

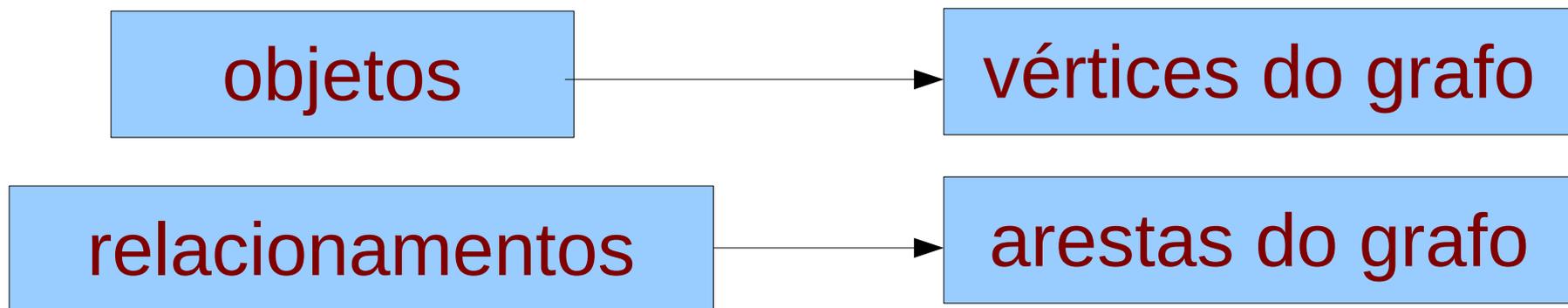
Grafos – Aula 2

Roteiro

- Definições importantes
- Algumas propriedades
- Classes de grafos

Grafo

- Abstração que permite codificar relacionamentos entre **pares** de objetos



Exemplos?

Grafo

- Abstração que permite codificar relacionamentos entre pares de objetos

**Como representar um grafo?
(sem desenhar)**



Conjuntos (ou matrizes)

- Conjunto de objetos e conjunto de pares relacionados

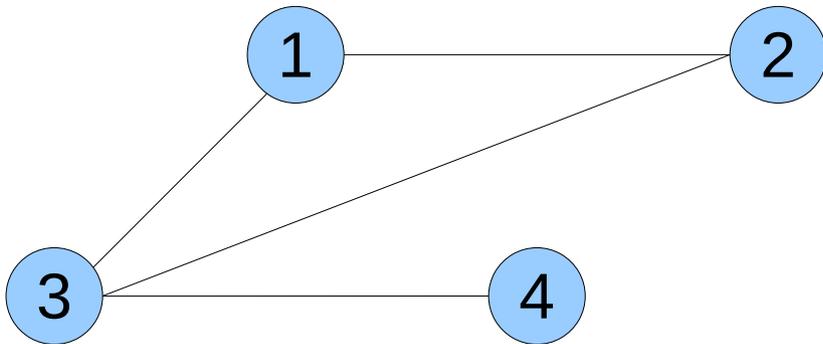
Grafo

- Grafo $G = (V, E)$
- $V =$ conjunto de objetos
 - chamaremos de vértices ou nós
- $E =$ conjunto de pares relacionados
 - chamaremos de arestas
 - par não-ordenado: $(a,b) = (b,a)$, simétrico
 - par ordenado: $(a,b) \neq (b,a)$, assimétrico

- Exemplo: $G = (V, E)$
 - $V = \{1, 2, 3, 4\}$
 - $E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)\}$

Representação Gráfica

- Desenho de G (o que vimos até agora)
 - representação gráfica dos conjuntos
- Exemplo: $G = (V, E)$
 - $V = \{1, 2, 3, 4\}$
 - $E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)\}$



Adjacência e Incidência

- Vértices adjacentes são vértices “vizinhos”
 - mais precisamente...
- Dado grafo $G = (V, E)$
- Dois vértices a e b são **adjacentes** se existe $e = (a, b)$ no conjunto E
- Aresta e é **incidente** aos vértices a e b
- Exemplo: $G = (V, E)$
 - $V = \{1, 2, 3, 4\}$
 - $E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)\}$
 - 4 e 1 são adjacentes?
 - 3 e 2 são adjacentes?

Vértices e Arestas

- Número de vértices de um grafo

- $n = |V|$ ← cardinalidade do conjunto

- Número de arestas de um grafo

- $m = |E|$

- Dado $G = (V, E)$

- Menor número de arestas de G ? → zero

- Maior número de arestas de G ?

- número de pares não ordenados em um conjunto de $n = |V|$ objetos

→ $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leq n^2$

Grau

- Grau de um vértice v
 - número de vértices adjacentes a v
 - função $\text{grau}(v)$
- Exemplo: $G = (V, E)$
 - $V = \{1, 2, 3, 4\}$ ■ $\text{grau}(1) = ?$
 - $E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)\}$ ■ $\text{grau}(4) = ?$
- Dado $G = (V, E)$
 - Grau mínimo de um vértice? \longrightarrow **zero**
 - Grau máximo de um vértice? \longrightarrow **$n - 1$**

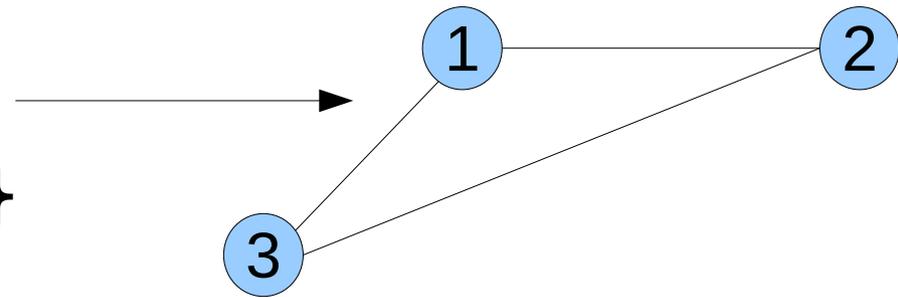
Grafo Regular

- Todos os vértices têm o mesmo grau
 - dizemos ser grafo r -regular, com grau r

- Exemplo: G é 2-regular, $n = 3$

- $V = \{1, 2, 3\}$

- $E = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$



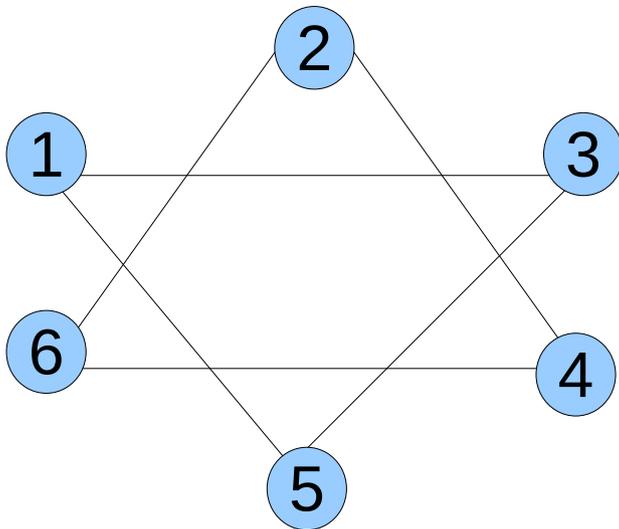
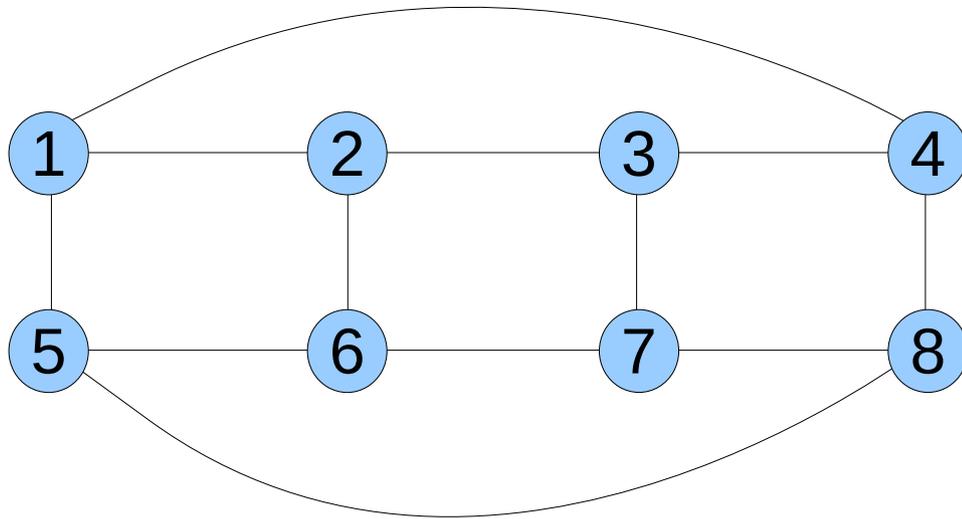
- Dado $G = (V, E)$ r -regular

- Quantas arestas tem G ? (em função de n e r)

$$|E| = \frac{nr}{2} \quad \leftarrow \text{Por que?}$$

Grafo Regular

■ São regulares?



■ É possível ter qualquer combinação de n e r ?

Grafo Completo

- Aresta presente entre cada par de vértices
 - todos os vértices tem grau máximo
- Notação de grafo completo
 - K_n onde n é o número de vértices

Exemplos

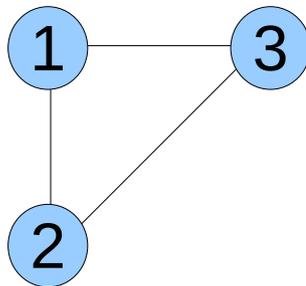
K_1



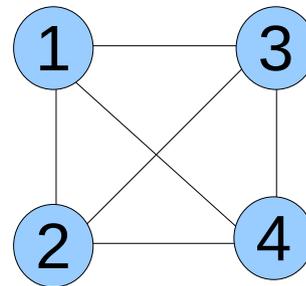
K_2



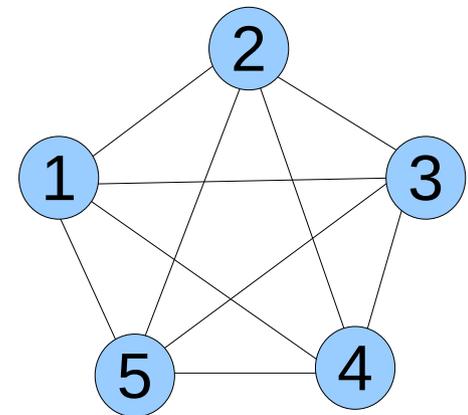
K_3



K_4



K_5



- Quantas arestas têm K_n ?

Caminho

- Como definir “caminho” em um grafo?

- Ex. caminho entre 1 e 7?

- Caminho entre dois vértices

- sequência de vértices adjacentes

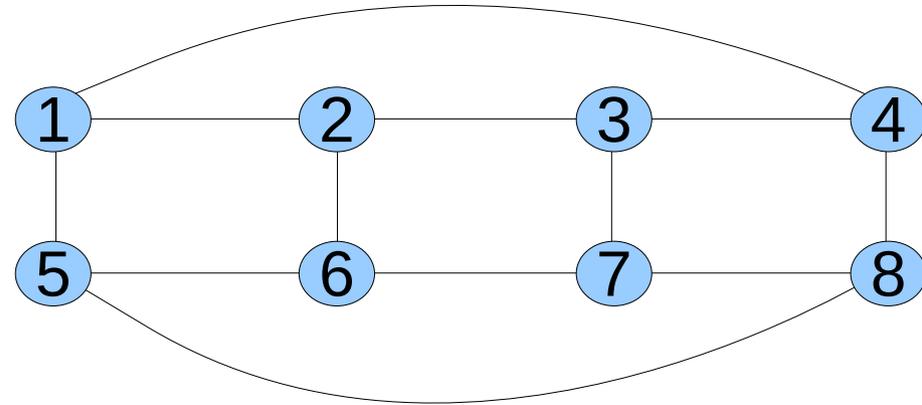
- Caminho entre v_1 e v_k

- sequência v_1, \dots, v_k , tal que $(v_i, v_{i+1}) \in E \quad i=1, \dots, k-1$

- Ex. caminho entre 1 e 7?

- $1, 2, 3, 7 \longrightarrow (1,2), (2,3), (3,7)$

- $1, 5, 6, 2, 6, 7$ é caminho?



Caminho Simples

- Vértices do caminho são distintos

- não há “voltas”

- Ex. caminho entre 1 e 7?

- 1, 5, 6, 2, 6, 7 ← não é caminho simples

- 1, 5, 8, 7 ← é caminho simples

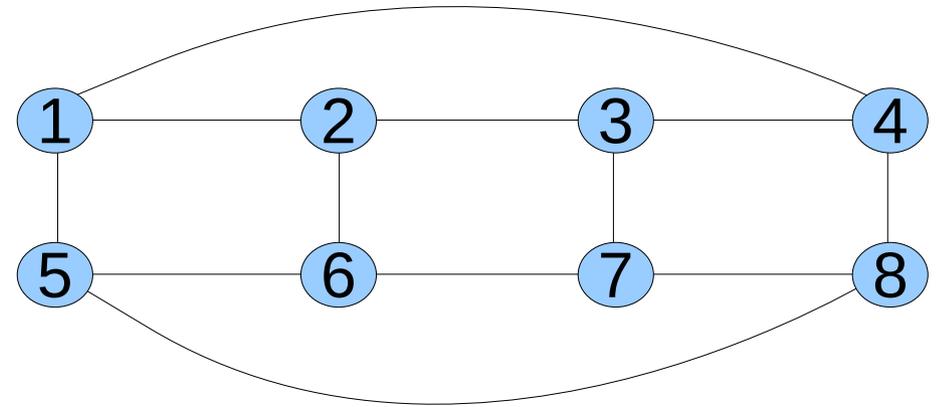
- Comprimento do caminho

- número de arestas que o caminho possui

- Dado $G = (V, E)$

- qual é o menor caminho simples entre dois vértices?

- qual é o maior?



Ciclo

- Caminho simples que começa e termina no mesmo vértice

- $V_1 = V_k$

- Ex. ciclo contendo 5?

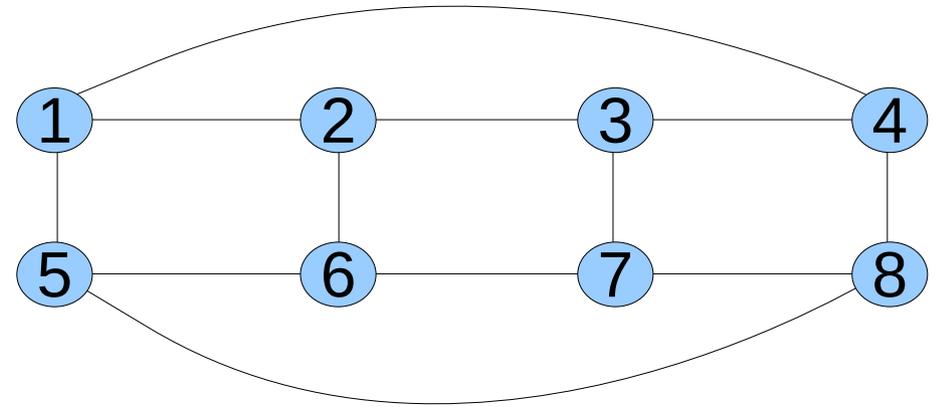
- 5, 1, 2, 3, 7, 6, 5

- 5, 1, 4, 8, 5

- Comprimento do ciclo

- número de arestas que formam o ciclo

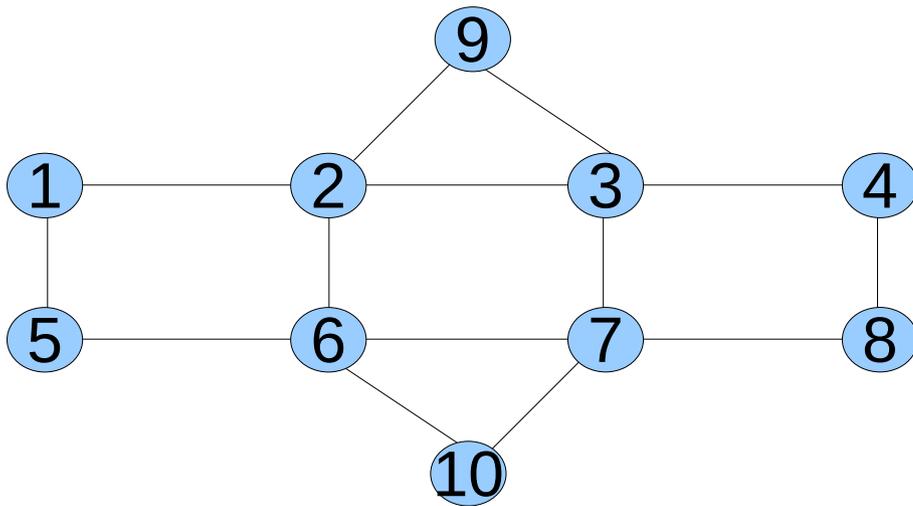
- Circuito: ciclo formado por caminho não necessariamente simples (pode repetir vértices)



- Qual o comprimento do maior ciclo possível de um grafo? E do maior circuito?

Ciclos Especiais

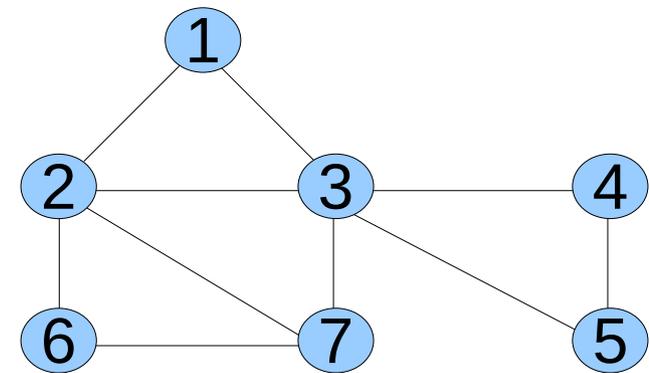
- Ciclo Hamiltoniano: passa exatamente uma vez por todo vértice de G
- Circuito Euleriano: passa exatamente uma vez por toda aresta de G (repete vértices)



- Ciclo Hamiltoniano?
- Ciclo Euleriano?

■ Nem todo grafo possui estes ciclos

■ Problema: determinar se G possui estes ciclos especiais



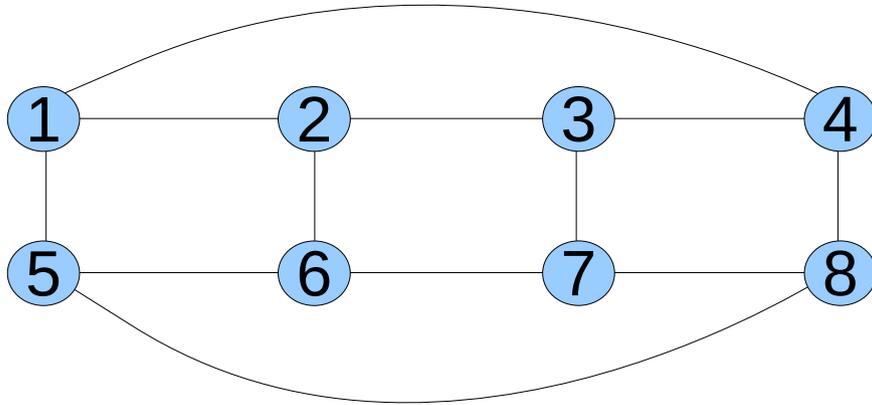
Não possui!

Subgrafo

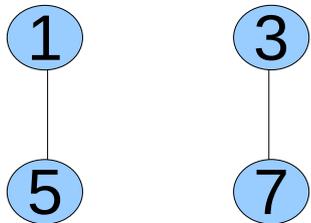
- Um grafo que é “parte” de outro grafo
- Dado $G = (V, E)$
- $G' = (V', E')$ é subgrafo de G se
 - $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$
- Subgrafo induzido: todas arestas de G incidentes a vértices de V' estão em G'
 - subgrafo é determinado por V'

Subgrafo Exemplo

■ Dado $G = (V, E)$

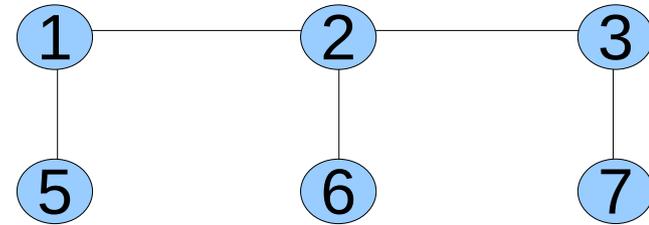


É subgrafo de G ?



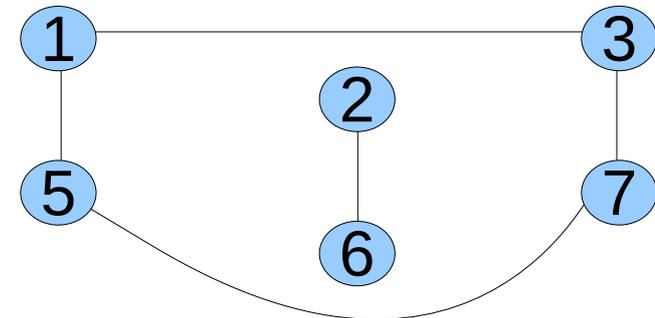
É subgrafo induzido de G ?

É subgrafo de G ?



É subgrafo induzido de G ?

É subgrafo de G ?

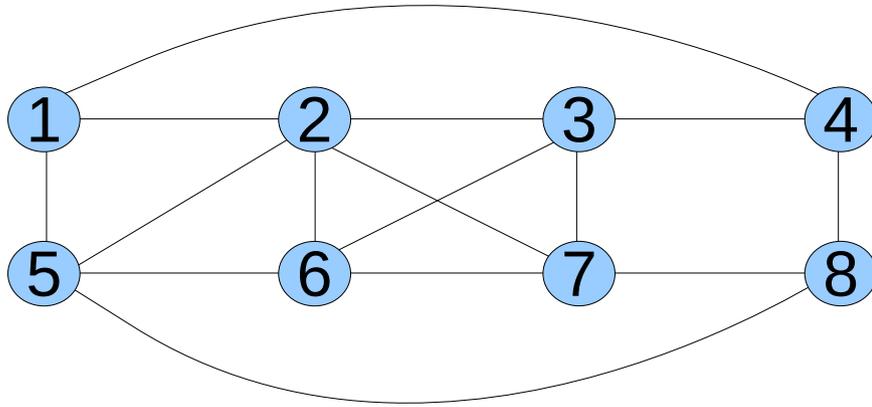


Clique

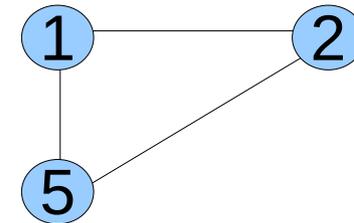
- Um grafo completo “dentro” de outro grafo
- Dado $G = (V, E)$
- $G' = (V', E')$ é uma *clique* de G se
 - G' é subgrafo de G
 - G' é um grafo completo

Clique Exemplo

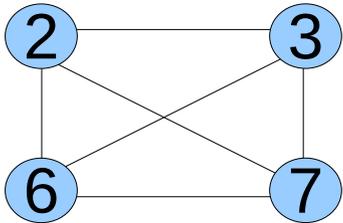
■ Dado $G = (V, E)$



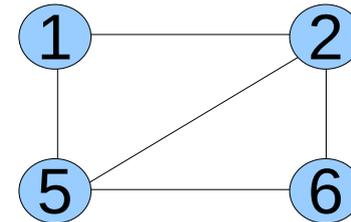
É clique de G ?



■ Qual é o maior clique de G ?



É clique de G ?

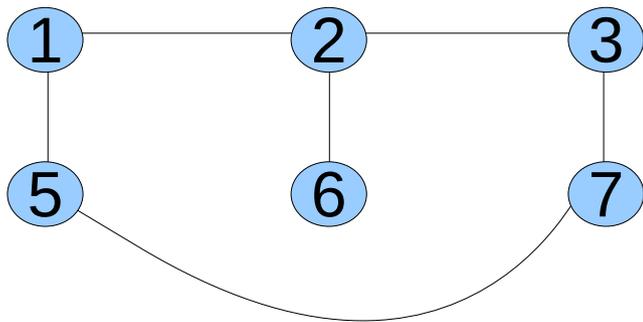


■ Problema: encontrar maior clique de um grafo

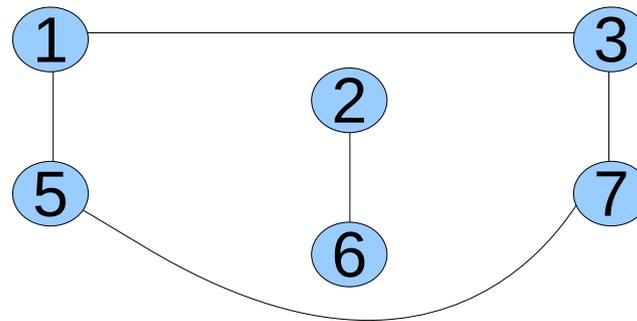
■ Ex. maior conjunto de pessoas que estão todos conectados entre si no Facebook

Conexo

- Grafo está “conectado”
 - como definir mais precisamente?
- Grafo $G=(V, E)$ é conexo se
 - existe caminho entre qualquer par de vértices
- Caso contrário, G é desconexo



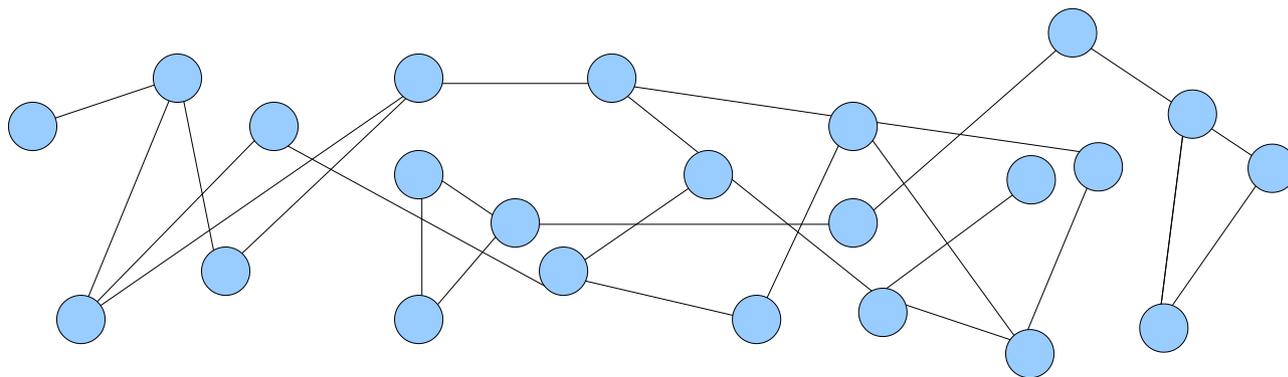
Conexo?



Conexo?

Conexo

- **Problema:** Determinar se um grafo é conexo

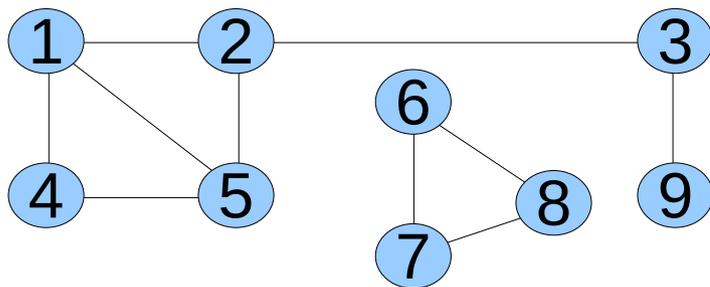


- Veremos algoritmo (muito eficiente)
 - em duas aulas!

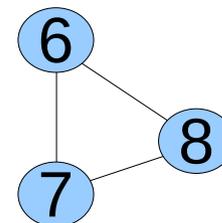
Componentes Conexas

- Maiores subgrafos “conectados” de um grafo
 - grafos conexos possuem uma componente conexa
- Subgrafos maximais de G que sejam conexos
 - *maximal*: maior subconjunto que possui a propriedade, no caso subgrafo conexo

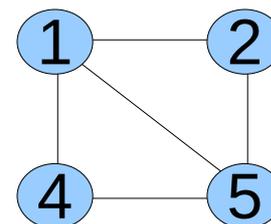
■ Exemplo:



tem duas componentes
conexas



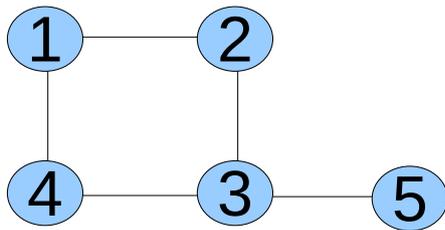
Componente
conexa?



Componente
conexa?

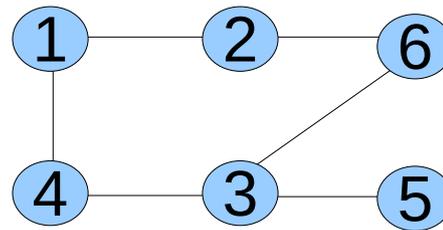
Grafo Bipartido

- **Intuição:** grafo possui dois tipos de vértices, arestas apenas entre tipos diferentes
- G é bipartido se existe V_1 e V_2 ($V = V_1 \cup V_2$) tal que toda aresta (u,v) , u está V_1 e v em V_2
- Exemplo:



Bipartido?

Sim! $V_1 = \{1,3\}$,
 $V_2 = \{2,4,5\}$



Bipartido?

Não! Não conseguimos encontrar V_1 e V_2

- Problema: determinar se um grafo é bipartido