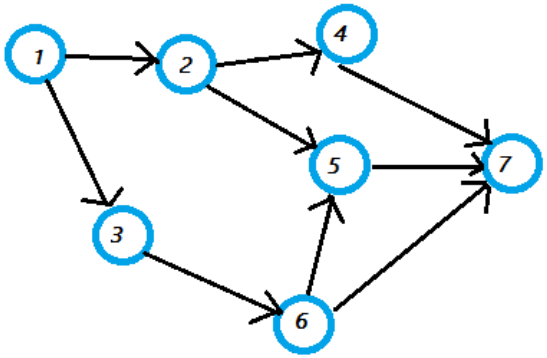
Grafos – Aula 7

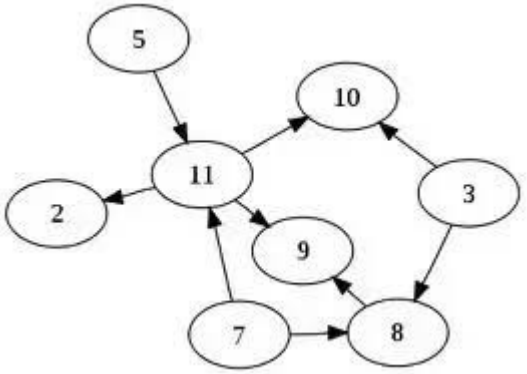
Roteiro

- DAG
- Executando tarefas
- Ordenação topológica
- Algoritmo e melhorias

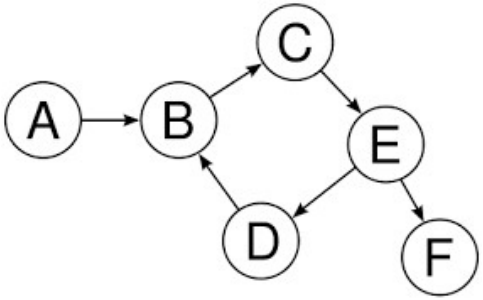
DAG

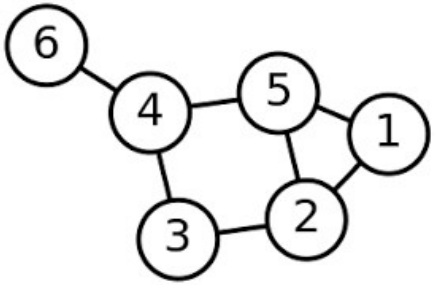
- Grafo direcionado acíclico
  - Directed Acyclic Graph = DAG
  - importante classe de grafos
- Exemplos





São DAGs





Não são DAGs

- Toda árvore direcionada é um DAG
- Todo DAG possui ao menos um vértice com grau de entrada zero

Executando Tarefas

- **N** tarefas precisam ser executadas
- Tarefas são dependentes
  - Tarefas tem “pré-requisitos” (como sua grade curricular)

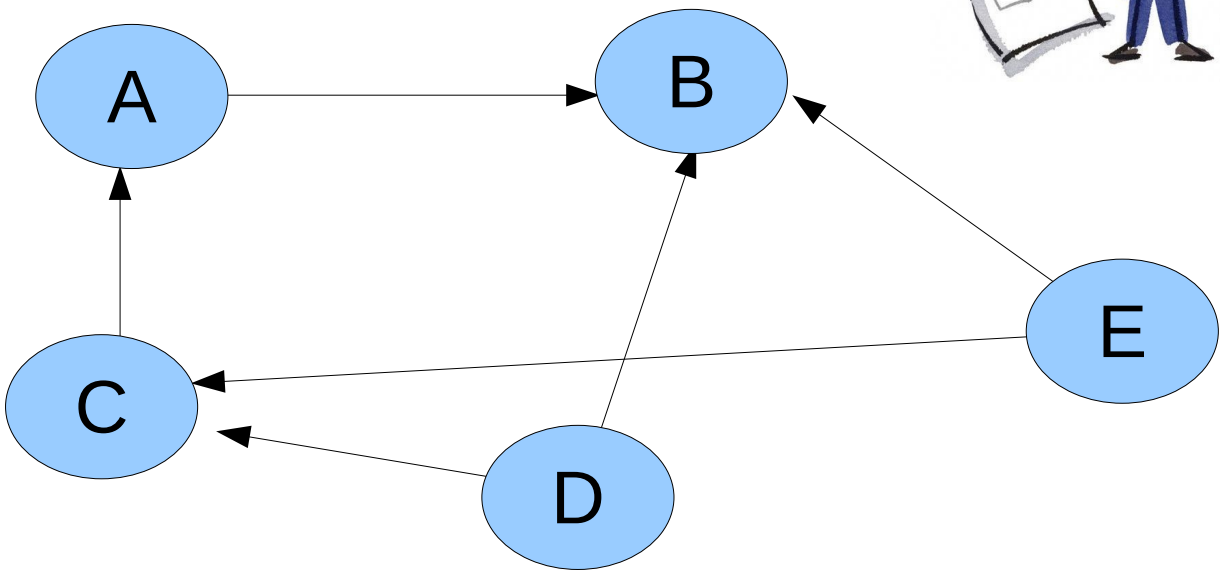
- **Problema:** Qual ordem de execução não viola as dependências?

Modelar problema utilizando grafos direcionados

Executando Tarefas

- Exemplo com 5 tarefas

B depende de A
A depende de C
C depende de D
B depende de E
B depende de D
C depende de E



- Qual é a ordem de execução?

Tarefas e DAG

- Grafo de dependência é direcionado
- Tarefas podem ser executadas somente se grafo de dependência não possui ciclos
  - grafo de dependência precisar ser um DAG!

- Dado um DAG, como determinar a ordem de execução das tarefas?

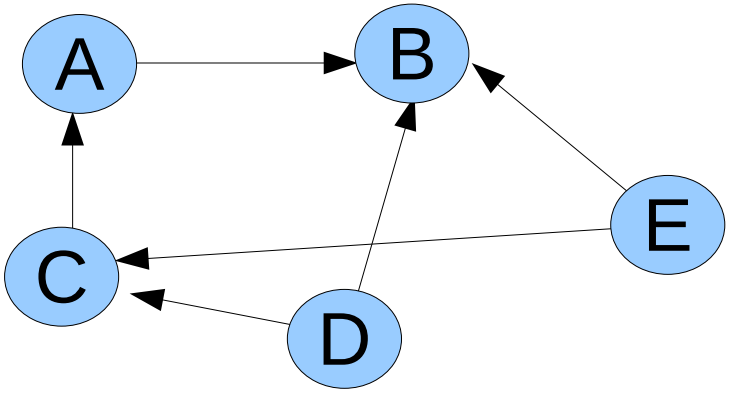
Algoritmo (eficiente)!

Ordenação Topológica

- Ordenação dos vértices de forma que arestas “apontam” sempre para frente
- Dado grafo direcionado G
- Ordenação dos vértices de G: v_1, v_2, ..., v_n, tal que para toda aresta (v_i, v_j) temos que i < j
  - v_i corresponde a um vértice do grafo, para i = 1, 2, ..., n
  - toda aresta do grafo é mapeada para algum (v_i, v_j)

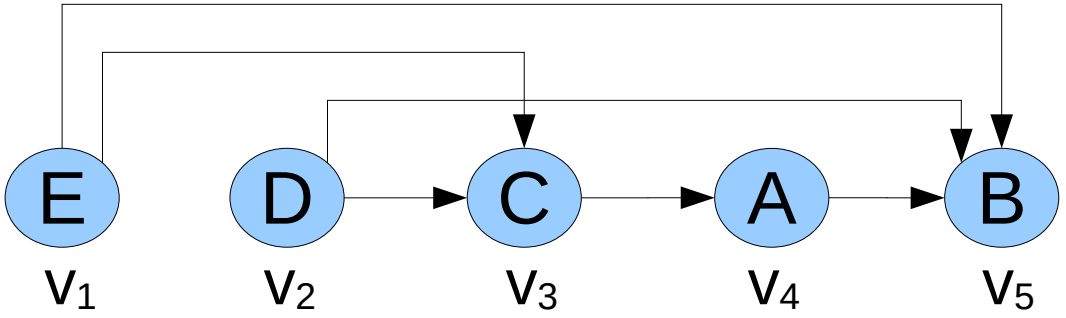
Exemplo

- Ordenação dos vértices de G: v_1, v_2, ..., v_n, tal que para toda aresta (v_i, v_j) temos que i < j



Ordenação topológica:

v_1 = E
v_2 = D
v_3 = C
v_4 = A
v_5 = B



- Para toda aresta (v_i, v_j) temos que i < j
- Ex: (E, C) = (v_1, v_3) → 1 < 3
- Ex. (D, B) = (v_2, v_5) → 2 < 5

Ordenação Topológica

- Define uma ordem de execução das tarefas
  - podemos executar tarefas na ordem dada pela ordenação topológica
  - v_i não depende de nenhuma tarefa v_j com $j < i$
- **Problema**: Dado um DAG, como determinar uma ordernação topológica?

Idéias?

- **Ideia:** começar com vértices que tem grau de entrada zero
  - não dependem de ninguém

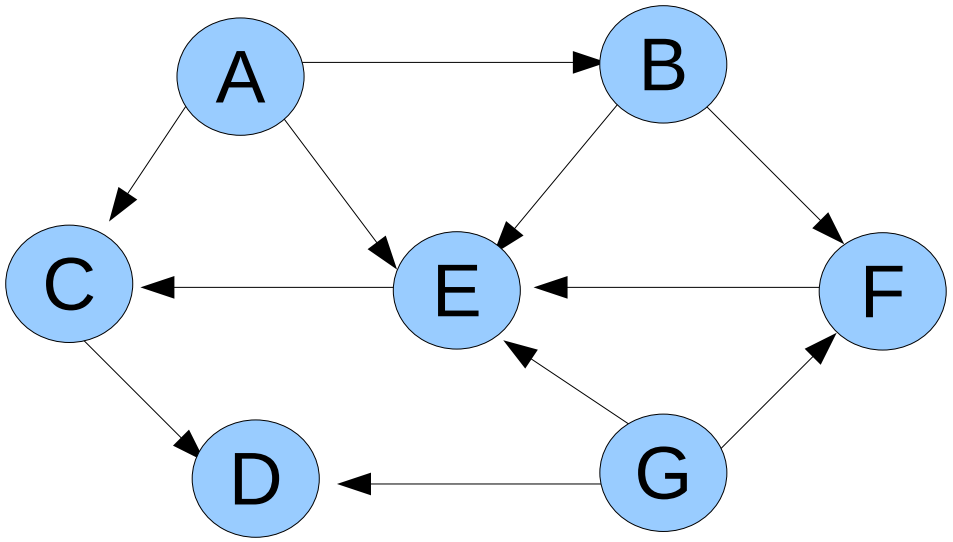
Ordenação Topológica

- Algoritmo

```
1.Ordem = 0
2.Enquanto |V| > 0 faça
3.    Encontrar u com grau de entrada zero
4.    Ordem = Ordem + u
5.    Remover u do grafo G
```

- Remover u (grau de entrada zero) mantém G como um DAG
  - teremos outro grau de entrada zero no grafo
- Algoritmo sempre termina com uma ordenação

Exemplo



Passo	Grau entrada zero	Ordem
0	A,G	-
1	G,B	A
2	B	A,G
3	F	A,G,B
4	E	A,G,B,F
5	C	A,G,B,F,E
6	D	A,G,B,F,E,C
7	-	A,G,B,F,E,C,D

- Passo zero descobre vértices com grau de entrada zero
- Escolhe vértice de grau zero mais antigo primeiro
- Ordenação topológica não é única (algoritmo produz uma ordenação topológica)

Ordenação Topológica

- Complexidade?

```
1.Ordem = 0
2.Enquanto |V| > 0 faça
3.    Encontrar u com grau de entrada zero
4.    Ordem = Ordem + u
5.    Remover u do grafo G
```

- Depende do tempo necessário para encontrar u (vértice de grau zero), linha 3
- Procurar sequencialmente tem custo O(n)
- Complexidade total: $O(n^2)$

Ordenação Topológica

- Como melhorar complexidade?

- Manter vetor com grau de entrada dos vértices
- Manter lista de vértices com grau de entrada zero
- Atualizar vetor e lista a cada “remoção” de vértice
  - inserir na lista quando grau for zero
- Não precisa remover o vértice de grau zero do grafo (ou fazer qualquer alteração no grafo)
- Complexidade: O(m + n)

Algoritmo Melhorado

```
1. Inicializar g_e[u] = 0 para todo u
2. Para cada vértice u
3.   Para cada aresta direcionada (u,v)
4.     g_e[v] = g_e[v] + 1
5. lista = 0, ordem = 0
6. Para cada vértice u
7.     Adicionar u na lista se g_e[u]=0
8. Repetir
9.   Remover u da lista
10.  ordem = ordem + u
11.  Para cada aresta direcionada (u,v)
12.    g_e[v] = g_e[v] – 1
13.    Adicionar v na lista se g_e[v]=0
14.Até que lista = 0
15.Retornar ordem
```

Passa por todas as arestas do grafo

Passa por todos os vértices do grafo

Passa por todas as arestas do grafo

- Complexidade: O(m + n)