Grafos – Aula 2

Roteiro

- Definições importantes
- Algumas propriedades
- Classes de grafos

Grafo

- Abstração que permite codificar relacionamentos entre **pares** de objetos

objetos → vértices do grafo

relacionamentos → arestas do grafo

Exemplos?

Grafo

- Abstração que permite codificar relacionamentos entre pares de objetos

Como representar um grafo? (sem desenhar)

↓

Conjuntos (ou matrizes)

- Conjunto de objetos e conjunto de pares relacionados

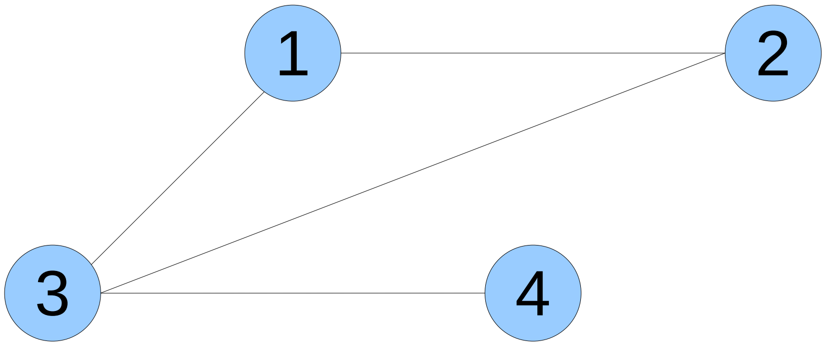
Grafo

- Grafo G = (V, E)
- V = conjunto de objetos
  - chamaremos de vértices ou nós
- E = conjunto de pares relacionados
  - chamaremos de arestas
  - par não-ordenado: (a,b) = (b,a), simétrico
  - par ordenado: (a,b) != (b,a), assimétrico

- Exemplo: G = (V, E)
  - V = {1, 2, 3, 4}
  - E = {(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)}

Representação Gráfica

- Desenho de G (o que vimos até agora)
  - representação gráfica dos conjuntos
- Exemplo: G = (V, E)
  - V = {1, 2, 3, 4}
  - E = {(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)}



Adjacência e Incidência

- Vértices adjacentes são vértices “vizinhos”
  - mais precisamente...
- Dado grafo G= (V, E)
- Dois vértices *a* e *b* são **adjacentes** se existe *e* = (*a*, *b*) no conjunto E
- Aresta *e* é **incidente** aos vértices *a* e *b*
- Exemplo: G = (V, E)
  - V = {1, 2, 3, 4}
  - E = {(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)}
  - 4 e 1 são adjacentes?
  - 3 e 2 são adjacentes?

Vértices e Arestas

- Número de vértices de um grafo
  - n = |V|

cardinalidade
do conjunto

- Número de arestas de um grafo
  - m = |E|
- Dado G = (V, E)
  - Menor número de arestas de G? → **zero**
  - Maior número de arestas de G?

- número de pares não ordenados em um conjunto de *n* = |V| objetos

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leq n^2$$

Grau

- Grau de um vértice *v*
  - número de vértices adjacentes a *v*
  - função grau(*v*)

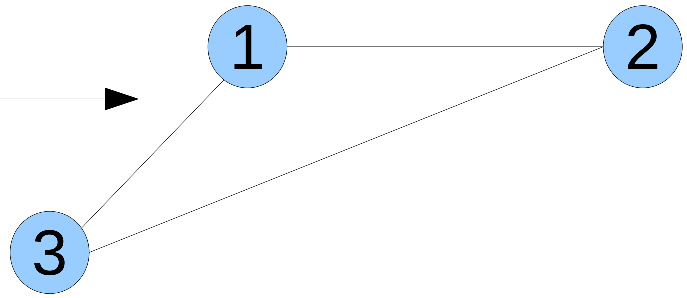
- Exemplo: G = (V, E)
  - V = {1, 2, 3, 4}
  - E = {(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)}
  - grau(1) = ?
  - grau(4) = ?

- Dado G = (V, E)
  - Grau mínimo de um vértice? → **zero**
  - Grau máximo de um vértice? → ***n - 1***

Grafo Regular

- Todos os vértices têm o mesmo grau
  - dizemos ser grafo *r*-regular, com grau *r*

- Exemplo: G é 2-regular, n = 3
  - V = {1, 2, 3}
  - E = {(1,2), (1,3), (2,3)}



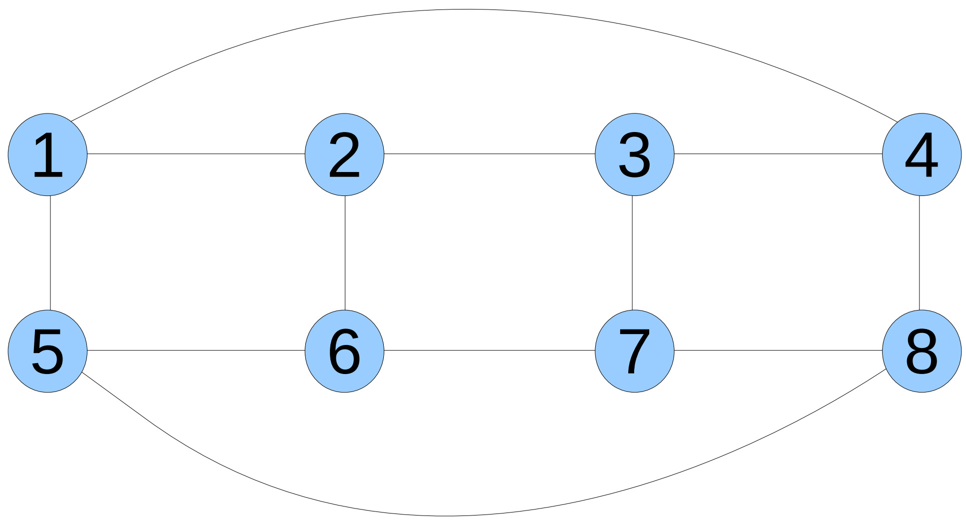
- Dado G = (V, E) r-regular
- Quantas arestas tem G? (em função de n e r)

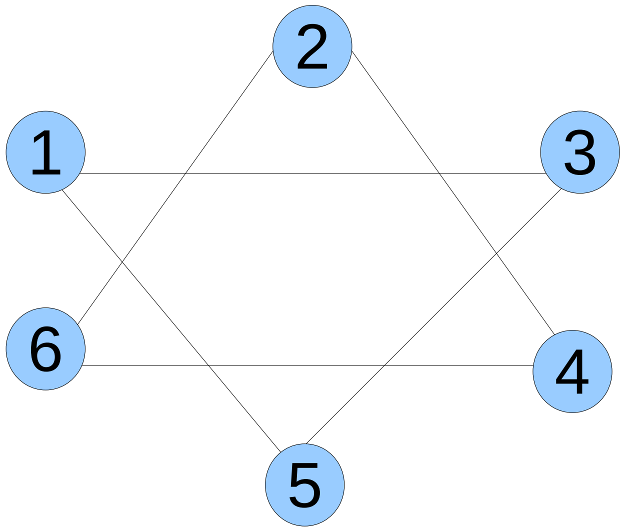
$$|E| = \frac{nr}{2}$$

Por que?

Grafo Regular

- São regulares?



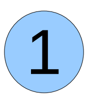


- É possível ter qualquer combinação de *n* e *r*?

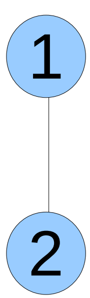
Grafo Completo

- Aresta presente entre cada par de vértices
  - todos os vértices tem grau máximo
- Notação de grafo completo
  - K_n onde *n* é o número de vértices
- Exemplos

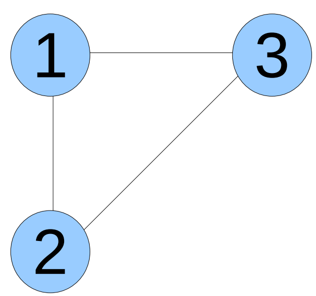
K_1



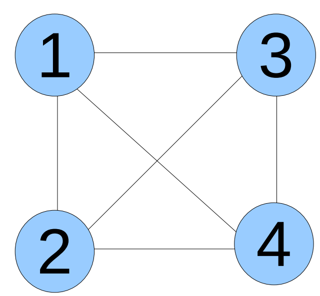
K_2



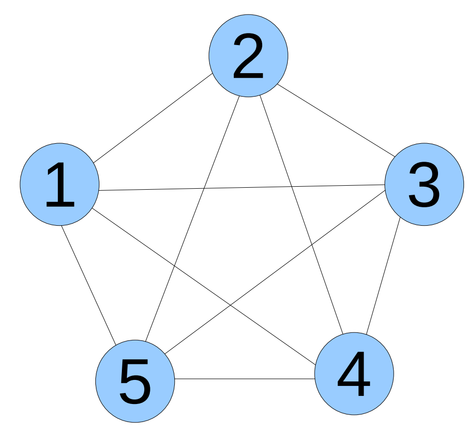
K_3



K_4

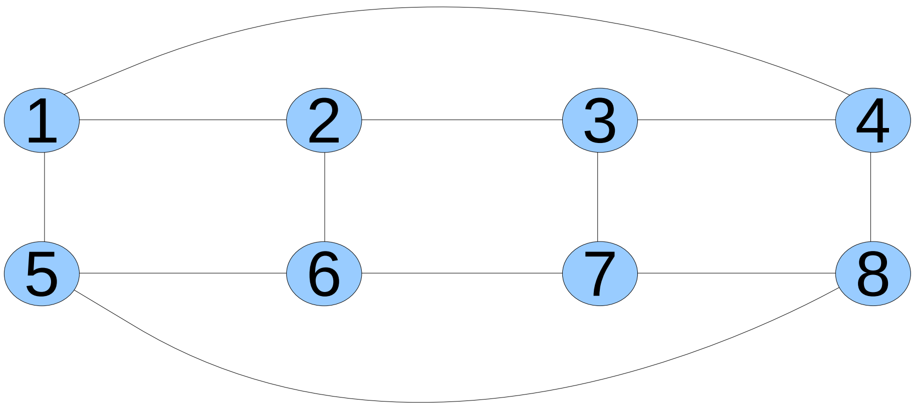


K_5



- Quantas arestas têm K_n?

Caminho



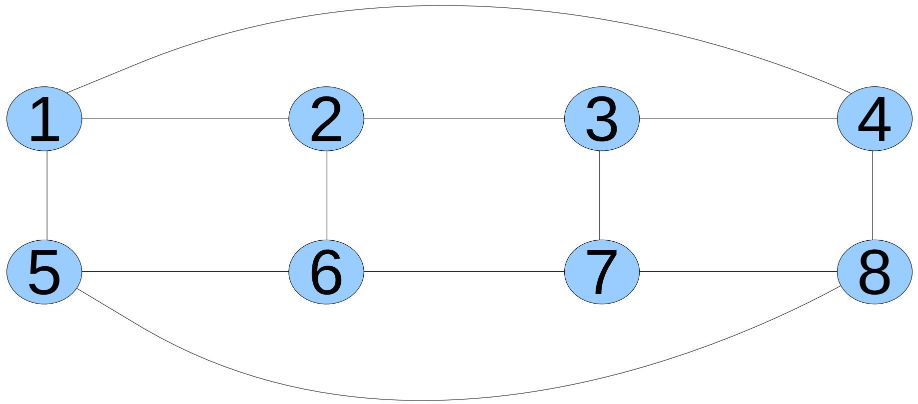
- Como definir “caminho” em um grafo?
- Ex. caminho entre 1 e 7?

- Caminho entre dois vértices
  - sequência de vértices adjacentes

- Caminho entre v_1 e v_k
  - sequência $v_1, \ldots, v_k$, tal que $(v_i, v_{i+1}) \in E \quad i = 1, \ldots k-1$

- Ex. caminho entre 1 e 7?
  - 1, 2, 3, 7 $\longrightarrow$ (1,2), (2,3), (3,7)
  - 1, 5, 6, 2, 6, 7 é caminho?

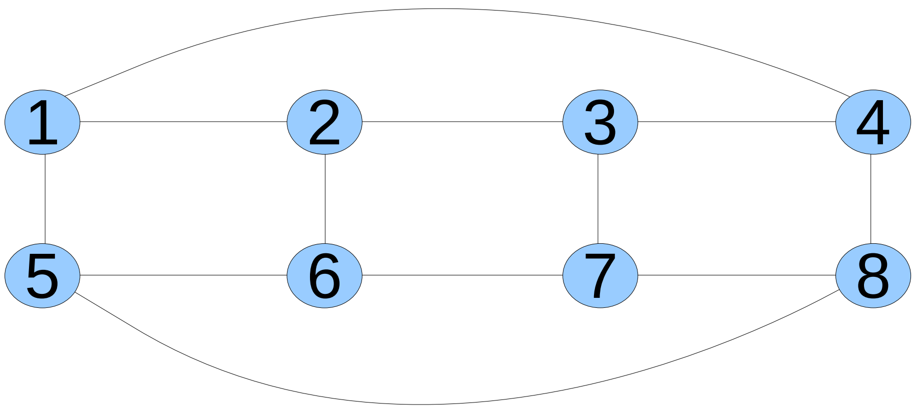
Caminho Simples



- Vértices do caminho são distintos
  - não há “voltas”
- Ex. caminho entre 1 e 7?
  - 1, 5, 6, 2, 6, 7 ← não é caminho simples
  - 1, 5, 8, 7 ← é caminho simples
- Comprimento do caminho
  - número de arestas que o caminho possui
- Dado G = (V, E)
  - qual é o menor caminho simples entre dois vértices?
  - qual é o maior?

Ciclo

- Caminho simples que começa e termina no mesmo vértice
  - $v_1 = v_k$
- Ex. ciclo contendo 5?
  - 5, 1, 2, 3, 7, 6, 5
  - 5, 1, 4, 8, 5
- Comprimento do ciclo
  - número de arestas que formam o ciclo

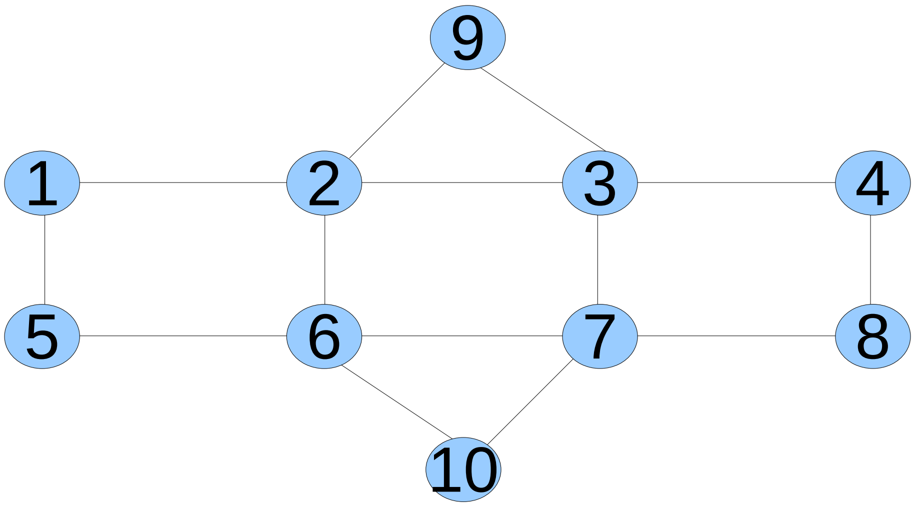


- Qual o comprimento do maior ciclo possível de um

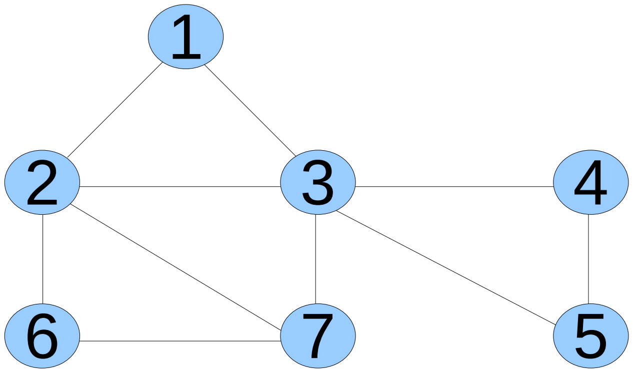
- Circuito: ciclo formado por caminho não necessariamente simples (pode repetir vértices)

Ciclos Especiais

- Ciclo Hamiltoniano: passa exatamente uma vez por todo vértice de G
- Circuito Euleriano: passa exatamente uma vez por toda aresta de G (repete vértices)



- Ciclo Hamiltoniano?
- Ciclo Euleriano?



Não possui!

- Nem todo grafo possui estes ciclos
- Problema: determinar se G possui estes ciclos

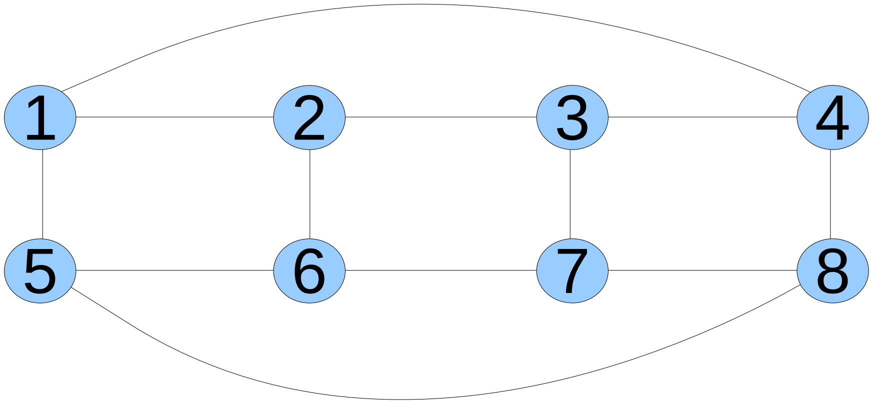
Subgrafo

- Um grafo que é “parte” de outro grafo
- Dado G = (V, E)
- G' = (V', E') é subgrafo de G se
  - $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$

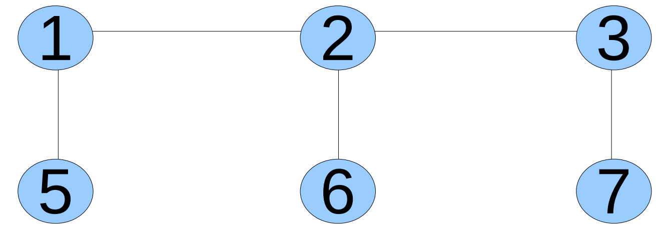
- Subgrafo induzido: todas arestas de G incidentes a vértices de V’ estão em G’
  - subgrafo é determinado por V’

Subgrafo Exemplo

- Dado G = (V, E)

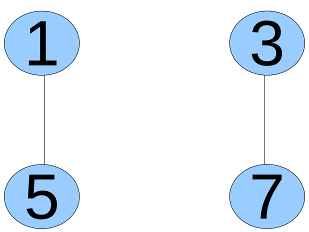


É subgrafo de G?



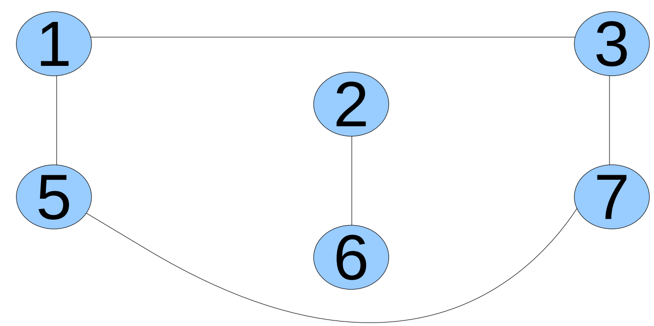
É subgrafo induzido de G?

É subgrafo de G?



É subgrafo induzido de G?

É subgrafo de G?



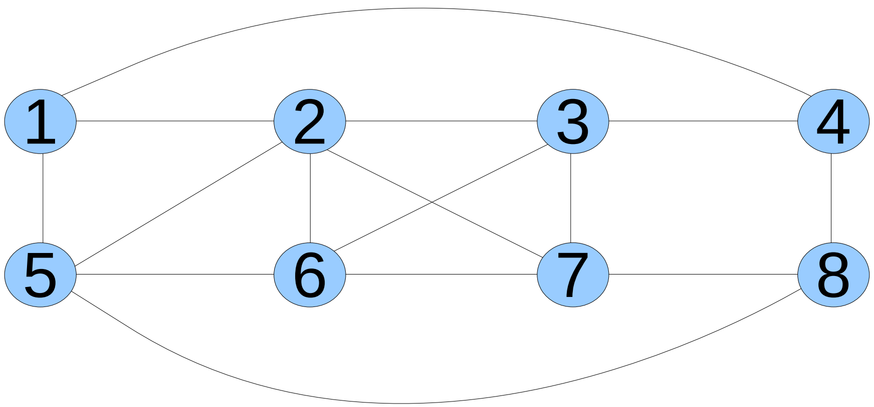
Clique

- Um grafo completo “dentro” de outro grafo

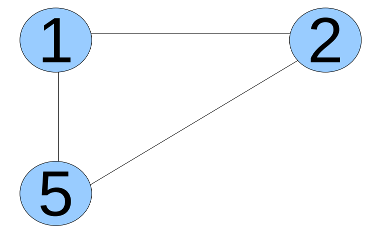
- Dado G = (V, E)
- G' = (V', E') é uma *clique* de G se
  - G' é subgrafo de G
  - G' é um grafo completo

Clique Exemplo

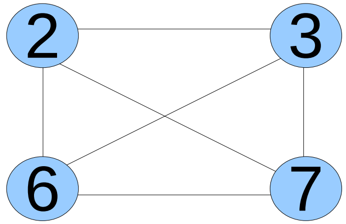
- Dado G = (V, E)



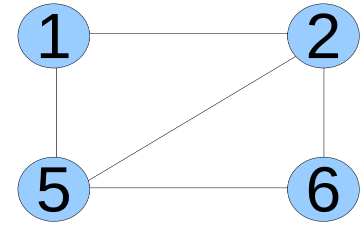
É clique de G?



- Qual é o maior clique de G?



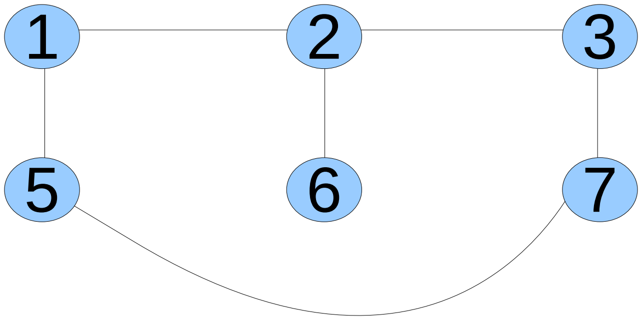
É clique de G?



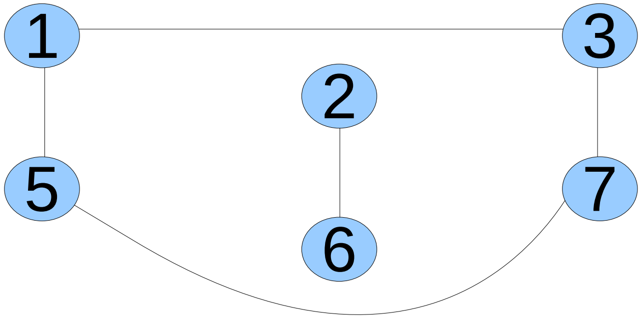
- Problema: encontrar maior clique de um grafo
  - Ex. maior conjunto de pessoas que estão todos conectados entre si no Facebook

Conexo

- Grafo está “conectado”
  - como definir mais precisamente?
- Grafo G=(V, E) é conexo se
  - existe caminho entre qualquer par de vértices
- Caso contrário, G é desconexo



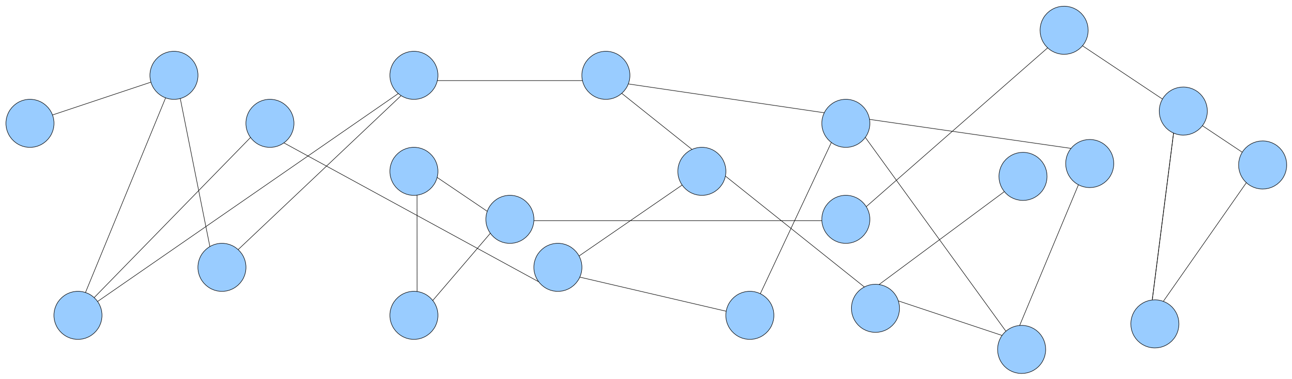
Conexo?



Conexo?

Conexo

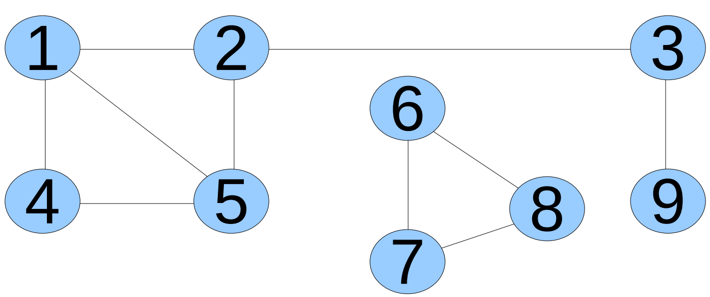
- **Problema**: Determinar se um grafo é conexo



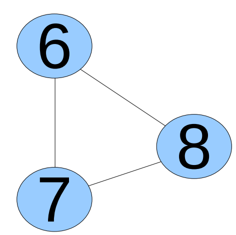
- Veremos algoritmo (muito eficiente)
  - em duas aulas!

Componentes Conexas

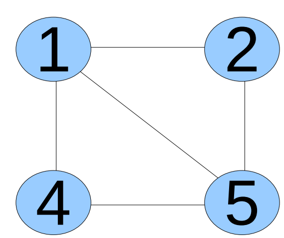
- Maiores subgrafos “conectados” de um grafo
  - grafos conexos possuem uma componente conexa
- Subgrafos maximais de G que sejam conexos
  - *maximal*: maior subconjunto que possui a propriedade, no caso subgrafo conexo
- Exemplo:



tem duas componentes conexas



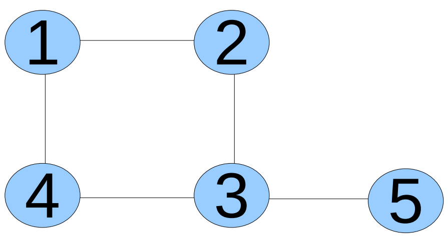
Componente conexa?



Componente conexa?

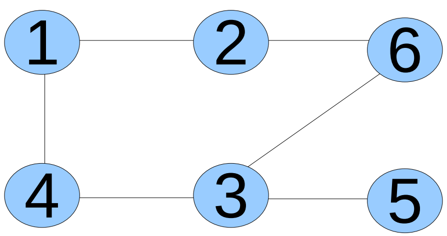
Grafo Bipartido

- **Intuição:** grafo possui dois tipos de vértices, arestas apenas entre tipos diferentes
- G é bipartido se existe V_1 e V_2 ($V = V_1 \cup V_2$) tal que toda aresta *(u,v)*, *u* está V_1 e *v* em V_2
- Exemplo:



Bipartido?

Sim! $V_1 = \{1,3\}$, $V_2 = \{2,4,5\}$



Bipartido?

Não! Não conseguimos encontrar V_1 e V_2

- Problema: determinar se um grafo é bipartido