heap? (valor mostrado é a prioridade)

Saindo da raiz, como chegar na chave 12?

Inserção e Remoção

Inserção

- 1) adicionar elemento na última posição da árvore
- 2) trocar posição com pai até garantir *heap-order* (subir)

Remoção

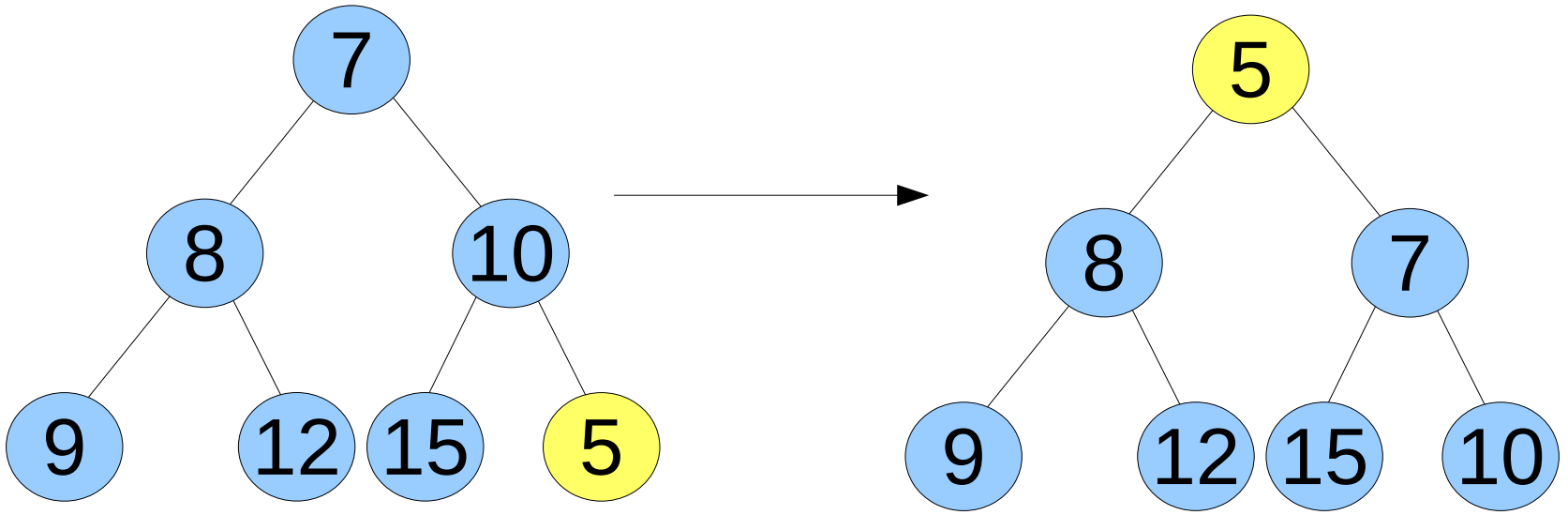
- 1) remover raiz e mover último elemento para raiz
- 2) trocar de posição com menor filho até garantir *heap-order* (descer)

Atualização

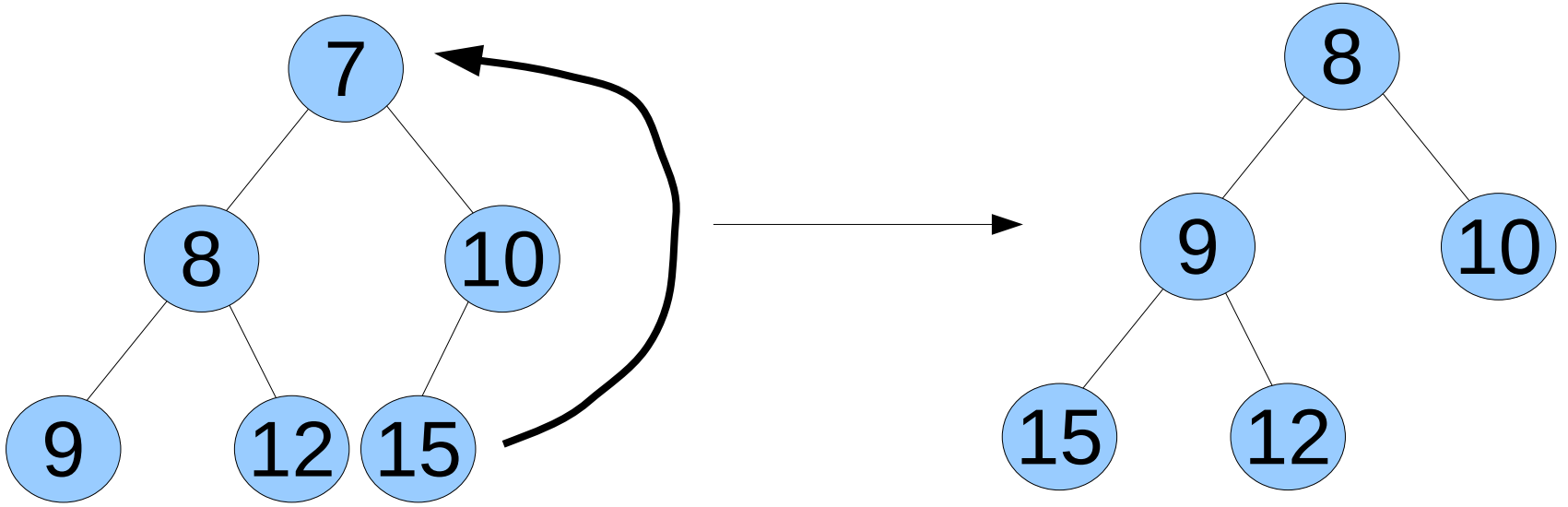
- Chave muda de valor acessando diretamente o elemento
- Subir ou descer, de acordo até garantir *heap-order*

Exemplos

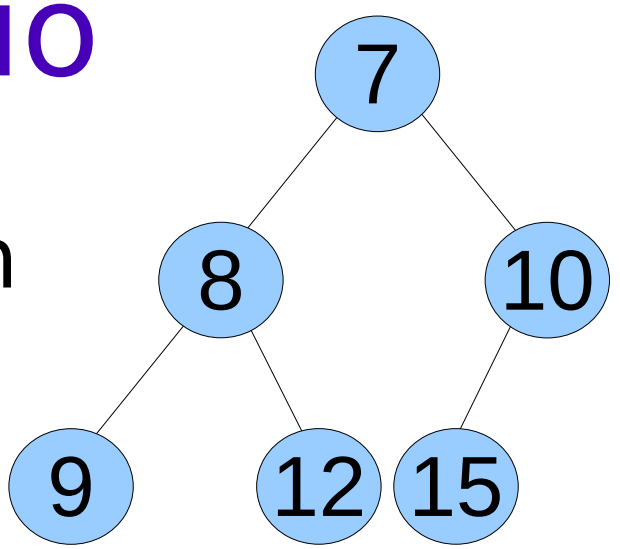
- Adicionar chave 5



- Remover raiz



Heap Binário



- Considere heap binário com n elementos
- Altura da árvore: $\log_2 n$
- Complexidade das operações de inserção, remoção e atualização?
- Subir ou descer na árvore
  - pior caso percorre todos os níveis, $\log_2 n$
- Complexidade: O(log n)
- Pode ser implementado com um vetor!

Dijkstra com Heap

- Armazenar dist[v] também em um heap
  - chave é distância, conteúdo é id do vértice
- Heap tem n elementos
- Operações no heap

```
1. Dijkstra(G, s)
2.    Para cada vértice v
3.      dist[v] = infinito
4.    Define conjunto S = 0 // inicia vazio
5.    dist[s] = 0
6.    Enquanto S != V
7.       Selecione u em V-S, tal que dist[u] é mínima
8.       Adicione u em S
9.       Para cada vizinho v de u faça
10.        Se dist[v] > dist[u] + w(u,v) então
11.           dist[v] = dist[u] + w(u,v)
12.Retorna dist[]
```

inserção

remoção

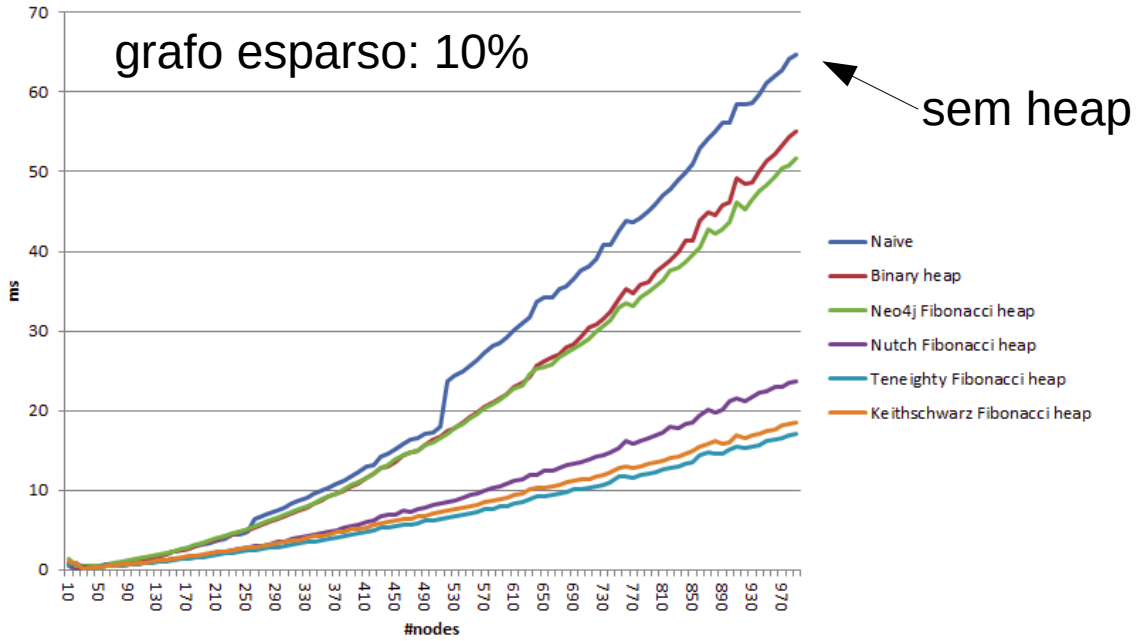
atualização

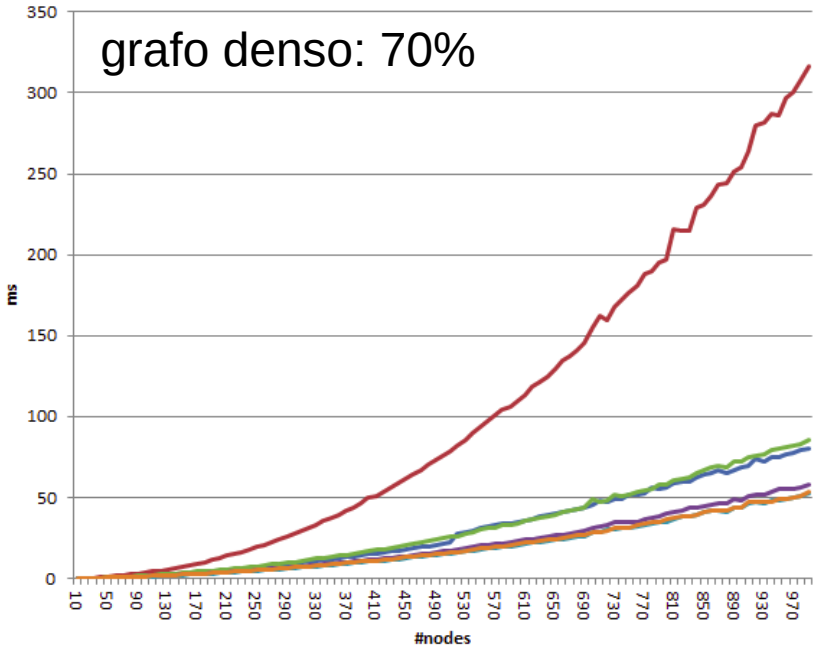
Complexidade

- Total de operações no heap
  - n operações de inserção e remoção
  - m operações de atualização, no pior caso considerando que cada aresta gera uma atualização
- Cada operação tem custo log n
- Complexidade: O((n+m)log n)
  - que é igual a O(m log n), se grafo for conexo
  - se m ~ n^2 temos O(n^2 log n): pior que sem o heap!
- Vantagem para grafos esparsos, m << n^2

Tempo de Execução

- Diferentes implementações do heap





- Diferentes implementações do heap
- “Naive” (sem heap) é o pior no grafo esparso
- “Binary heap” é pior que “Naive” no grafo denso
  - mas outros heaps são melhores que “Naive”

“Experimenting with Dijkstra’s algorithm”, por Gabor Makrai, 2015
https://gabormakrai.wordpress.com/2015/02/11/experimenting-with-dijkstras-algorithm/