

# Teoria dos Grafos - COS 242 2024/2

## Quinta Lista de Exercícios

ATENÇÃO! Para um melhor rendimento do processo de aprendizagem, responda às perguntas de forma precisa, contemplando adequadamente o que é solicitado.

**Questão 1:** Considere a rede de fluxos ilustrada abaixo, com capacidades e fluxos indicados em cada aresta. Determine:

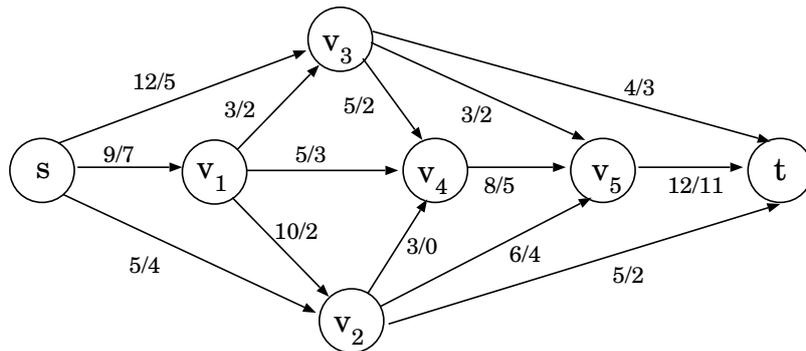


Figura 1: Uma rede de fluxos  $s - t$ ; pesos nas arestas indicam capacidade/fluxo.

1. Qual é o valor deste fluxo?
2. O fluxo ilustrado é fluxo máximo?
3. Determine o corte  $s-t$  mínimo da rede de fluxo e sua capacidade.

**Questão 2:** Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, dê uma breve explicação. Se for falsa, dê um contra-exemplo.

1. Seja  $G = (V, E)$  uma rede de fluxos qualquer com vértice de origem  $s$  e destino  $t$ , e capacidades  $c_e$  inteiras e positivas associadas a cada aresta  $e \in E$ , e seja  $(A, B)$  um corte  $s - t$  mínimo desta rede de fluxos. Suponha agora que adicionamos uma unidade às capacidades de todas as arestas da rede. Temos então que o corte  $(A, B)$  continua a ser um corte  $s - t$  mínimo desta nova rede de fluxos.
2. Considere um corte  $(X, Y)$  da rede de fluxo de forma que os vértices  $s$  e  $t$  estejam em  $X$ . O fluxo total deste corte é sempre igual ao valor de fluxo da rede.

**Questão 3:** Considere o algoritmo original de Ford-Fulkerson para resolver o problema do fluxo máximo. Considere a rede de fluxo abaixo.

1. Mostre como uma execução do algoritmo pode levar muito tempo para convergir. Determine a operação do algoritmo passo-a-passo, assim como o grafo residual. Quantas iterações serão necessárias no pior caso?
2. Considere a melhoria do algoritmo discutida em aula (que considera caminhos com capacidade de no mínimo  $\Delta$ , para diferentes valores de  $\Delta$ ). Determine a operação do algoritmo passo-a-passo, assim como o grafo residual. Quantas iterações serão necessárias no pior caso?

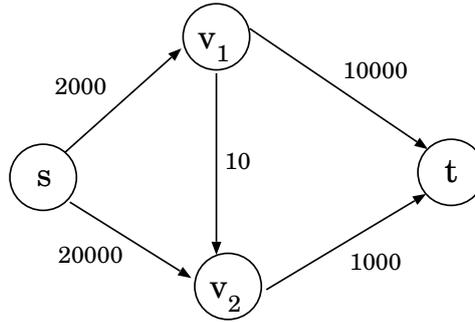


Figura 2: Uma rede de fluxos patológica (pesos nas arestas indicam capacidade).

**Questão 4:** Considere um conjunto  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  de professores e um conjunto  $D = \{d_1, \dots, d_m\}$  de disciplinas e um conjunto  $I$  que representa o interesse dos professores em oferecer as disciplinas, de forma que o par ordenado  $(p, d) \in I$  indica que o professor  $p \in P$  tem interesse em oferecer a disciplina  $d \in D$ . Dados os três conjuntos, o problema é determinar o maior número de disciplinas que podem ser oferecidas simultaneamente pelo conjunto de professores, segundo seus interesses declarados. Modele o problema usando grafos e considere os seguintes casos.

1. Assuma que não há um limite superior para o número de disciplinas que um professor pode oferecer. Determine um algoritmo eficiente para o problema (dica: transforme o problema).
2. Assuma que cada professor deve oferecer no máximo uma disciplina. Determine um algoritmo eficiente para o problema (dica: transforme o problema).

**Questão 5:** Duas pessoas jogam um jogo em um grafo  $G$  bipartido conexo com  $n$  vértices ( $n/2$  em cada parte) selecionando vértices distintos  $v_0, v_1, v_2, \dots$  alternadamente tal que, para  $i > 0$ ,  $v_i$  é necessariamente adjacente a  $v_{i-1}$ . O vértice  $v_0$  (primeiro da sequência) é escolhido pelo primeiro jogador de forma arbitrária. Cada vértice pode ser selecionado apenas uma vez. O jogador que selecionar o último vértice da sequência ganha o jogo.

1. Desenhe um grafo bipartido conexo com seis vértices onde o primeiro jogador pode sempre vencer. Ou seja, existe uma sequência de escolhas que o primeiro jogador pode fazer que sempre leva a vitória, independente das escolhas que o segundo jogador fizer.
2. Mostre que o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora (como a do exemplo acima) se e somente se  $G$  não possui um emparelhamento perfeito.

**Questão 6: Problema da Excursão:**  $R$  famílias partem numa excursão em  $S$  veículos. Existem  $f_i$  pessoas na família  $i$ , com  $i = 1, \dots, R$ , e  $v_j$  lugares no veículo  $j$ , com  $j = 1, \dots, S$ . Descreva um procedimento (pseudo-algoritmo) que decide se é possível organizar as pessoas nos veículos de forma que nenhum veículo tenha duas ou mais pessoas da mesma família. Dica: rede de fluxo!