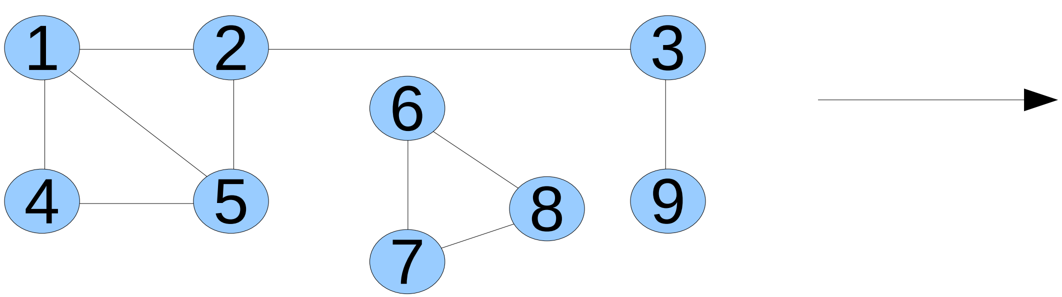
Grafos – Aula 6

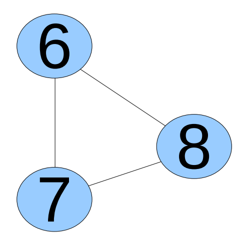
Roteiro

- Componentes conexas
- Grafos direcionados
- Busca em grafos direcionados
- Grafos fortemente conexos

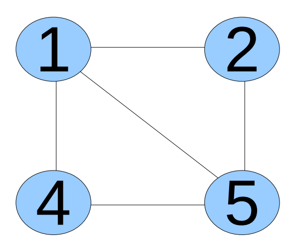
Componentes Conexas

- Maiores subgrafos “conectados” de um grafo
- Subgrafos maximais de G que sejam conexos
  - *maximal*: maior subconjunto que possui a propriedade, no caso subgrafo conexo
- Exemplo:





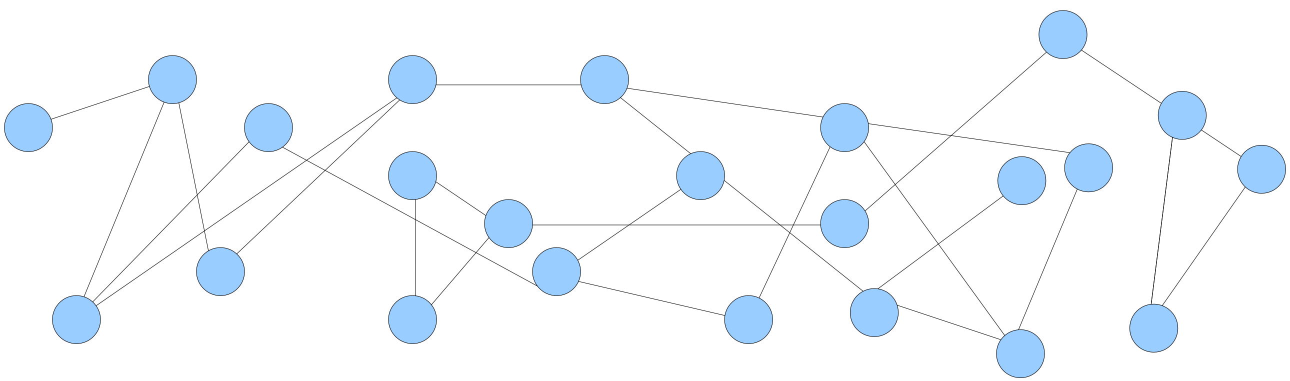
Componente conexa?



Componente conexa?

Componentes Conexas

- **Problema**: Determinar o número de componentes conexas de um grafo
  - e tamanho de cada componente



Algoritmo eficiente para resolver este problema?

Componentes Conexas

Usar Busca em Grafos (BFS ou DFS)

- Desmarcar todos os vértices
- Escolher vértice s qualquer
- Realizar BFS(s)
- Vértices marcados determinam uma CC
- Escolher vértice s qualquer não marcado
- Realizar BFS(s)
- Vértices marcados determinam outra CC
- ...

Componentes Conexas

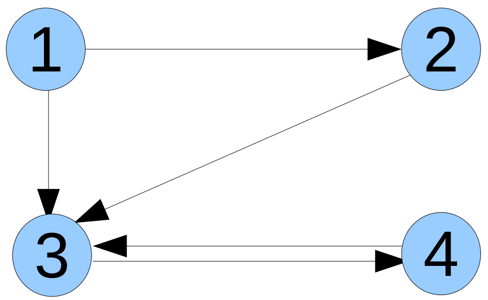
Complexidade?

- Maior número de CC de um grafo?
  - n = número de vértices
- Custo para percorrer cada CC?
  - tamanho da CC (em arestas e vértices)
- Usar marcações diferentes para cada CC
  - permite identificar as diferentes CC ao final
- Escolher vértice não marcado de forma eficiente
  - lista de vértices não marcados, atualizada

O(m + n)

Grafo Direcionado (Dígrafo)

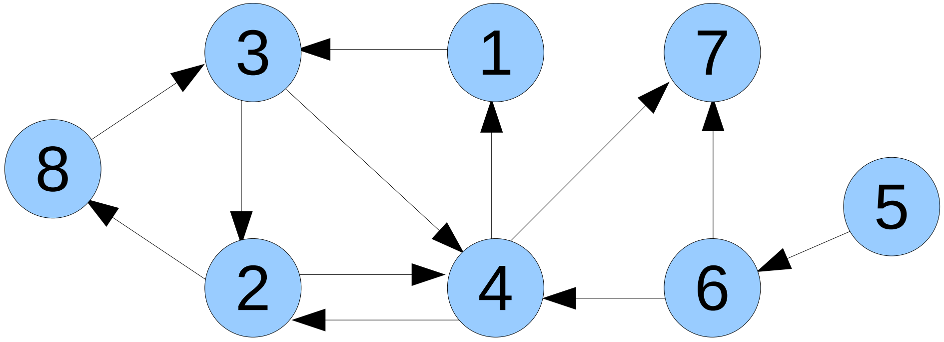
- Relacionamento não é simétrico!
  - A estar relacionado com B, **não** implica B estar relacionado com A
  - Exemplo de relacionamento assimétrico?
- Abstração: arestas têm “direção”
  - par de vértices é ordenado
  - aresta aponta na ordem definida pelo par
- Exemplo: G = (V, E)
  - V = {1, 2, 3, 4}
  - E = {(1,2), (1,3), (2,3), (3,4), (4,3)}



Grau

- Grau de entrada: número de arestas que "entram" em *v*: $|\{(*,v)\}|$
- Grau de saída: número de arestas que "saem" de *v*: $|\{(v,*)\}|$

- Exemplo: G = (V, E)



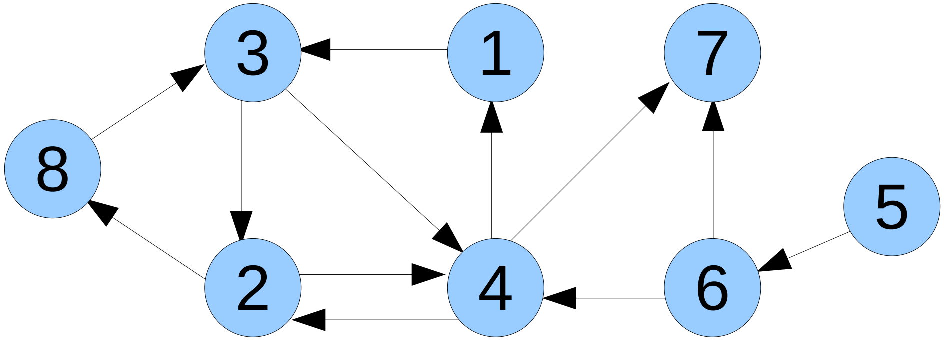
- $g_e(3) = ?$
- $g_s(3) = ?$
- $g_e(4) = ?$
- $g_s(7) = ?$

- Número máximo de arestas em G? ← n(n-1)
- Relação entre $g_e(v)$ e $g_s(v)$? ← Nenhuma

Caminho, Ciclo, Distância

- Mesma definição de antes!
- Respeitando o direcionamento das areas

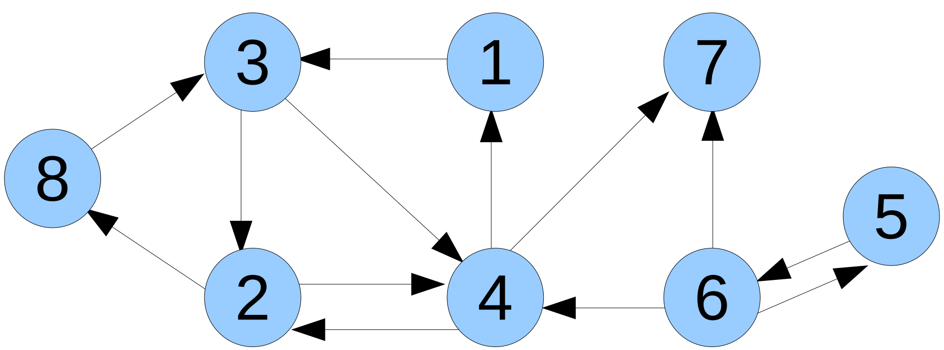
- Exemplo: G = (V, E)



- Existe caminho de 5 para 2?
- Existe caminho de 8 para 6?
- Ciclo que contém 1?
- d(1,8) = ?
- d(8,1) = ?

Fortemente Conexo

- Análogo a conexo (no caso não direcionado)
- Existe caminho entre qualquer par de vértices
  - repare que caminho de *u* para *v*, **não** implica caminho de *v* para *u*
- Exemplo: G = (V, E)

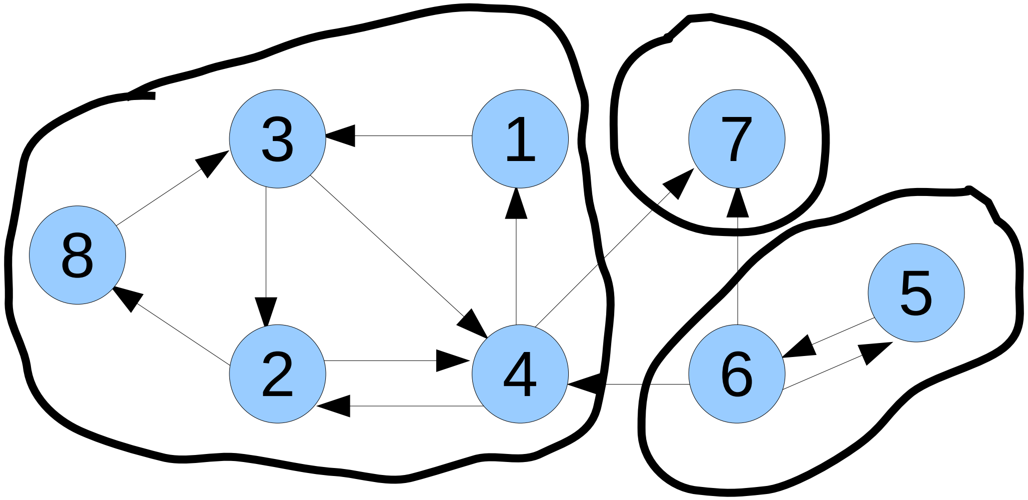


- É fortemente conexo?

Componentes Fortemente Conexas

- Análogo a componentes conexas
- Subgrafos maximais de G que são fortemente conexos

- Exemplo: G = (V, E)



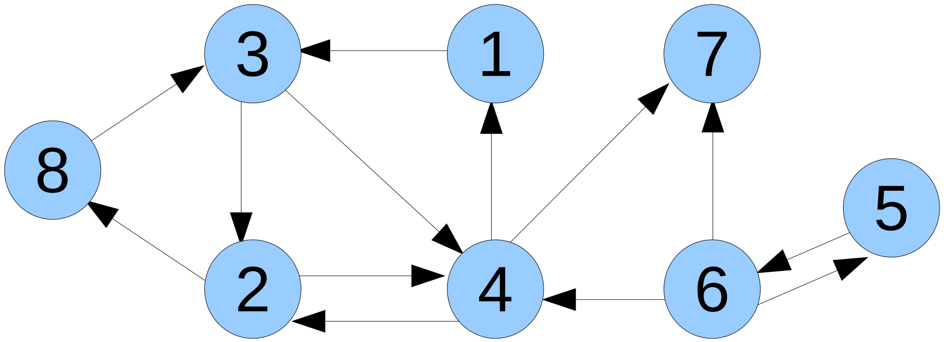
- Componentes fortemente conexas?

Busca em Grafos Direcionados

Mesma idéia!

- Busca precisa respeitar direcionamento das arestas
  - (u, v) não é igual a (v, u)
- BFS e DFS idênticas (respeitando direcionamento das arestas)
- Mesmos algoritmos, mesma complexidade

Exemplo



- BFS a partir do vértice 1
  - Ordem de descobrimento: 1,3,2,4,8,7
- DFS a partir do vértice 8
  - Ordem de descobrimento: 8,3,2,4,1,7

Busca em Grafos Direcionados

- Escolher vértice s (grafo direcionado)
- Executar BFS à partir de *s*
- Qual significado dos vértices marcados?

Vértices que s alcança!

- Tais vértices alcançam *s*?
  - ou seja, existe caminho de volta a *s*?

Não necessariamente!

Busca em Grafos Direcionados

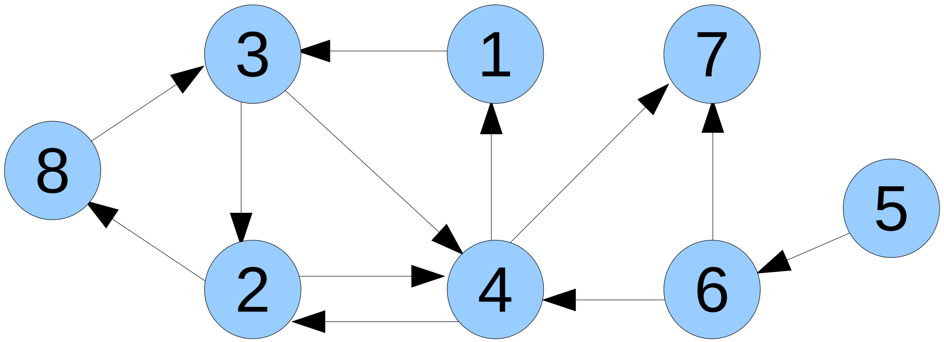
- Como descobrir quais vértices alcançam *s*?
- Solução pouco eficiente
  - Para cada vértice do grafo, executar BFS e verificar se *s* é marcado

Idéias melhores?

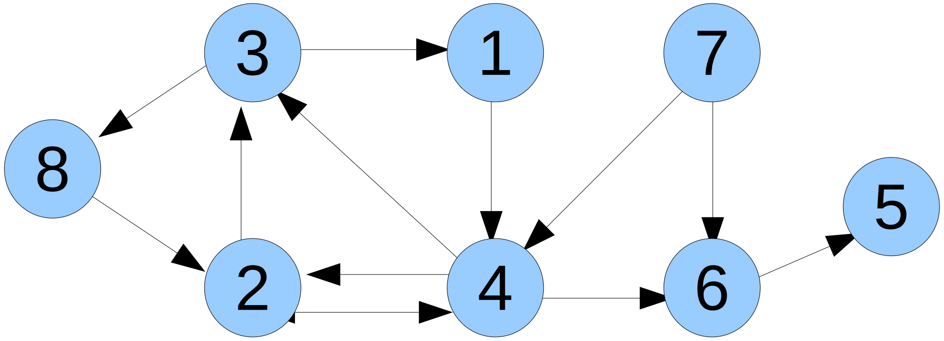
- **Inverter a direção das arestas!**
  - executar BFS no novo grafo à partir de *s*
  - vértices que *s* alcançou, alcançam *s* no grafo original

Exemplo

- Determinar vértices que alcançam 1?



- Grafo com arestas invertidas: G_{rev}



- Executar BFS à partir de 1
- Vértices marcados alcançam 1 no grafo original
- Resultado: 1,4,2,3,6,8,5

Fortemente Conexo

- **Problema:** Como determinar se um grafo direcionado é fortemente conexo?

- Como fizemos no caso não-direcionado?

Idéias?

- Mesmo princípio de antes
  - Se *s* chega aos vértices *u* e *v*, e os vértices *u* e *v* chegam a *s*
  - Então *u* chega a *v*, via *s*

Fortemente Conexo

- **Problema:** Como determinar se um grafo direcionado é fortemente conexo?
- Escolher vértice *s* qualquer
- Executar BFS à partir de *s*
- Construir G_{rev}
- Executar BFS à partir de *s* em G_{rev}
- Se todos os vértices foram marcados nas duas buscas, então G é fortemente conexo

Complexidade?

Complexidade

- Escolher vértice *s* qualquer ← O(1), escolher vértice 1
- Executar BFS à partir de *s* ← O(m + n)
- Construir G_{rev} ← O(m + n), visitar todos os vértices e arestas
- Executar BFS à partir de *s* em G_{rev} ← O(m + n)
- Se todos os vértices foram marcados nas duas buscas, então G é fortemente conexo ← O(n), percorrer as duas marcações

O(m + n)

Componentes Fortemente Conexas

- Como encontrar componentes fortemente conexas?
  - SCC = Strongly Connected Components
- **Ideia 0:** algoritmo anterior identifica a componente fortemente conexa que contém s
  - vértices marcados duas vezes
  - iterar algoritmo sobre vértices não marcados
- Faz duas buscas por cada SCC
- **Ideia 1:** algoritmo de Tarjan
  - baseado na DFS, mantém histórico de conectividade
  - mais eficiente que ideia 0