Teoria dos Grafos
Aula 6

Aula passada

- Implementação BFS
- DFS, implementação
- Complexidade
- Aplicações

Aula de hoje

- Classe de funções e notação O, Ω, Θ
- Propriedades da notação
- Funções usuais
- Tempo de execução

Comparando Quantidades

Como comparar quantidades?

- ex. número de pessoas, número de páginas web, número de neurônios

Ordem de grandeza

- Ordem de grandeza é a parte interia de $\log_{10} x$, onde x é a quantidade
- Ignora detalhes (bit menos significativos)
- Muito usada na Academia (físicos, etc)

Ordem de Grandeza

- Número de pessoas no planeta? $\sim 10^{10}$
- Número de páginas web? $\sim 10^{11}$
- PIB dos EUA? $\sim 10^{13}$ dólares
- Peso de uma célula humana? $\sim 10^{-12}$ Kg

Escala poderosa (potência de 10)

- Fácil comparação entre quantidades (grandes e pequenas)
- Massa de Saturno é duas ordens de grandeza maior que a Terra

Comparando Crescimento

Como comparar crescimento?

- sem considerar detalhes, comparação aproximada

Classe de funções

- Notação O, Ω, Θ
- Muito usada na Computação (e outras áreas)

Comparando Crescimento

- Idéia: capturar o quão rápido uma quantidade cresce

Tipos de crescimento?

- Linear, quadrático, logarítmico, exponencial, polinomial, etc.

Como formalizar este conceito?

Comparando Crescimento

- Seja $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = 10x + 10$, $x > 0$

Qual cresce mais rápido?

- Comparação para valores grandes de x

- Seja $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = 10x^2 + 10$, $x > 0$

Qual cresce mais rápido?

- Comparação de primeira ordem, crescimento igual

Notação O

- Seja f(n) uma função positiva, n > 0
- Dizemos que f(n) é “O de g(n)” se f(n) é *limitada superiormente* por uma constante vezes g(n) para todo n grande suficiente
- Ou seja, se existe constante c > 0, n_0 > 0, tal que para todo n > n_0, f(n) <= c g(n)
- Dizemos neste caso que “f(n) é O(g(n))” ou “f(n) = O(g(n))” ou “f(n) pertence a O(g(n))”
- Importante: c não pode depender de n

Notação O

- O(g(n)) define uma classe de funções

Qual classe?

- Todas as funções “menores ou iguais” a g(n)
- Todas as funções f(n) tal que exista c >0 e n_0 > 0, tal que para todo n > n_0
  f(n) <= c g(n)
- *Limitante superior assintótico* para f(n)

Exemplos

- Seja $f(n) = 7n^2 + 10n + 2$, para $n > 0$
- $f(n)$ é $O(n^2)$?
- $f(n) = 7n^2 + 10n + 2$
  $< 7n^2 + 10n^2 + 2n^2$
  $= 19n^2$
- Com $c = 19$, $n_0 = 1$, temos que $f(n) <= c\ n^2$ para todo $n > n_0$
- $f(n)$ é $O(n^3)$?
- $f(n)$ é $O(n)$?

Notação Ω

- Complementar a notação O
  - limitante inferior assintótico
- Seja f(n) uma função positiva, n > 0
- Dizemos que f(n) é “omega de g(n)” se f(n) é ao menos uma constante vezes g(n) para todo n grande suficiente
- Ou seja, se existe constante c > 0, n_0 > 0, tal que para todo n > n_0, f(n) >= c g(n)
- Importante: c não pode depender de n

Notação Ω

- Ω(g(n)) define uma classe de funções

Qual classe?

- Todas as funções "maiores ou iguais" a g(n)
- Todas as funções f(n) tal que exista c >0 e n_0 > 0, tal que para todo n > n_0

  f(n) >= c g(n)
- *Limitante inferior assintótico* para f(n)

Exemplos

- Seja $f(n) = 7n^2 + 10n + 2$, para $n > 0$
- $f(n)$ é $\Omega(n^2)$?
- $f(n) = 7n^2 + 10n + 2$
  $> 7n^2$
- Com $c = 7$, $n_0 = 1$, temos que $f(n) >= c\ n^2$ para todo $n > n_0$
- $f(n)$ é $\Omega(n^3)$?
- $f(n)$ é $\Omega(n)$?

Notação Θ

- Captura crescimento exato
  - limitante superior e inferior, simultaneamente
- Seja f(n) uma função positiva, n > 0
- Dizemos que f(n) é $\Theta(g(n))$
  se f(n) é cresce igual a g(n) ao menos de uma constante multiplicativa para todo n grande suficiente
- Ou seja, se $f(n) = O(g(n))$ e $f(n) = \Omega(g(n))$, com duas constantes c_1 e c_2, e dois n_1 e n_2

Notação Θ

- Θ(g(n)) define uma classe de funções

Qual classe?

- Todas as funções “iguais” a g(n)
- Todas as funções f(n), tal que

  f(n) = O(g(n)) e f(n) = Ω(g(n))
- *Limitante assintótico apertado* (tight bound) para f(n)

Exemplos

- Seja $f(n) = 7n^2 + 10n + 2$, para $n > 0$
- $f(n)$ é $\Theta(n^2)$?
- Sim, pois $f(n) = O(n^2)$ e $f(n) = \Omega(n^2)$
- $f(n)$ é $\Theta(n^3)$?
- $f(n)$ é $\Theta(n)$?

Limite e Notação Θ

- Notação Θ pode ser calculada como limite
- Seja f(n) e g(n) duas funções positivas
- Se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0$$

- Então f(n) = Θ(g(n))
- Definição de limite atende as definições de O e Ω para as funções

Propriedades de O, Ω, Θ

- Considere as funções positivas f(n), g(n), h(n)
- Transitividade
- Se f = O(g) e g = O(h), então f = O(h)
- Se f = Ω(g) e g = Ω(h), então f = Ω(h)
- Se f = Θ(g) e g = Θ(h), então f = Θ(h)
- Provar estas propriedades
  - duas primeiras implicam a terceira

Propriedades de O, Ω, Θ

- Considere as funções positivas f(n), g(n), h(n)
- Soma de funções
- Se f = O(h) e g = O(h), então f + g = O(h)
- Vale também para número fixo de parcelas de funções
- Se f = O(g) então f + g = Θ(g)
  - Provar este resultado interessante

Polinômios

- Considere o polinômio

$$f(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \ldots + a_0$$

- Crescimento assintótico dado pelo termo de mais alta ordem (que determina seu grau)
- Temos que $f(n) = O(n^d)$
- Temos ainda que $f(n) = \Omega(n^d)$
- Prova desta propriedade?

Logaritmo

- Lembrando $\log_b n$ é o número x, tal que $b^x = n$
- Logaritmo cresce muito devagar
  - log (número de átomos no universo) ~ 60
- Mais devagar do que qualquer polinômio
- Para todo $b > 1$ e qualquer $x > 0$, temos $\log_b n = O(n^x)$
- Não precisa informar a base em O(log n)
  - mudança de base é multiplicação por constante

Exponencial

- Lembrando $f(n) = r^n$ com $r > 1$
- Crescem muito rápido
  - expoente é n (e não fixo, como polinômio)
- Mais rápido do que qualquer polinômio
- Para todo $r > 1$ e todo $d > 0$, temos $n^d = O(r^n)$
- Diferente de logaritmo, cada exponencial (base) define sua família
- Seja $r > s > 1$
- Então nunca é o caso de $r^n = \Theta(s^n)$
  - Prova?

Tempo de Execução

	n	$n \log_2 n$	n^2	n^3	1.5^n	2^n	$n!$
$n = 10$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	4 sec
$n = 30$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	18 min	10^{25} years
$n = 50$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	11 min	36 years	very long
$n = 100$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	1 sec	12,892 years	10^{17} years	very long
$n = 1{,}000$	< 1 sec	< 1 sec	1 sec	18 min	very long	very long	very long
$n = 10{,}000$	< 1 sec	< 1 sec	2 min	12 days	very long	very long	very long
$n = 100{,}000$	< 1 sec	2 sec	3 hours	32 years	very long	very long	very long
$n = 1{,}000{,}000$	1 sec	20 sec	12 days	31,710 years	very long	very long	very long

- n é o tamanho da entrada
  - número de “elementos” na entrada
- Tempo de execução típico em função de n para diferentes funções de crescimento

Tempo de Execução Típico

- Logarítmico, O(log n)
  - encontrar um valor em um vetor ordenado (busca binária)
  - percorrer uma árvore balanceada
- Linear, O(n)
  - calcular valor máximo em um vetor
  - imprimir valores de uma lista
  - BFS, DFS (onde n aqui é vértices + arestas)
- O(n log n)
  - ordenar um vetor com merge-sort
  - Dijkstra

Tempo de Execução Típico

- Quadrático, $O(n^2)$
  - Ordernação com quicksort (pior caso)
  - Encontrar o par de pontos mais próximos
  - Dijkstra (sem heap)
- Cúbico, $O(n^3)$
  - multiplicação de matrizes
- Exponencial, $O(r^n)$
  - TSP, problema do caxeiro viajante
  - muitos outros em grafos

Tempos na Prática

- Inicializar um vetor de tamanho n → $\Theta(n)$

- Depende da linguagem de programação?
- Depende da função de inicialização?
- Depende do computador?

→
- Na teoria não, é sempre $\Theta(n)$
- Na prática sim, e MUITO

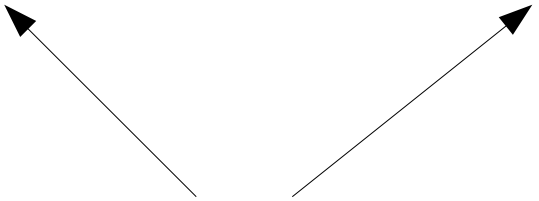
Exemplo

- Usando *for* (alto nível)

```
int i, n=1000;
char v = 'a';
char *mem;

mem = (char *)malloc(n);

for (i=0; i<n; i++)
    mem[i] = v;
```

- Usando *memset* (baixo nível)

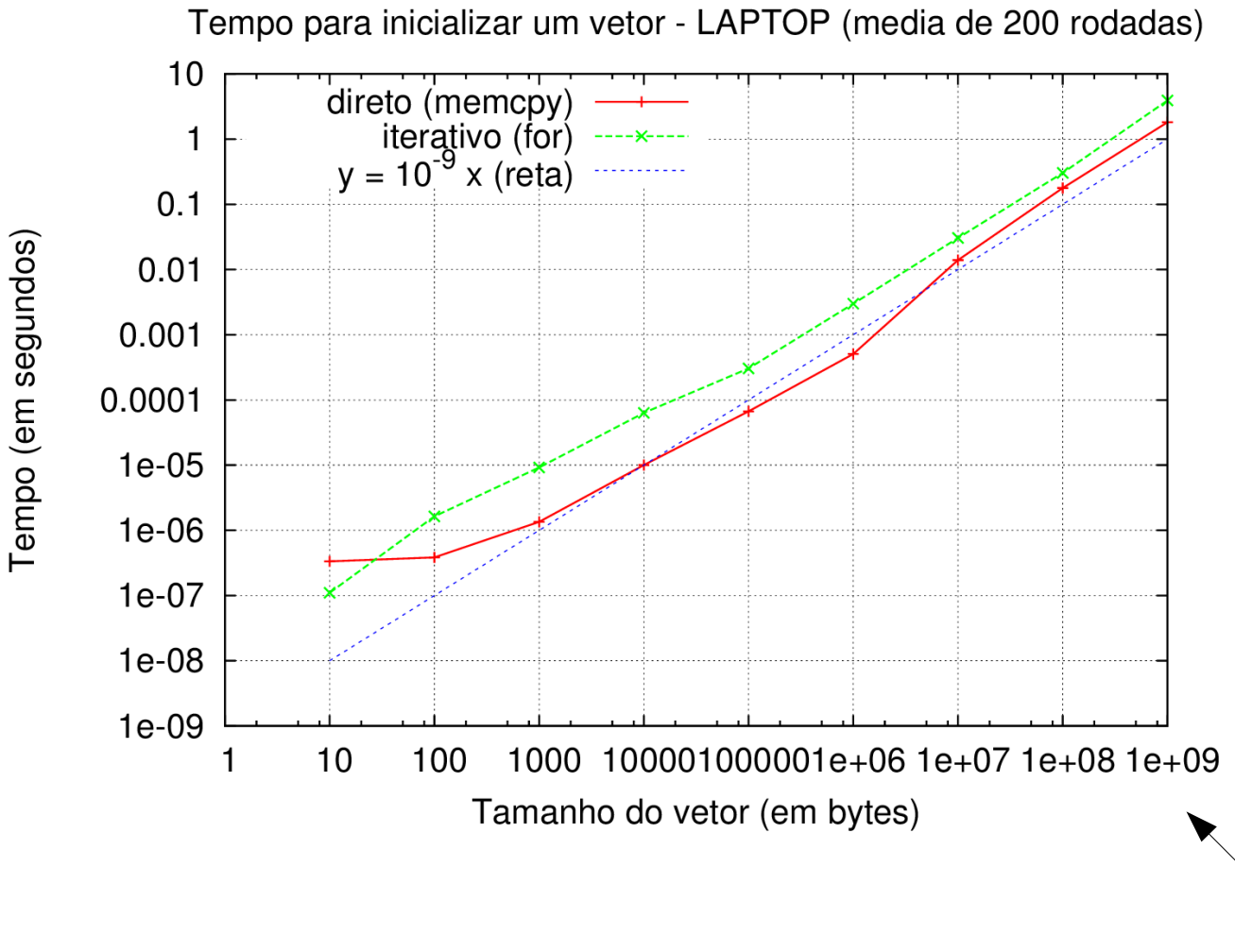
```
int n=1000;
char v = 'a';
char *mem;

mem = (char *)malloc(n);

memset((void *)mem, v, n);
```



Linear em n?

Tempo de Execução

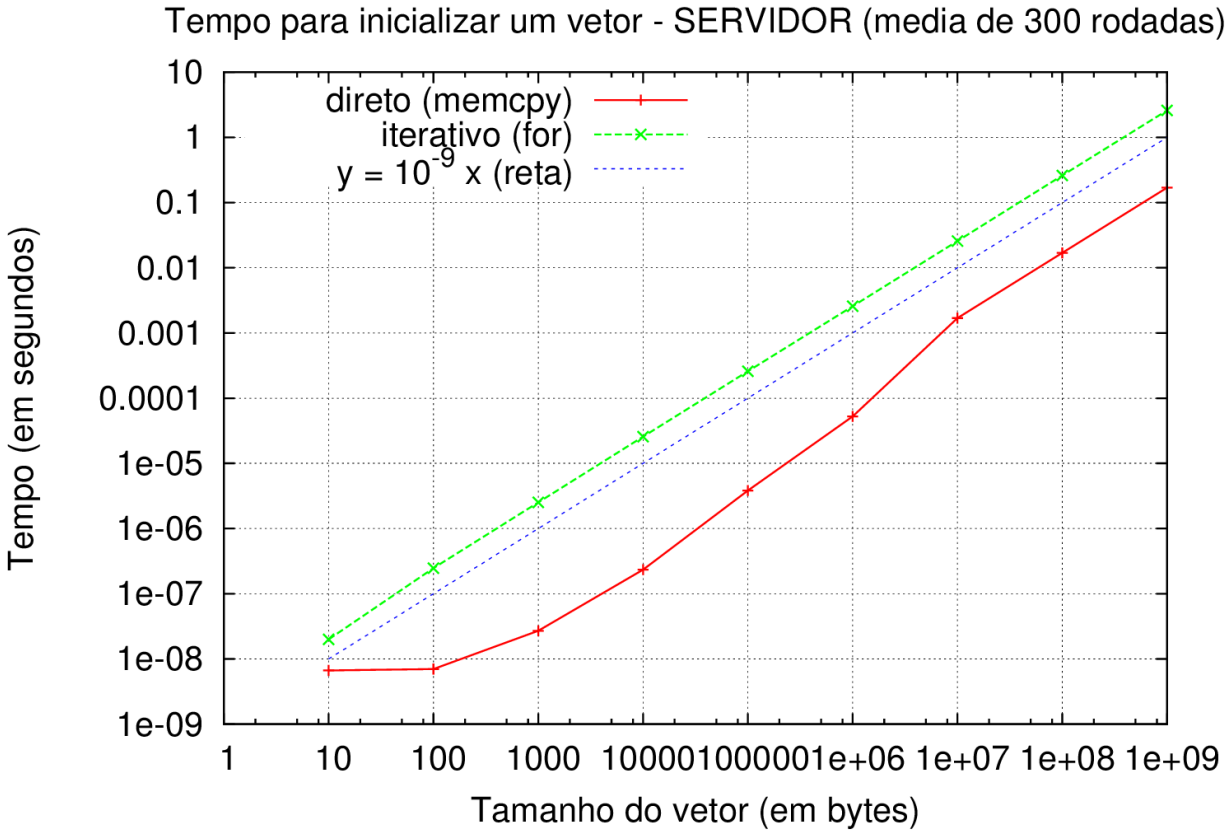
- Tempo de execução em função de n
  - Tempo médio de 200 rodadas



- Crescimento linear indiscutível
- Na teoria, não há diferenças
- Na prática, um fator de 2 a 8 vezes mais rápido

Tempo de Execução

- Trocando laptop por servidor de grande porte
  - tempo médio de 300 rodadas



- Crescimento linear
- Aumento das diferenças, fator de até 30x
- Memória do servidor é bem mais rápida

- Constantes da notação O escondem linguagem, função, computador, etc