

Grafos – Aula 4

Roteiro

- Percorrendo grafos
- Algoritmo genérico
- BFS
- Camadas
- Árvore geradora
- Caminhos mínimos

Percorrendo Grafos

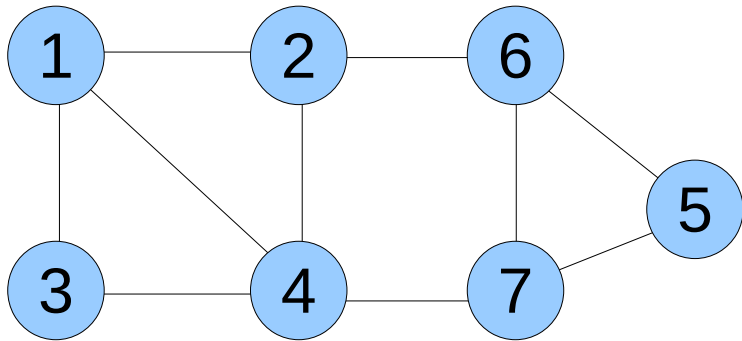
Como *explorar* um grafo de forma sistemática?

Explorar = “passear pelo grafo”, “percorrer o grafo por suas arestas”

- Explorar para encontrar → buscar
- Muitas aplicações recaem em problemas de busca em grafos
- Muitos algoritmos utilizam fundamentos similares aos algoritmos de busca

Exemplo

- Determinar se existe caminho entre dois vértices?



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Algoritmo (eficiente)?

Algoritmo de Busca

- **Ideia:** evitar revisitar vértices já explorados
 - marcar os vértices
- **Marcações:** *desconhecido*, *descoberto* ou *explorado*
 - *Desconhecido:* vértice ainda não foi descoberto pelo algoritmo
 - *Descoberto:* vértice foi encontrado (visitado pelo algoritmo)
 - *Explorado:* todos vizinhos do vértice foram descobertos (todas as arestas incidentes ao vértice foram analisadas)

Algoritmo Genérico

- Passo inicial
 - marcar todos os vértices como *desconhecidos*
 - selecionar origem e marcá-la *descoberto*
- Passo geral
 - Enquanto houver vértice *descoberto*
 - Selecionar algum vértice *descoberto*, u
 - Se u possuir vizinho desconhecido, v
 - marcar v como *descoberto*
 - Senão, marcar u como *explorado*

O que teremos ao final?

- vértices desconhecidos e vértices explorados

Ordenação da Exploração

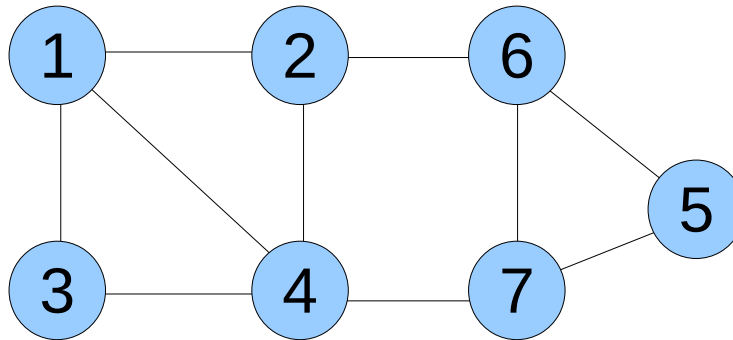
- Qual vértice u descoberto deve ser escolhido para ser analisado?

Algoritmo genérico não estabelece ordem

- Ordenação define uma sistemática de exploração
- Duas abordagens
 - u é o vértice *descoberto* “mais antigo”
 - u é o vértice *descoberto* “mais recente”

Busca em Largura (BFS)

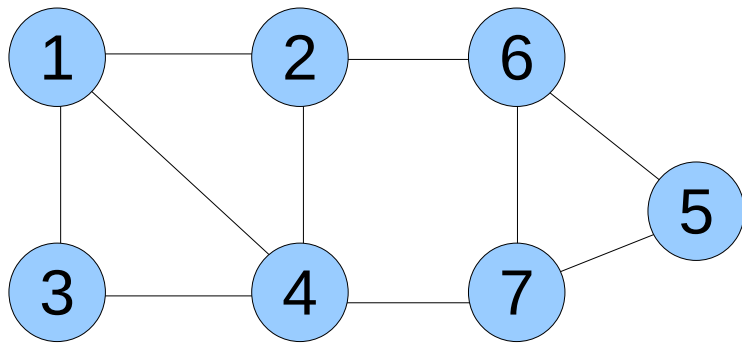
- Analisar vértices descobertos mais antigos primeiro



- Origem: vértice 1
- Em que ordem os vértices são *descobertos*?

Assumir que vizinhos são descobertos em ordem crescente de seus identificadores

Exemplo

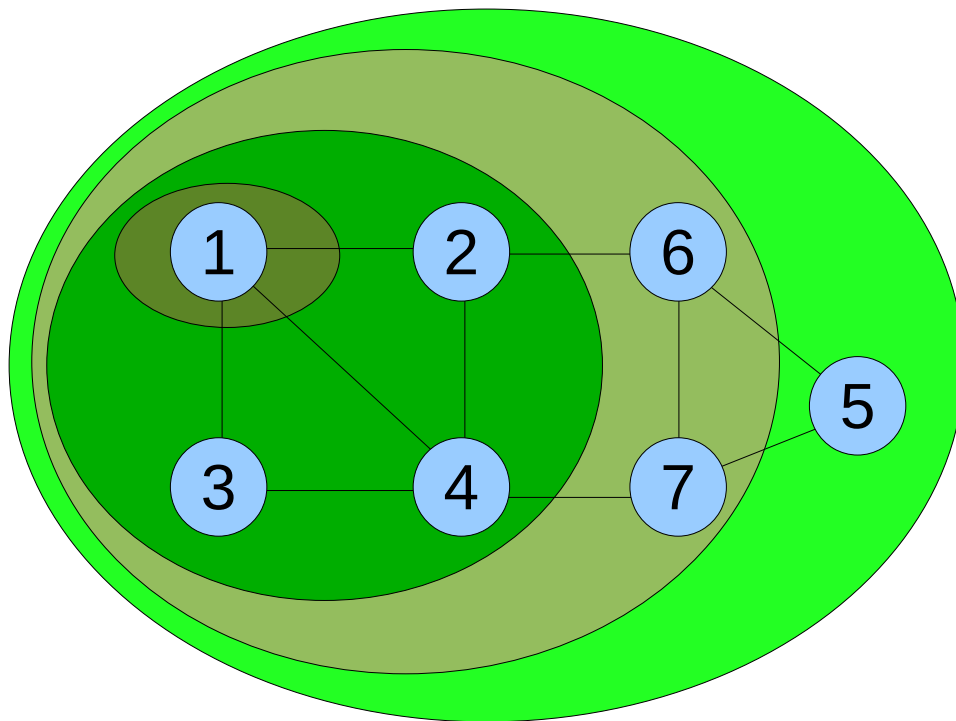


- Iniciar com vértice 1
- Analisar mais antigo primeiro
- Ordem que vértices são adicionados no conjunto descoberto
- 1,2,3,4,6,7,5

Passo	Descoberto	Explorado	Desconhecido
0	1	-	2,3,4,5,6,7
1	1,2	-	3,4,5,6,7
2	1,2,3	-	4,5,6,7
3	1,2,3,4	-	5,6,7
4	2,3,4	1	5,6,7
5	2,3,4,6	1	5,7
6	3,4,6	1,2	5,7
7	4,6	1,2,3	5,7
8	4,6,7	1,2,3	5
9	6,7	1,2,3,4	5
10	6,7,5	1,2,3,4	-
11	7,5	1,2,3,4,6	-
12	5	1,2,3,4,6,7	-
13	-	1,2,3,4,6,7,5	-

Interpretação

- Onda é propagada à partir da raiz (origem)
- Onda expande em círculos, descobrindo vértices vizinhos dos vizinhos...

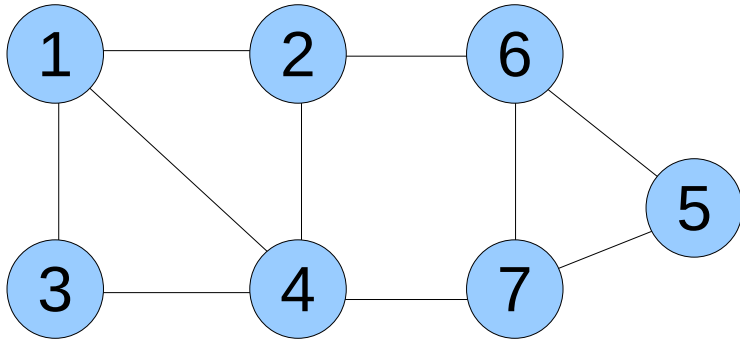


Busca em Largura!

Camadas

- L_i : conjunto de vértices pertencentes a camada $i=0, 1, 2, \dots$
- L_0 : vértice origem
- L_{i+1} : conjunto de vértices que **não fazem parte** de uma camada anterior e que **possuem uma aresta** com algum vértice da camada L_i
- Conjuntos L_i dependem apenas do vértice de origem e do grafo

Camadas: Exemplo



■ L_0 : vértice 2



L_0 : 2

■ L_i : ?

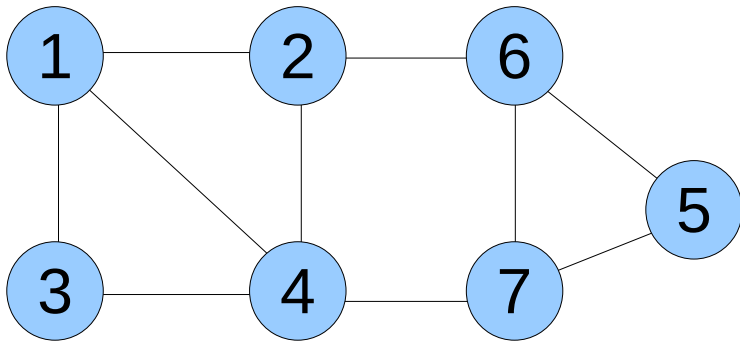
L_1 : 1, 4, 6

L_2 : 3, 5, 7

L_3 : vazia

Distância

- Comprimento do **menor** caminho simples entre dois vértices
- Função $d(u,v)$, onde u e v são vértices
 - infinito quando não há caminho



Exemplo

- $d(1,2) = ?$
- $d(6, 3) = ?$
- $d(7, 1) = ?$

Camadas e Distância



- Qual é a relação entre camadas e distância?
- Vértices pertencentes a camada L_i têm distância i da origem
- Prova: por indução em i
 - hipótese: vértices da camada L_i têm distância i
 - indução: vértices da camada L_{i+1} têm distância $i+1$
 - são vizinhos de vértices em L_i que possuem distância i , e não são vizinhos de vértices de camadas inferiores a i

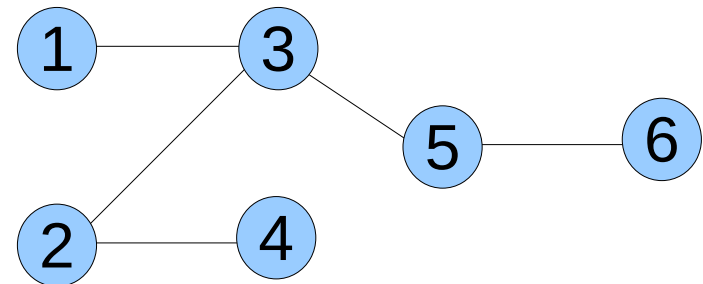
Grafo Acíclico

- Grafo acíclico é um grafo que não possui ciclos
 - lembram do ciclo? Caminho simples que inicia e termina no mesmo vértice

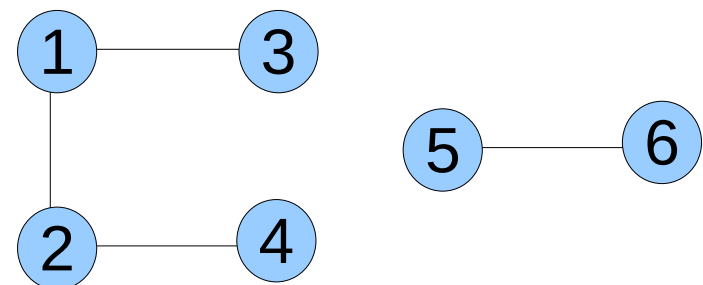
- Exemplo:

- K_4 é acíclico?

É acíclico?

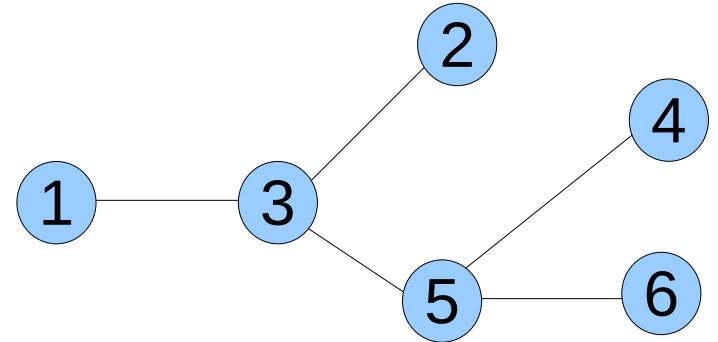


É acíclico?



Árvores

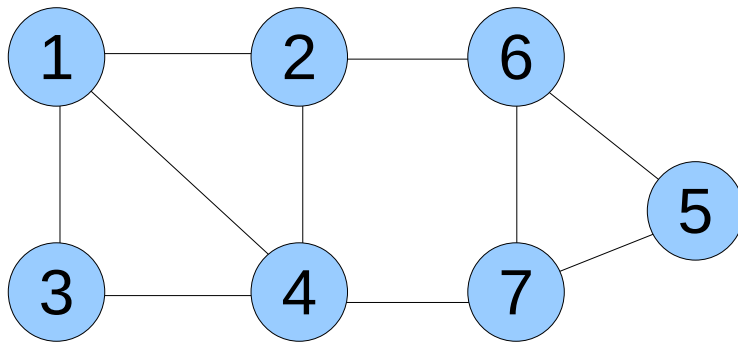
- Uma árvore é um grafo acíclico conexo
 - definição de árvore!



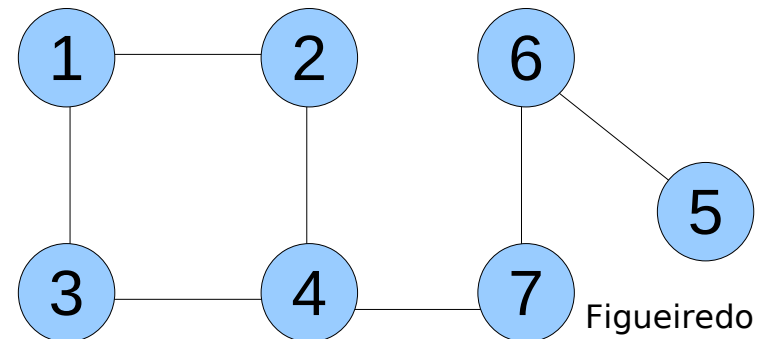
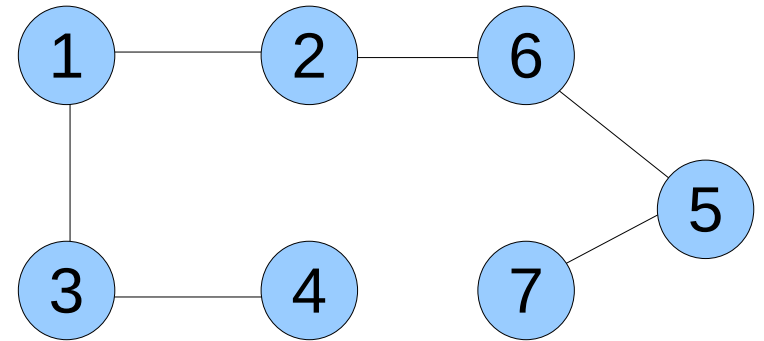
- Folha: vértice com grau 1
- Raiz: um determinado vértice
 - define orientação na árvore (pai, filhos, descendentes e acenstrais)
- Quantos caminhos (simples) existem entre dois vértices de uma árvore?
- Quantas arestas possui uma árvore com n vértices?

Árvore Geradora

- Subgrafo que contém **todos** os vértices de G e é uma **árvore**
 - em inglês, “spanning tree”
 - árvore que “alcança” todos os vértices



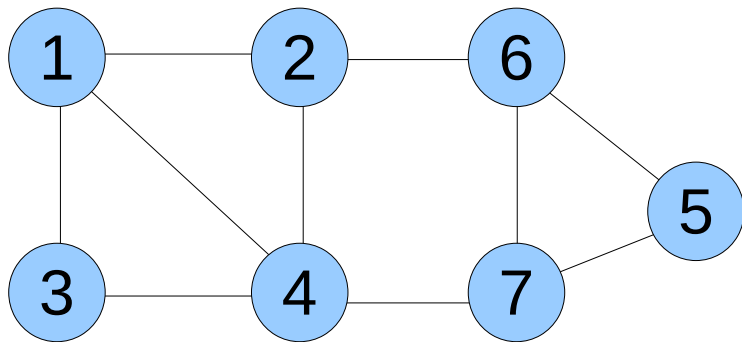
É árvore geradora?



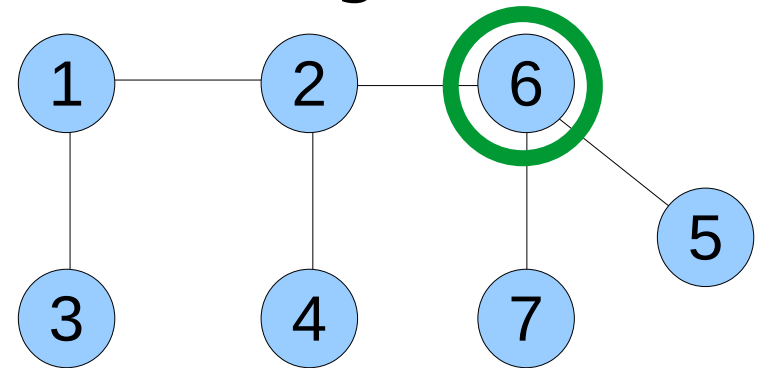
Árvore Geradora da BFS

- *Árvore induzida* pela busca em largura
 - Raiz: vértice de origem
 - Pai de v : vértice que descobriu v

raiz: nó 6



Árvore geradora

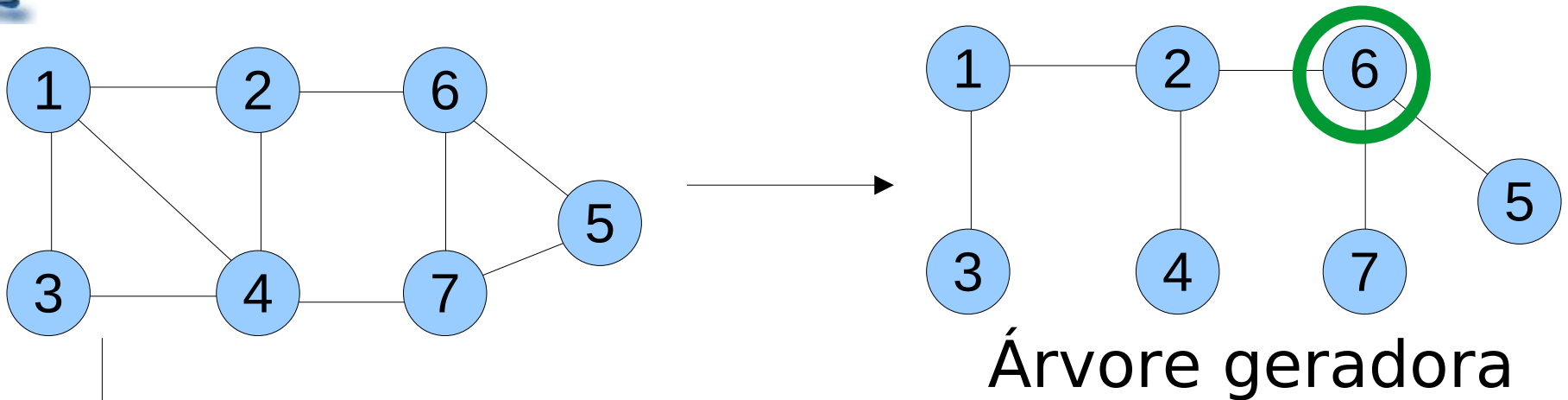


- Ordem da busca *define* árvore
 - vértice que descobriu um desconhecido

Camadas e Árvore Geradora



- Qual é a relação entre camadas L_i e a árvore geradora?



$L_0 : 6$

$L_1 : 2, 5, 7$

$L_2 : 1, 4$

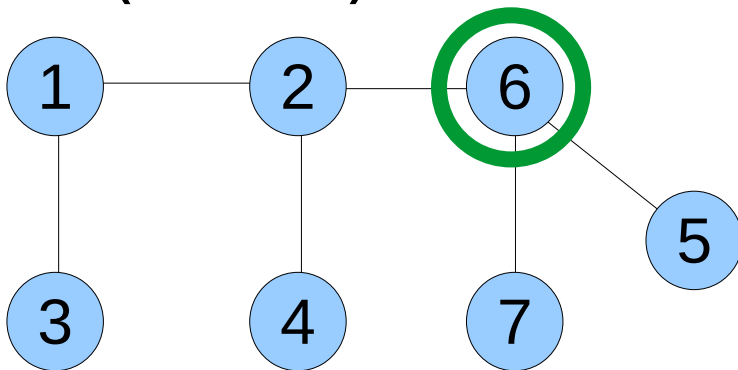
$L_3 : 3$

- Conjunto $L_i =$ vértices no nível i da árvore
 - vértice está no nível i se o pai dele está no nível $i-1$
- BFS calcula distâncias!

Menor Caminho

- Árvore geradora define menor caminho
- Dado vértice v (raiz) e outro vértice w qq.
 - menor caminho definido pela sequência de pais de w até a raiz

Árvore geradora
(raiz 6)



- menor caminho entre 3 e 6?
- menor caminho entre 3 e 7?
- **Cuidado!** Árvore define menor caminho para raiz!

Poderosa BFS

- Determina se existe caminho entre dois vértices
- Calcula distância entre dois vértices
 - nível do vértice na árvore geradora
- Determina (um) menor caminho entre dois vértices
 - sequência de vértices na árvore geradora
- Calcular para dois vértices tem mesmo custo (pior caso) que calcular entre um

Algoritmo na próxima aula!