

Grafos – Aula 3

Roteiro

- Representando grafos
- Matriz e lista
- Operações básicas
- Tempos de acesso

Grafo

■ Grafo $G=(V, E)$

- V = conjunto de vértices, cada vértice representado por um número natural

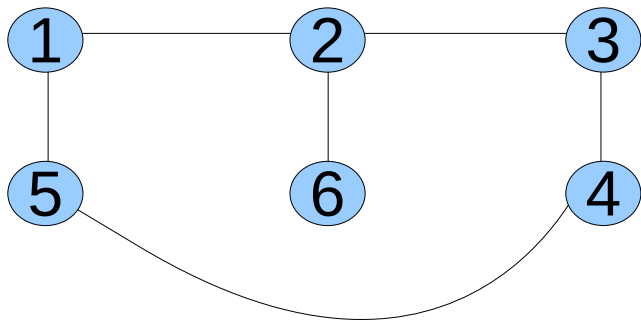
- E = conjunto de arestas (pares não-ordenados, ou pares ordenados)

representação
matemática
de grafos

■ Exemplo

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

- $E = \{(1,2), (1,5), (2,3), (2,6), (3,4), (5,4)\}$



Representação
visual de grafos

Representando Grafos

- Como representar grafos no computador?

Estrutura de dados

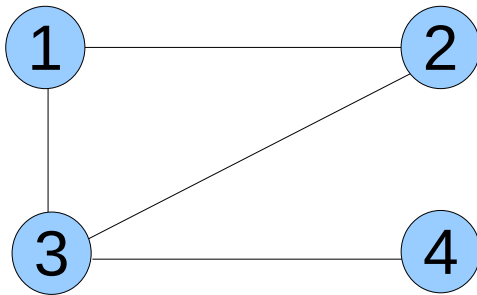
- Estruturas de dados fundamentais
 - vetor
 - matriz
 - lista
 - tabela hash (dicionário)

Representação via Matriz

- Como representar utilizando matrizes?
- **Idéia:** associar vértices às linhas e colunas da matriz
 - elemento da matriz indica se há aresta
- **Matriz de adjacência**
- Matriz $n \times n$ (n é número de vértices)
 - $a_{ij} = 1$, se existe aresta entre vértices i e j
 - $a_{ij} = 0$, caso contrário.

Matriz de Adjacência

Exemplo



	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	0
3	1	1	0	1
4	0	0	1	0

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	0
2	1	0	1	0	1
3	1	1	0	1	0
4	0	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0

?

**Algumas
propriedades?**

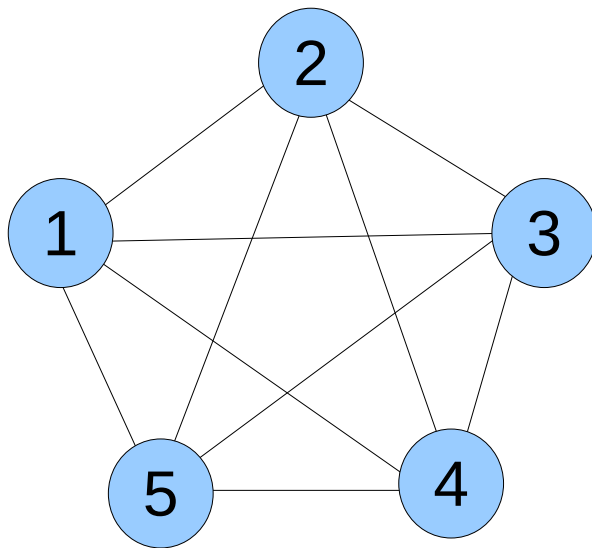
Representação via Matriz

- **Matriz de adjacência**

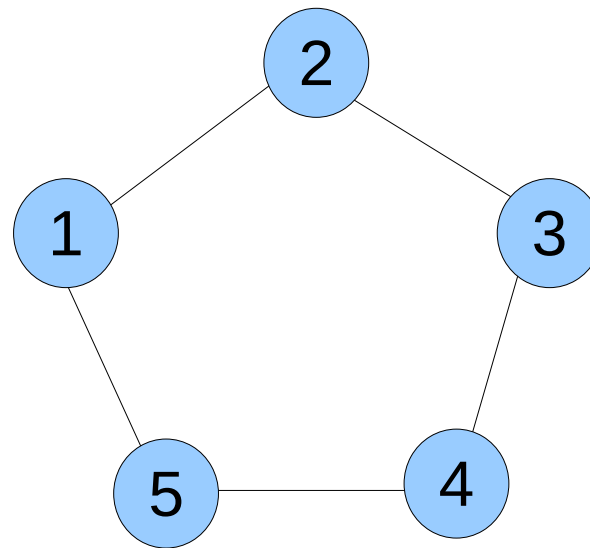
- Grafo completo?

- Grafo em ciclo?

K_5



C_5

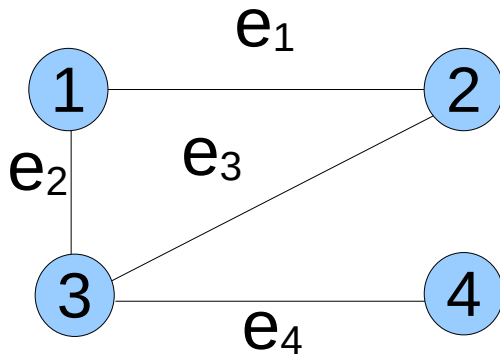


Matriz de Incidência

- **Idéia:** associar vértices às linhas e arestas às colunas
 - elemento da matriz indica se aresta incide sobre o vértice
 - precisa enumerar as arestas do grafo
- **Matriz de incidência**
- Matriz $n \times m$ (n vértices, m arestas)
 - $a_{ij} = 1$, se vértice i incide sobre aresta j
 - $a_{ij} = 0$, caso contrário.

Matriz de Incidência

Exemplo



	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄
1	1	1	0	0
2	1	0	1	0
3	0	1	1	1
4	0	0	0	1

	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆
1	1	1	0	0	0	1
2	1	0	1	1	1	0
3	0	1	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1	0
5	0	0	1	0	0	1

→ ?

**Algumas
propriedades?**

Custo de Memória

- Quanto espaço (memória) precisamos, em função de n (vértices) e m (arestas)?
- Matriz de adjacência ← n^2 posições
- Matriz de incidência ← nm posições
- Quantos bytes (ou bits) por posição?
 - 1 bit (no mínimo), 1 byte em geral
- Exemplos
 - $n=10^4 \rightarrow 10^8$ posições $\rightarrow 10^8$ bytes = 100MB
 - $n=10^5 \rightarrow 10^{10}$ posições $\rightarrow 10^{10}$ bytes = 10GB
 - $n=10^6 \rightarrow 10^{12}$ posições $\rightarrow 10^{12}$ bytes = 1TB

Complexidade quadrática, não escala!

Grafos Esparsos

- Considere grafos grandes e esparsos
 - *grande*: muitos vértices
 - *esparso*: relativamente poucas arestas
- Exemplo no Facebook: $n=10^9$, $m=10^{11}$
 - grau médio = $2m/n = 200$
- Matriz formada principalmente de zeros!

Grande consumo de memória (desnecessário)!

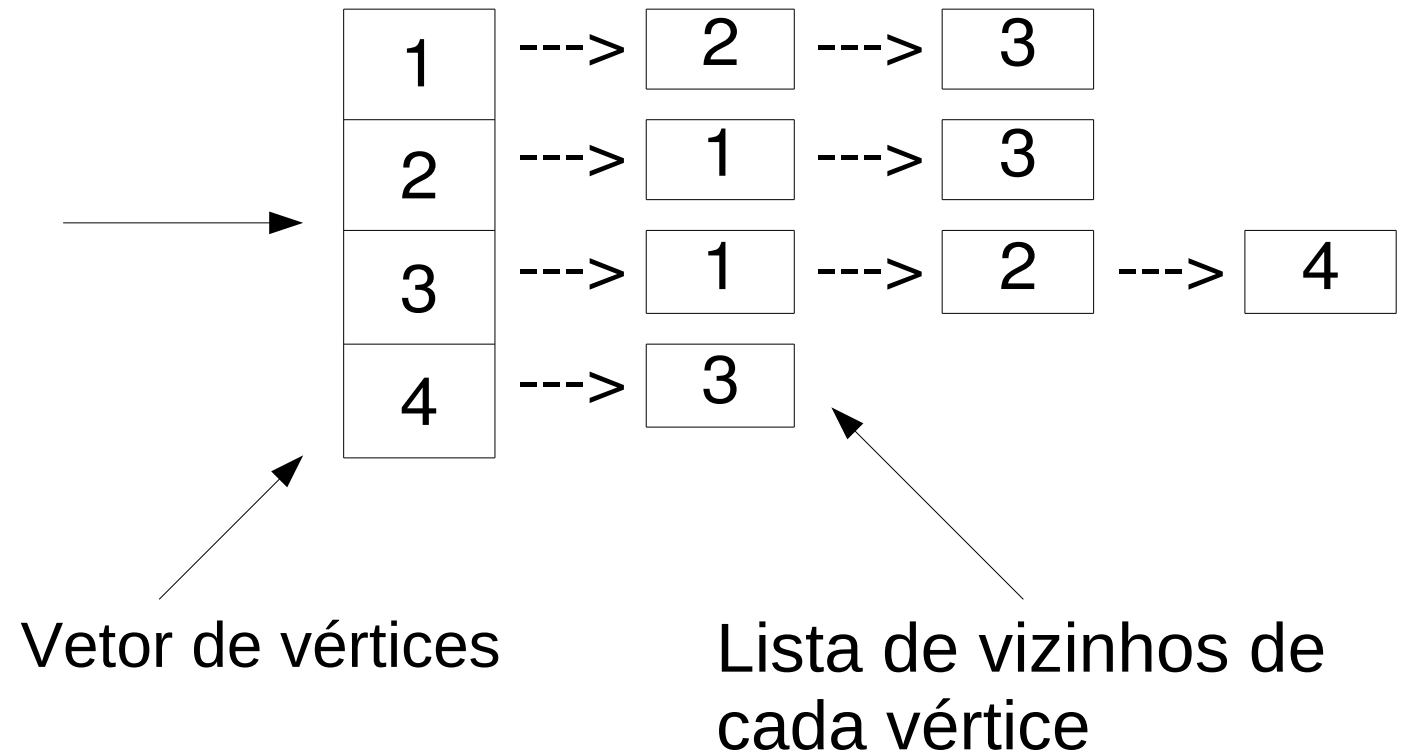
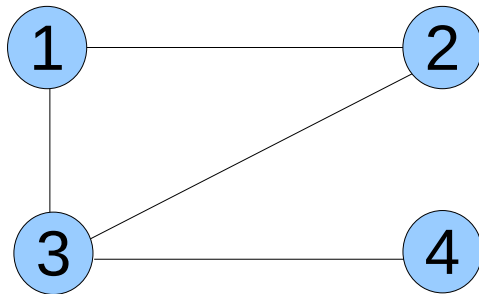
- Como resolver este problema?

Representação via Listas

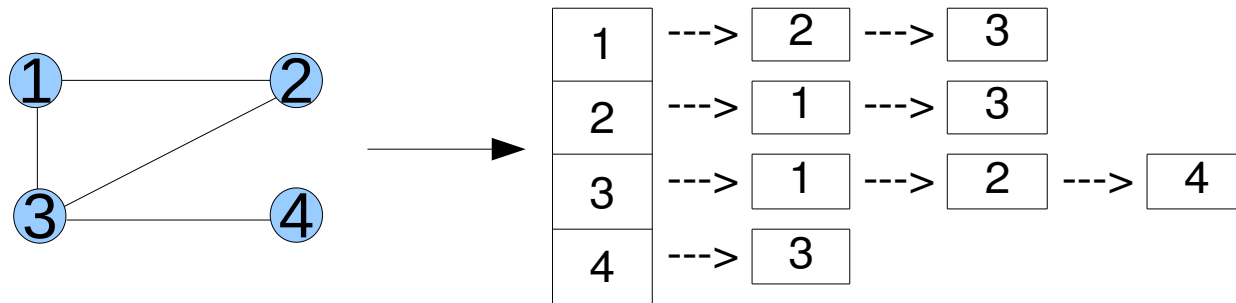
- **Idéia:** associar a cada vértice uma lista de vértices adjacentes (lista de vizinhos)
- **Lista de adjacência**
- Vértices associados a um vetor de dimensão n (número de vértices no grafo)
- Cada vértice possui uma lista de vértices adjacentes

Lista de Adjacência

■ Exemplo



Custo de Memória



- Cada aresta ocorre duas vezes na estrutura de dados
 - ex. (1,2) está na lista de 1 e na lista de 2
- Memória necessária será proporcional a 2 vezes o número de arestas
 - manter índice do vértice, mais ponteiro da lista
- Muito eficiente
 - grafo com 2 milhões de vértices e 100 milhões de arestas $\rightarrow 2 * 10^7 * 12 \text{ bytes} = 240\text{M bytes}$

Vantagens e Desvantagens

- Vantagem: listar todos os vizinhos de um vértice
 - basta percorrer a lista de vizinhos
- Desvantagem: decidir se um vértice é vizinho de outro
 - precisa percorrer toda a lista no pior caso

Tempo de acesso depende da operação

Tempo de Acesso

■ Vetor x Lista (código em Java)

```
int n = 1000000;  
Vector vec = new Vector(n);
```

```
for(int i = 1; i <= n; i=i+1)  
    vec.add((String) i);
```

```
String p = vec[n-1];
```

“constante”: não depende de n

```
int n=1000000;  
LinkedList ll = new LinkedList();
```

```
for(int i = 1; i <= n; i=i+1)  
    ll.add((String) i);
```

```
String p = ll.get(n-1);
```

“linear”: depende linearmente de n, 1000000 vezes maior!

■ Quanto tempo para executar última linha?

Por que?

Vetor x Lista

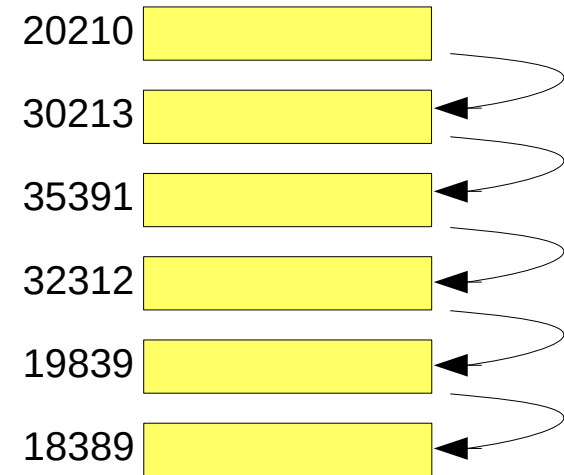
- Memória do computador organizada como uma matriz



Vetor: alocação contígua em memória



Lista: alocação elemento a elemento, ponteiro para próximo



- Como “chegar” no k-ésimo elemento?
 - qual endereço do k-ésimo elemento?

Capacidade: 4GB

Vetor x Lista

■ Como chegar no k-ésimo elemento?

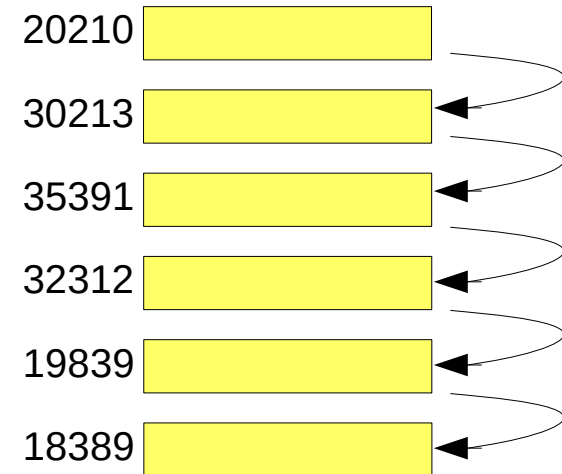
Vetor



- Variável *vec* tem o endereço base, onde começa o vetor na memória
- Cada elemento tem tamanho (*L*)
- Endereço do elemento *k*:
 $base + (k-1)*L$

Constante!

Lista



- Variável *ll* tem o endereço do primeiro elemento
- Cada elemento tem endereço do próximo elemento
- Endereço do elemento *k*:
tem que percorrer a lista!

Proporcional a *k*!

Vantagens/Desvantagens

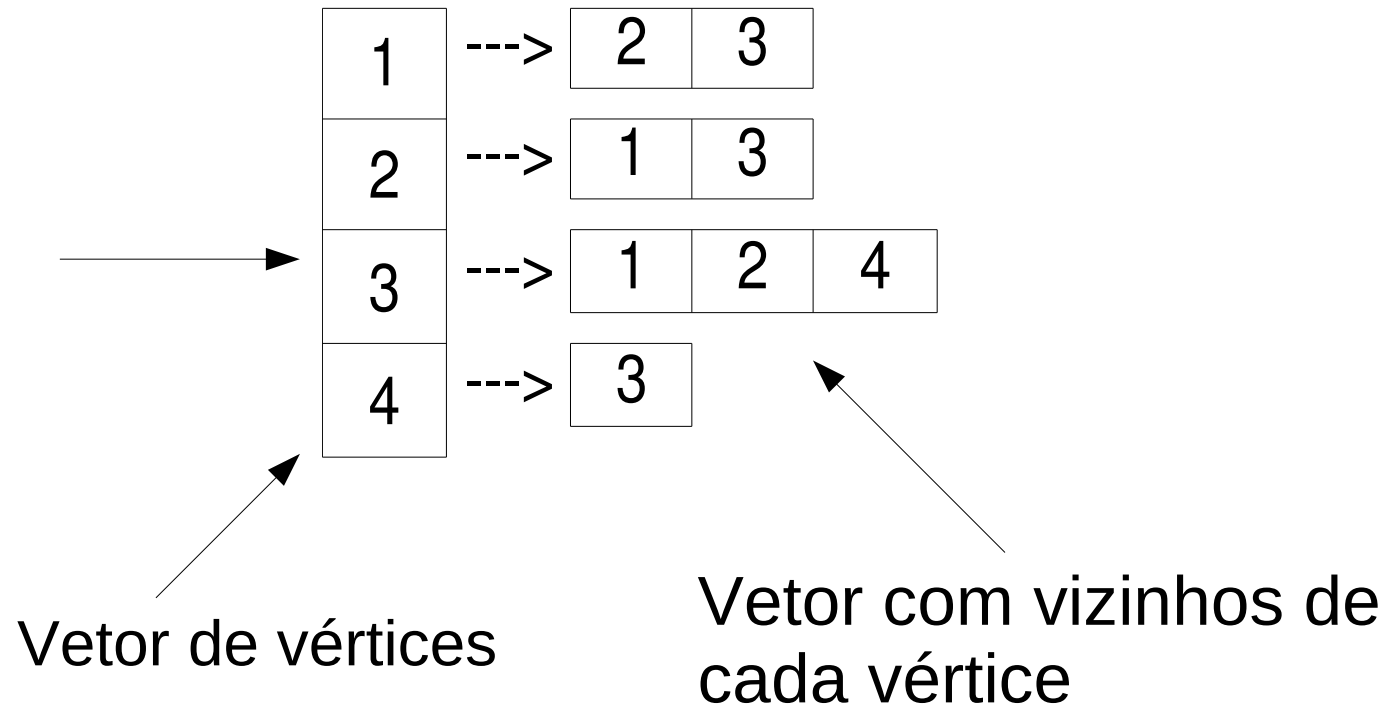
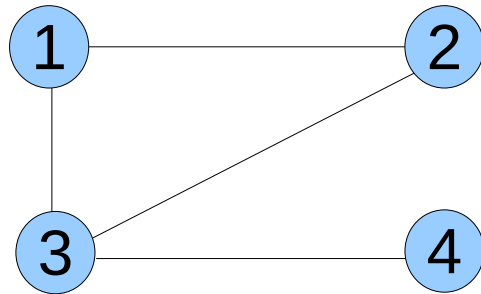
	Matriz	Lista
■ Tempo de execução		
■ Inserir aresta?	$O(1)$	$O(1)$
■ Remover aresta?	$O(1)$	$O(g_{\max})$
■ Testar adjacência (v_1 e v_2 são vizinhos)?	$O(1)$	$O(g_{\max})$
■ Listar vizinhos de v ?	$O(n)$	$O(g_{\max})$
■ Descobrir vértice de maior grau?	$O(n^2)$	$O(m)$

$O(1)$ = tempo constante

g_{\max} = maior grau do grafo

Vetor de Adjacência

■ Exemplo



- Parecida com lista de adjacência
- Mesma complexidade (memória e tempo)
 - vantagens na prática

Por que?

Tabela Hash

- Tabela hash (dicionário) com as aretas do grafo
 - aretas são a chave, valor é uma constante
- Aresta é um par não ordenado
 - ordem importa para a chave
 - convenção na chave: “menor maior”
- Exemplo:
 - $(1,2) \rightarrow$ “1 2” chave, $(4,2) \rightarrow$ “2 4” chave
 - `arestas.add(“1 2”) = 1`
 - `If (arestas.present(“2 4”)) ...`
- Acesso a tabela hash em tempo constante
- Memória cresce com aretas (ex. $m \log m$)

Vantagens/Desvantagens

	Dicion.	Lista
■ Tempo de execução		
■ Inserir aresta?	$O(1)$	$O(1)$
■ Remover aresta?	$O(1)$	$O(g_{\max})$
■ Testar adjacência (v_1 e v_2 são vizinhos)?	$O(1)$	$O(g_{\max})$
■ Listar vizinhos de v ?	$O(n)$	$O(g_{\max})$
■ Descobrir vértice de maior grau?	$O(n^2)$	$O(m)$

$O(1)$ = tempo constante

g_{\max} = maior grau do grafo

Matriz x Lista x Hash

- Qual é a estrutura mais adequada (ou mais eficiente)?

Depende do algoritmo!

- Memória x Tempo: eficiente em que aspecto?
 - matriz utiliza mais memória que tabela hash que utiliza mais memória que lista
 - matriz ou lista ou tabela hash podem levar menos tempo

Implementarão matriz e lista!