Grafos – Aula 18

Roteiro

- Aplicações do fluxo máximo
- Emparelhamento
- Caminhos distintos
- Corte mínimo
- Segmentação de imagens

Formando Pares

- N rapazes
- Cada rapaz declara interesse em uma ou mais moça

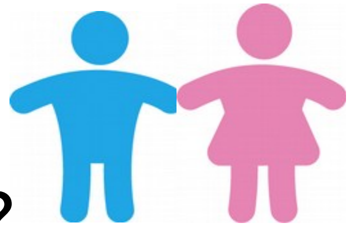
- N moças
- Cada moça declara interesse em um ou mais rapaz

- Casal pode “sair junto” (formar um par) se existe **interesse mútuo**

- **Problema 1:** Qual maior número de pares que podemos formar?

- **Problema 2:** Quais pares devemos formar?

Formando Pares

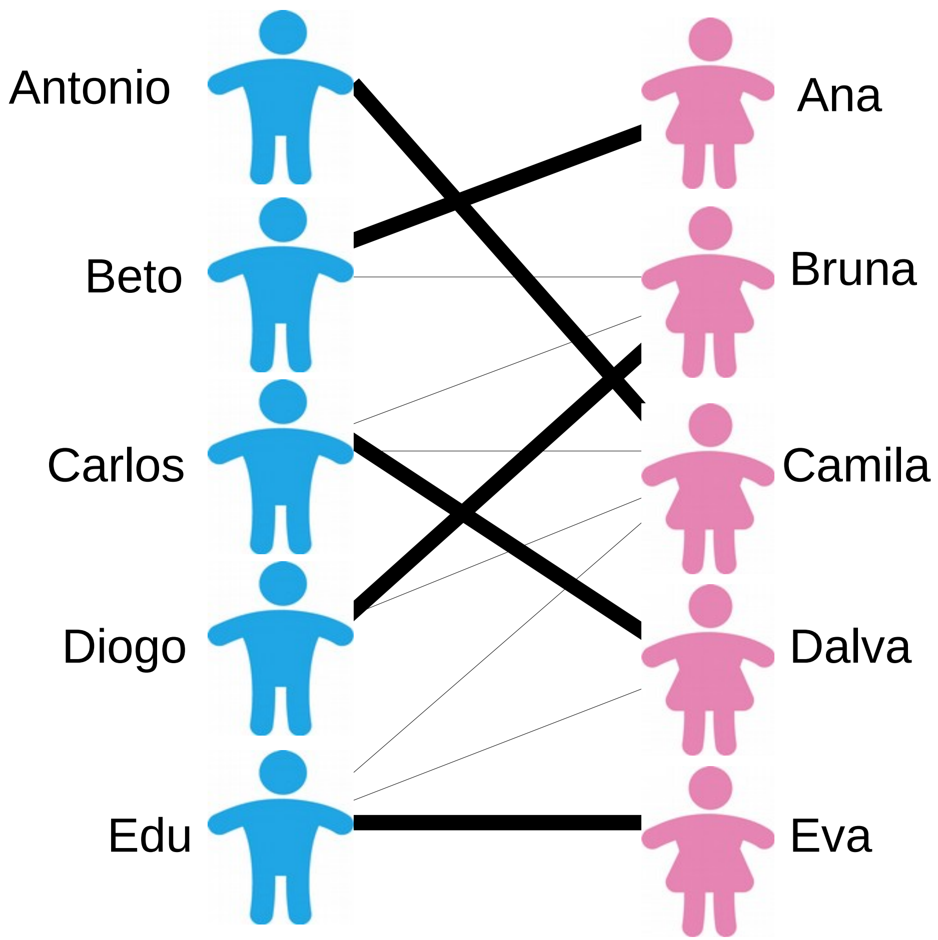


- Como abstrair o problema (usando grafos)?
- Objeto: pessoas (rapazes e moças)
- Relacionamento: interesse mútuo em sair

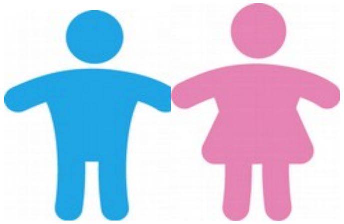
Exemplo:

Ana e Beto
têm interesse
mútuo!

Podemos formar 5 pares?



Problema Genérico



- Emparelhamento em grafos bipartido
- Determinar maior *emparelhamento*
  - emparelhamento: formação de pares
  - perfeito: todos vértices estão emparelhados

Algoritmo para problema genérico!

- Visto em aula passada

Aplicação de Fluxo Máximo

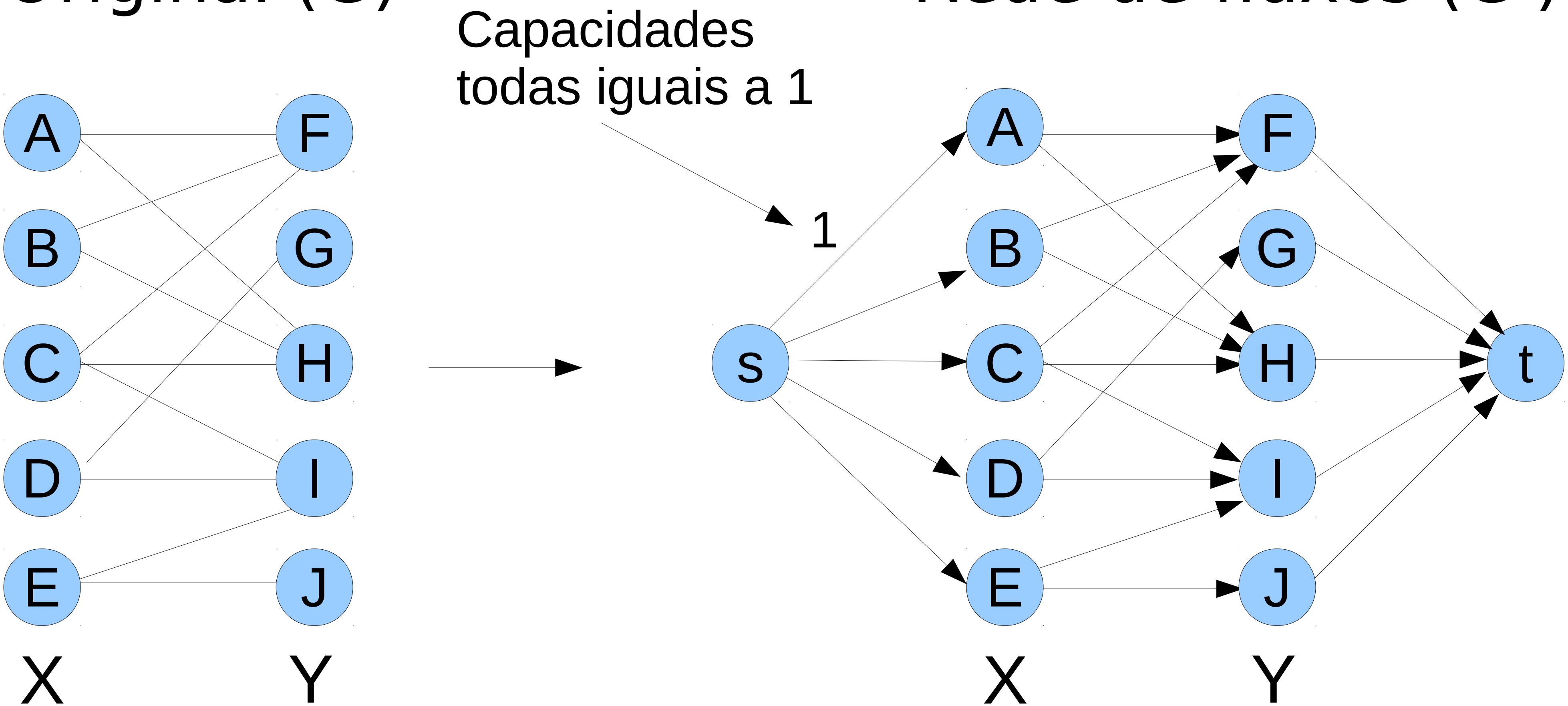
- **Ideia**: Converter problema original em problema de fluxo máximo

Como?

- Construir redes de fluxo direcionada
- Adicionar vértice s
  - conectar ao vértices do conjunto X
- Adicionar vértice t
  - conectar vértices do conjunto Y a t
- Direcionar arestas do grafo original X → Y
- Capacidade 1 em todas as arestas

Exemplo

- Original (G)
- Rede de fluxos (G')



- Hipótese: Fluxo máximo em G' é igual ao maior emparelhamento em G

Provando Hipótese (1/2)

- 1) Emparelhamento com k pares em G tem fluxo k em G'
  - cada par contribui unidade de fluxo
- 2) Fluxo com valor k em G' emparelha k pares em G
  - assumir integralidade de fluxo (fluxo inteiros): f(e) = 0 ou f(e) = 1
  - arestas com fluxo são arestas emparelhadas
- Seja M' conjunto de arestas com f(e) = 1
  - M' possui k arestas

Provando Hipótese (2/2)

- Cada vértice em X incidente em no máximo uma aresta em M'
  - conservação de fluxo, capacidade de entrada
- Cada vértice em Y incidente em no máximo uma aresta em M'
  - conservação de fluxo, capacidade de saída

- 3) Valor do fluxo máximo em G' é igual ao maior emparelhamento em G
  - arestas com $f(e) = 1$ correspondem às arestas do emparelhamento

Complexidade

- Algoritmo original: O(mC)
- Algoritmo modificado: $O(m^2 \log C)$
- Limitante superior para C
  - C = n (capacidade de saída de *s*)
- Custo via algoritmo original: O(mn)
- Algoritmo original tem custo menor
  - valor de C é da ordem de n
- Mesmo custo que algoritmo específico para emparelhamento de aula passada

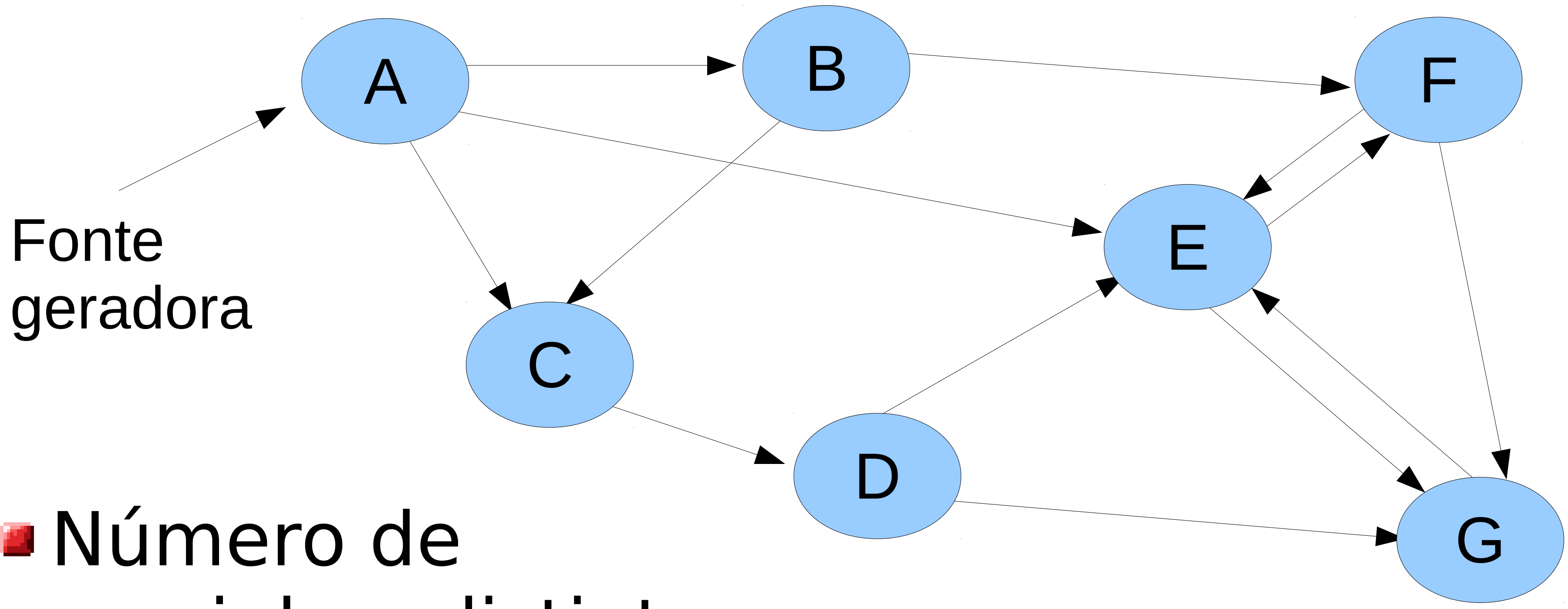
Robustez da Malha Elétrica

- Malha elétrica (distribuição de energia)
- Torres e linhas de transmissão
- **Robustez:** número de caminhos distintos (em linhas)

- **Problema:** Determinar robustez entre fonte geradora e ponto consumidor

Robustez da Malha Elétrica

- Objetos: torres de transmissão
- Arestas: linhas entre torres



- Número de caminhos distintos (em arestas)?

Problema Genérico

- Dado grafo direcionado G
  - e dois vértices s, t quaisquer
- Encontrar número de caminhos distintos
  - em termos de arestas
  - podemos repetir vértices
- Encontrar também os caminhos
  - não somente o número de caminhos

Algoritmo para problema genérico?

Aplicação de Fluxo Máximo

- **Ideia**: Converter problema original em problema de fluxo máximo

Como?

- Construir rede de fluxos
  - s e t são origem/destino da rede
  - remover arestas entrada s, saída t
  - capacidade 1 em todas outras arestas
  - assumir fluxo inteiro

Hipótese e Prova

- Fluxo máximo s-t é igual número de caminhos distintos entre s e t

- Se existirem k caminhos distintos s-t, então fluxo máximo será pelo menos k
  - cada caminho carrega fluxo 1, independente
- Se existir fluxo máximo k, então temos k caminhos distintos
  - Assumir fluxo inteiro
  - Intuição: cada aresta com $f(e) = 1$ pertence a exatamente 1 caminho (algum)

Complexidade

- Algoritmo original: $O(mC)$
- $C = \min(d_s, d_t)$, onde d_i é grau do vértice i
  - $C <= g_{max}$
- Custo via algoritmo original: $O(mg_{max})$
- Custo menor via algoritmo original
  - C é da ordem do maior grau

Grafos Não-Direcionados

- Considerar grafos não-direcionados
  - e dois vértices quaisquer s, t
- Número de caminhos distintos entre eles?
  - em termos de arestas
- Quais os caminhos entre eles?
  - e não só o número

Como estender modelo anterior?

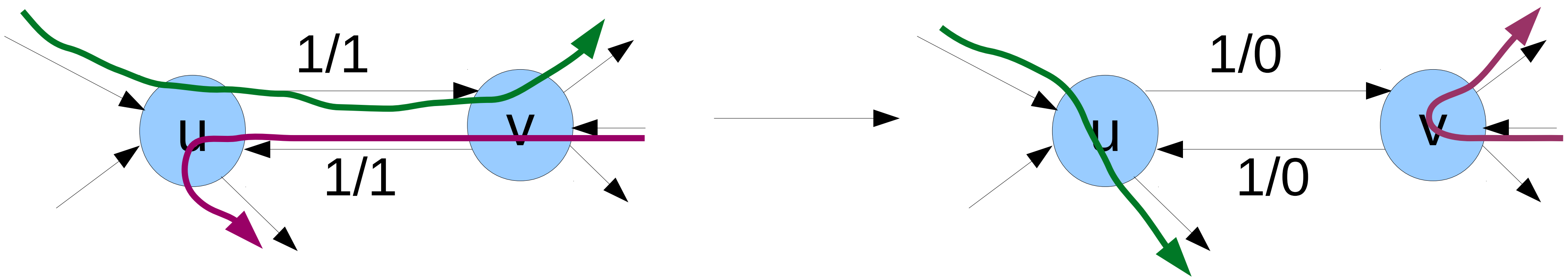
Aplicação de Fluxo Máximo

- Construir rede de fluxos direcionada
- Para cada aresta (u, v) original
  - adicionar aresta (u, v) direcionada
  - adicionar aresta (v, u) direcionada
- Continuar como no caso direcionado
  - remover arestas entrando s e saindo t, capacidade 1 em todas arestas, assumir fluxos inteiros
- **Problema**: apenas uma das arestas (u,v) ou (v,u) pode ser utilizada
  - aresta é única no grafo não-direcionado

Aplicação de Fluxo Máximo

- Problema não será problema!
- Fluxo máximo existe utilizando aresta em apenas **uma** das direções

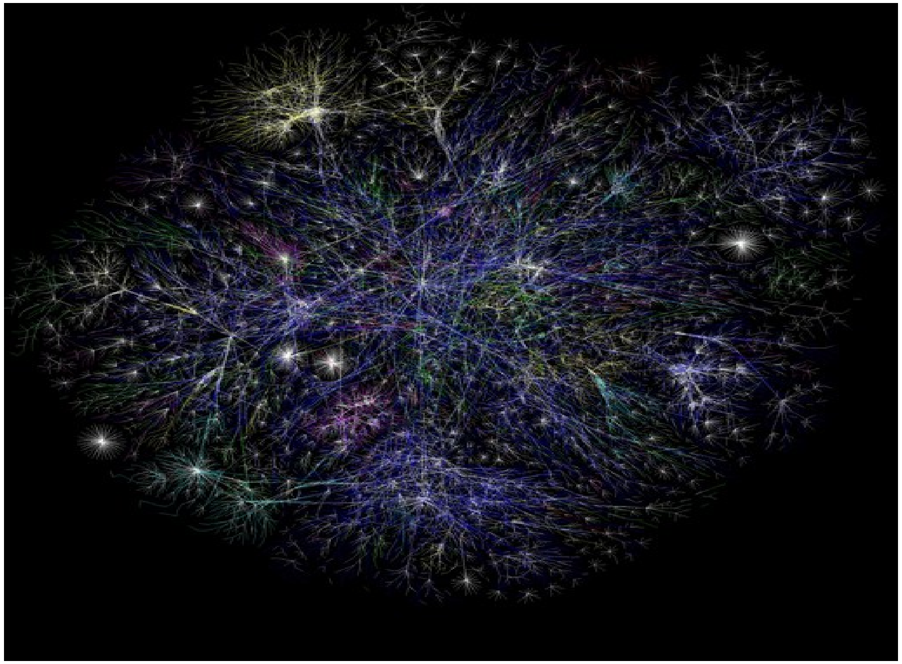
- Supor duas direções sendo utilizadas
- Novo fluxo onde nenhuma das duas é utilizada tem mesmo valor e é um fluxo



Figueiredo 2021

Conectividade na Internet

- Internet: rede de redes
- Conectividade entre AS (sistemas autônomos)
- **Robustez**: conectividade global



- **Problema:** Determinar robustez da Internet
  - Número mínimo de enlaces que precisam falhar para desconectar a rede

Problema Genérico

- Problema do corte mínimo em grafos não-direcionados
- **Corte:** conjunto de arestas que se removidas “desconectam” o grafo
  - induzem mais de uma componente conexa
- Tamanho do corte: número de arestas que o compõem
- Corte mínimo: corte com o menor número de arestas possível

Algoritmo para problema genérico?

Aplicação de Fluxo Máximo

- **Ideia**: Converter problema original em problema de fluxo máximo

Como?

- Escolher dois vértices s e t quaisquer
- Construir rede de fluxos s-t
  - Como no caso anterior, caminhos distintos
- Obter corte mínimo entre s-t
  - corte mínimo é igual ao fluxo máximo, que é igual ao número de caminhos distintos
- Corte mínimo global?

Aplicação de Fluxo Máximo

- **Problema**: corte mínimo s-t não necessariamente é corte mínimo global

Solução?

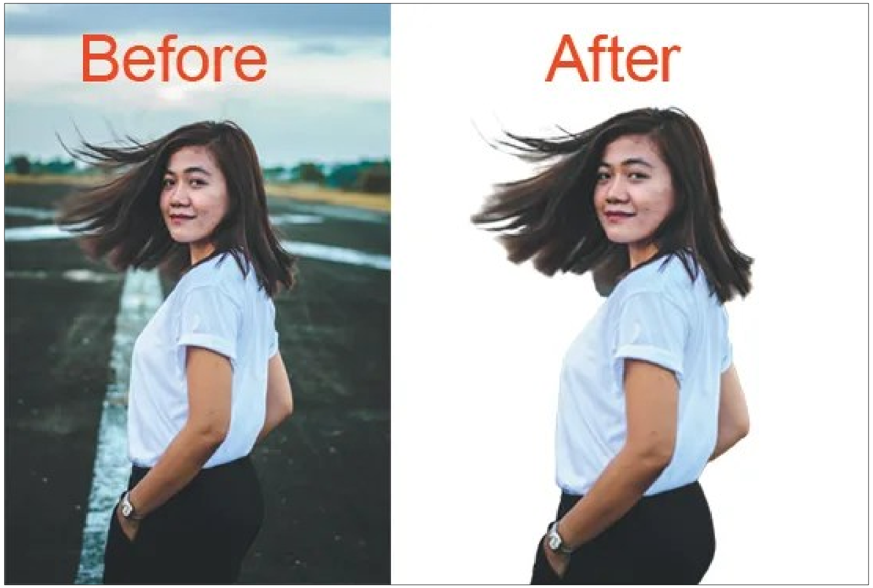
- Fixar s, variar t para cada vértice do grafo
- Determinar corte mínimo para cada t
  - via redes de fluxo
- Corte mínimo global é o menor deles
- **Obs:** corte mínimo global necessariamente separa s de t para algum par s e t

Complexidade

- Fixar s, variar t
  - total de n-1 rodadas, para todos valores de t
- Algoritmo original: O(mC)
- Valor de C <= g_{max}
  - fixar s em grau mínimo: C = g_{min}
- Custo de cada rodada: $O(mg_{min})$
- Custo total: $O(mng_{min})$
- Existem algoritmos específicos mais eficientes para este problema

Segmentação de Imagens

- Remoção de fundo: separar o que é objeto de interesse do restante da imagem



- Problema fundamental em visão computacional

- **Entrada**: imagem de **w**x**h** pixels, cada pixel possui uma cor
- **Problema**: quais pixels pertencem ao objeto, quais pertecem ao fundo?

Imagem vira Grafo

- Resolver o problema de imagens utilizando grafos
- Vértices: cada pixel é um vértice
- Arestas: pixels adjacentes na imagem
  - grau máximo 4

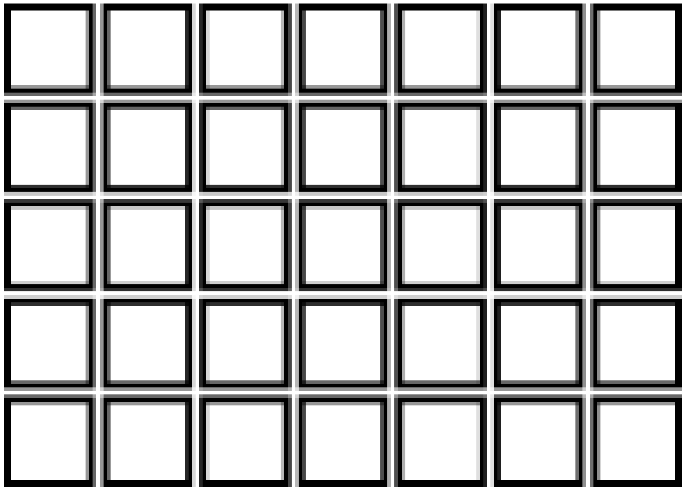
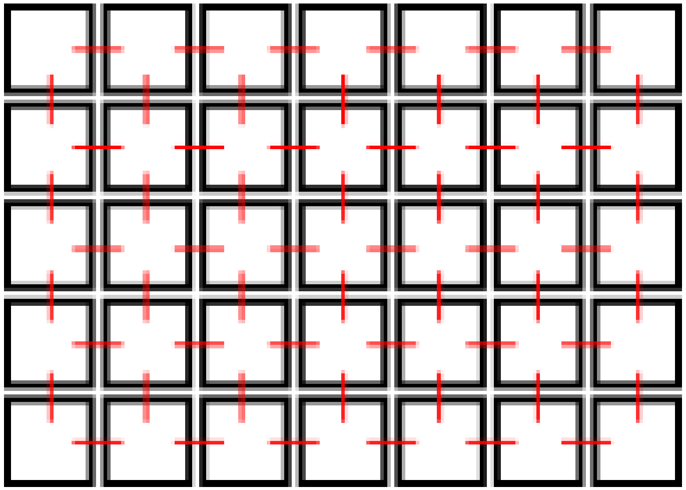


Imagem (pixels)



Grafo (vértices)

Figueiredo 2021

Graph Cuts em Visão Computacional

- Problemas de visão transformados em problemas de fluxo máximo em redes
  - incluindo remoção de fundo
- Algoritmo de Boykov & Kolmogorov resolve este problema de forma eficiente
  - muito usado nas principais bibliotecas de visão
- Exemplo