Grafos - Aula 16

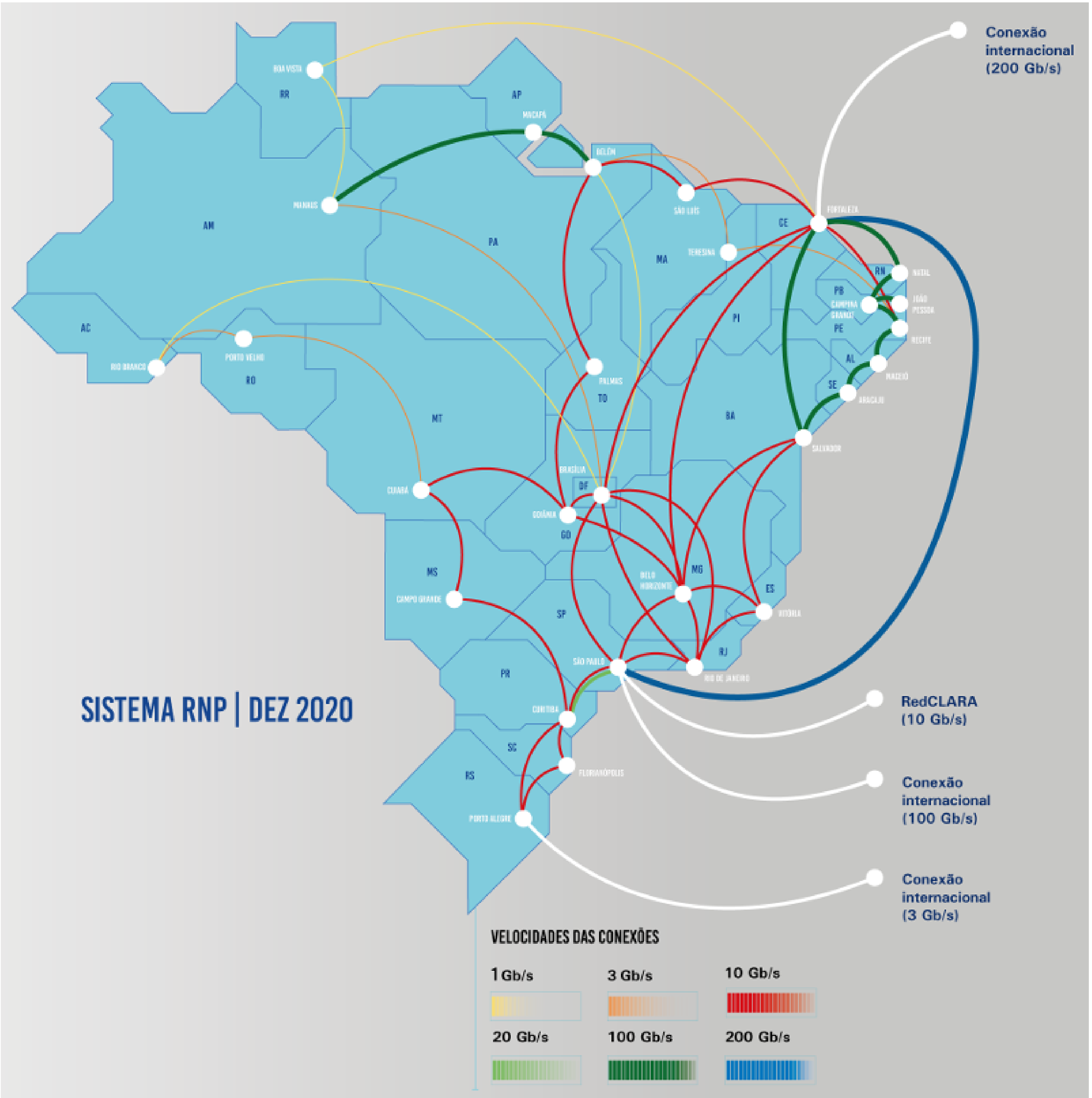
Roteiro

- Redes de fluxo
- Problema do fluxo máximo
- Problema do corte mínimo
- Dualidade fraca
- Dualidade forte

Malha Rodoviária

- Mapa das estradas brasileiras
  - capacidade da estrada: “carros por hora”
- **Problema**: capacidade de escoamento da produção nacional
  - ex. centro-oeste para portos

Backbone da RNP



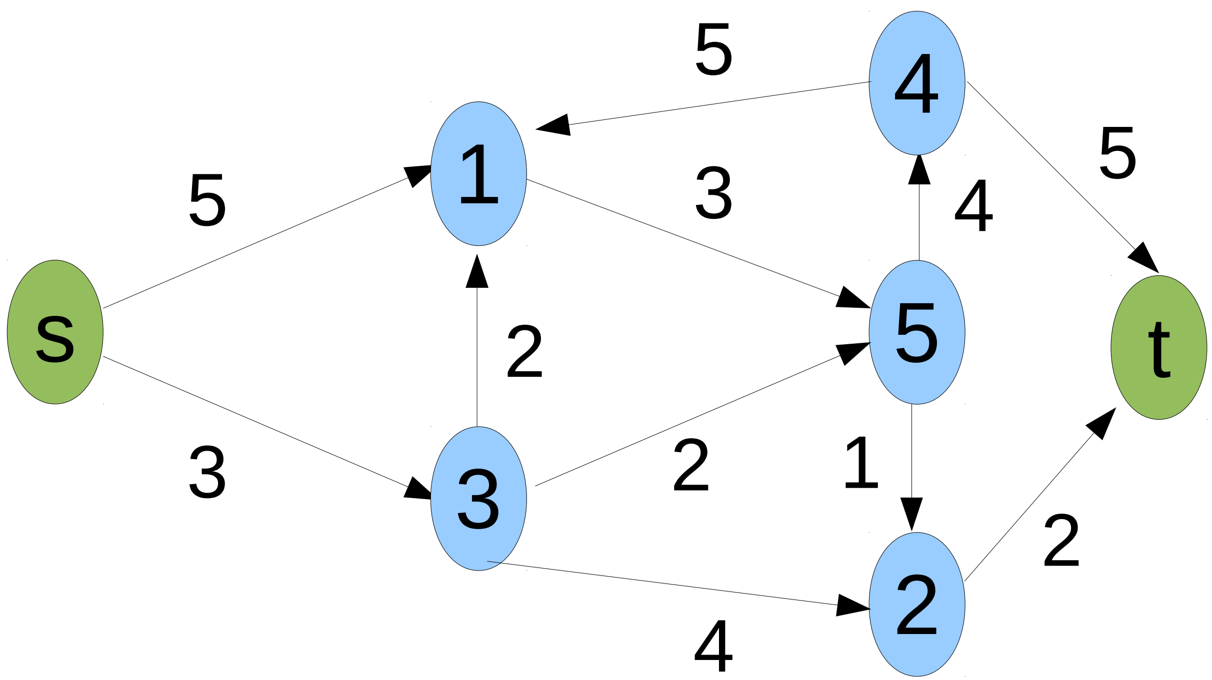
- RNP: Rede Nacional de Pesquisa em Ensino
  - ligação entre instutições nacionais
  - presença em todas as capitais
  - capacidade dos enlaces (“bits por segundo”)

Redes de Fluxos

- Grafo direcionado
- Arestas possuem capacidade
  - maior quantidade de fluxo que pode passar pela aresta
- 3 tipos de vértices
  - Origem, onde fluxo entra na rede
  - Destino, onde fluxo sai da rede
  - Interno, onde fluxo passa
- *Fluxo*: abstração de algo que possa "escoar" pelo grafo da origem ao destino
  - carros, bits, etc

Origem/Destino Únicos

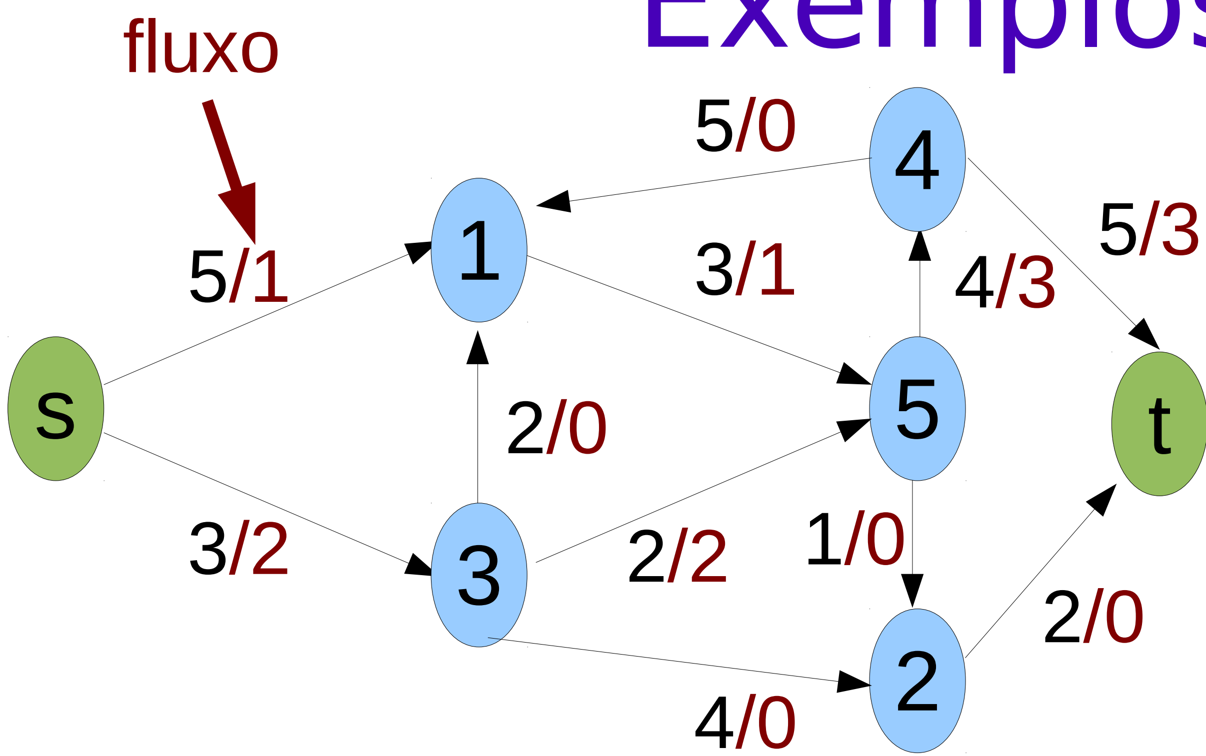
- Rede de fluxos simples
  - 1 vértice origem, 1 vértice destino
  - todos os outros vértices são internos
- Origem não possui arestas de entrada
- Destino não possui arestas de saída



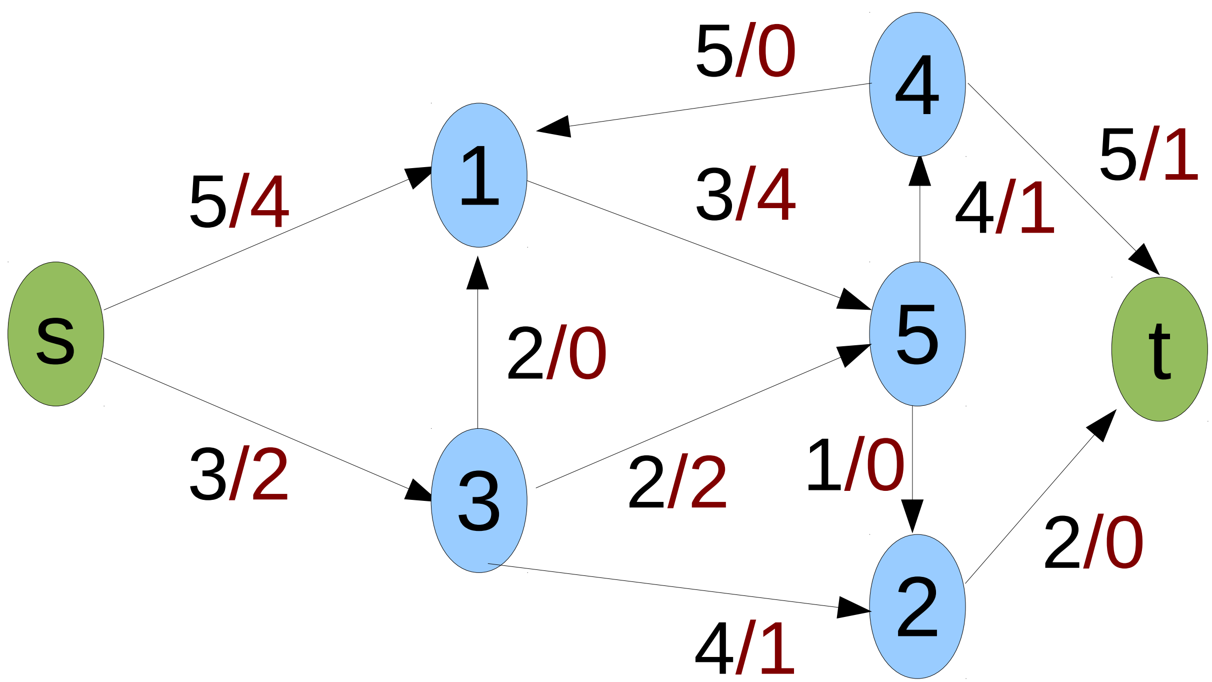
Fluxo na Rede

- Fluxo que está escoando pela rede, entrando na origem e saindo no destino
  - determinar o fluxo de cada arestas
- Função $f : E \rightarrow R$, com restrições
- 1) Capacidade
  - Fluxo em uma aresta é menor que sua capacidade
- 2) Conservação
  - Fluxo que entra no vértice interno igual ao fluxo que sai do vértice interno
  - Fluxo que sai da origem igual fluxo que entra no destino
- Valor do fluxo *f*
  - quantidade de fluxo saindo da origem

Exemplos



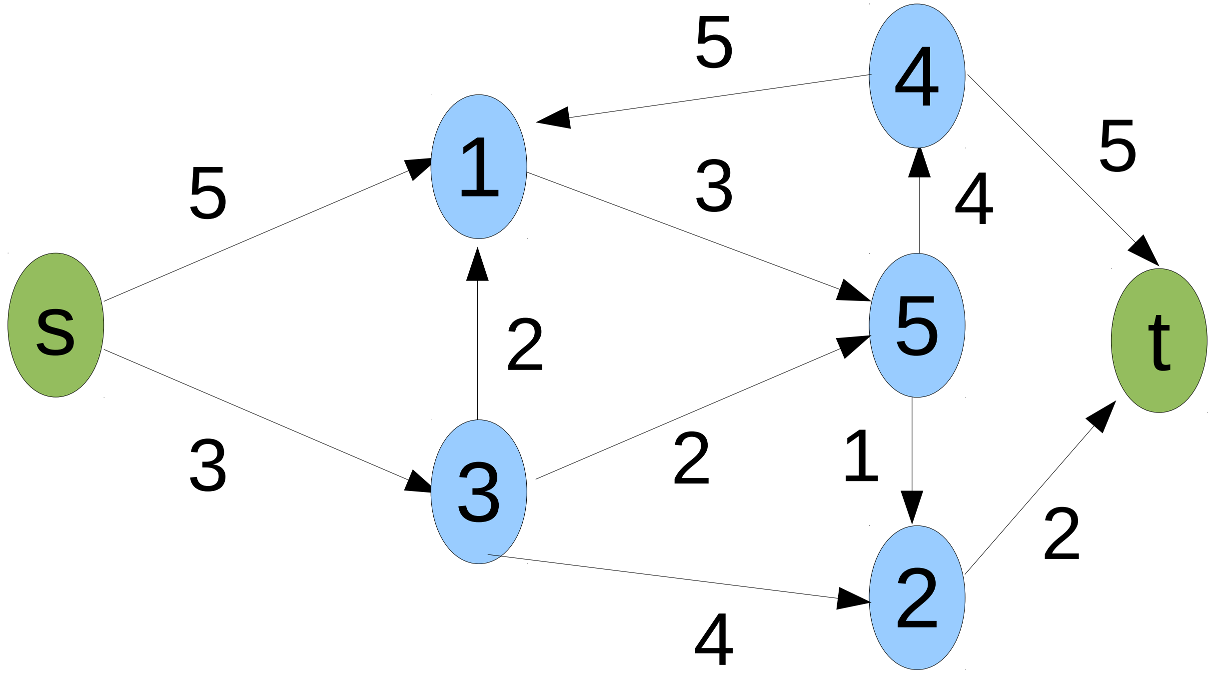
- Fluxo válido?
- Valor?



- Fluxo válido?

Problema do Fluxo Máximo

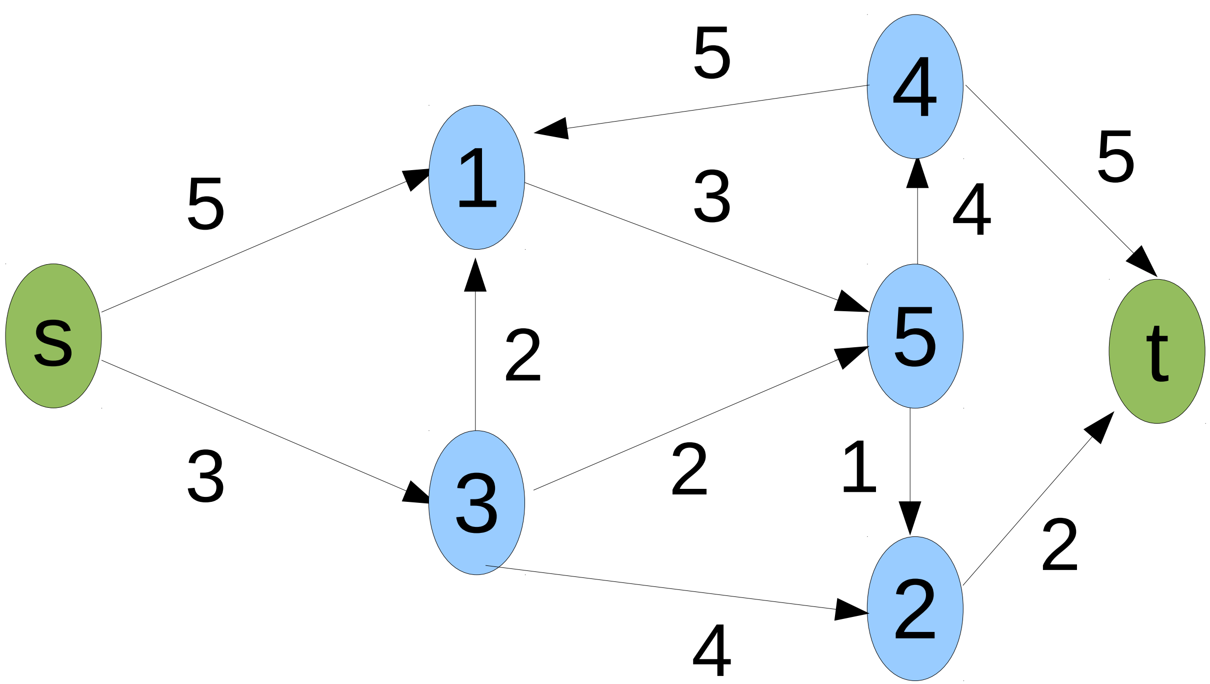
- Dado G=(V,E) com capacidade nas arestas
  - e vértices *s* (origem) e *t* (destino)
- **Problema**: Determinar fluxo máximo entre *s* e *t*



- Fluxo máximo?

Limitantes para Fluxo Máximo

- Capacidade de saída de *s*, C_s
  - soma das capacidades das arestas de saída
- Capacidade de entrada em *t*, C_t
  - soma das capacidades das arestas de entrada
- Fluxo máximo <= min{C_s, C_t}



- $C_s = 8$, $C_t = 7$
- Fluxo máximo <= 7

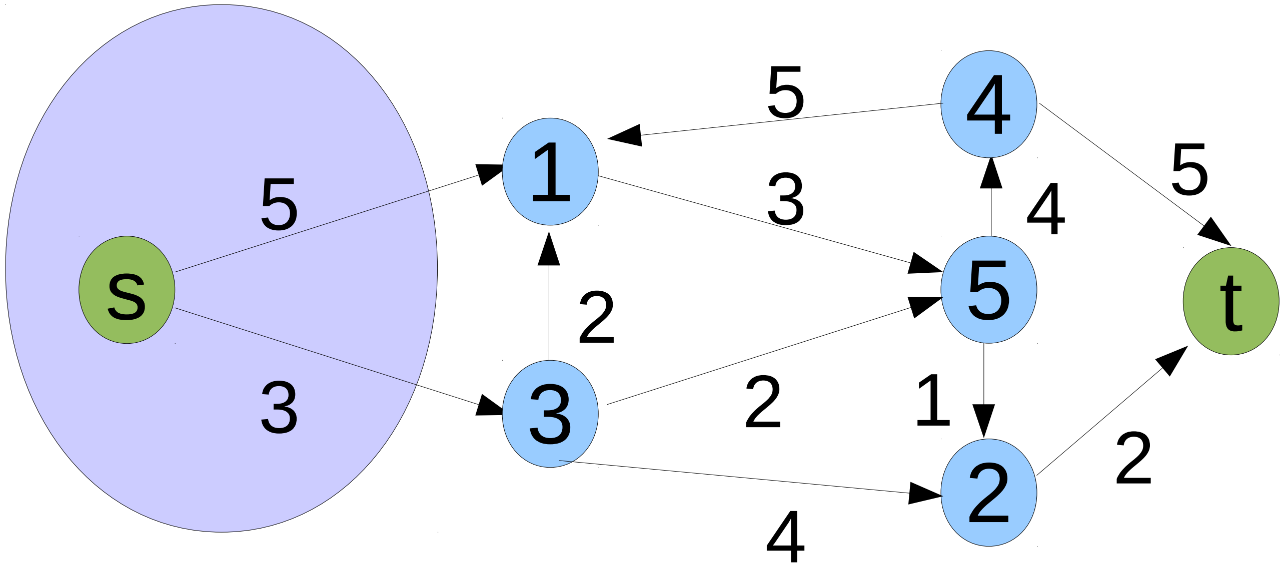
Figueiredo – 2021

Corte em Redes de Fluxo

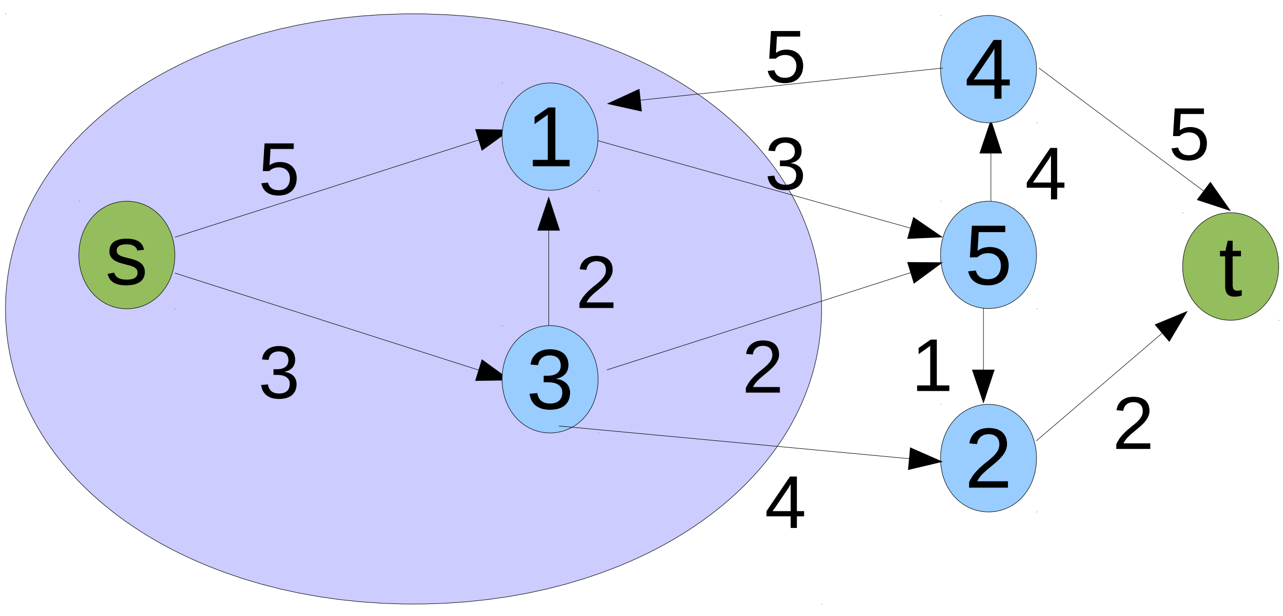
- Variação da definição de corte em grafos
- Corte s-t (A, B) é uma partição dos vértices nos conjuntos A e B tal que *s* está em A e *t* está em B
- Capacidade do corte (ou custo do corte)
  - soma das capacidades da arestas do corte orientadas de A para B

$$c(A,B) = \sum_{e=(a,b),\, a \in A,\, b \in B} c(e)$$

Exemplos



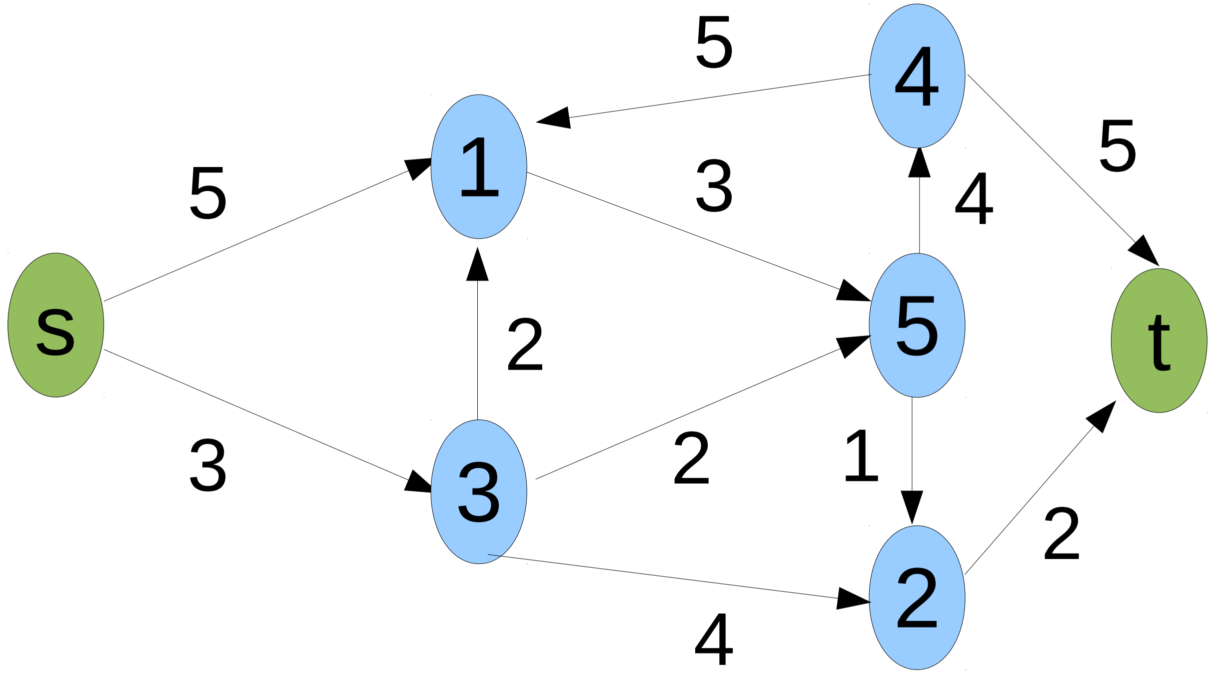
- c(A,B) = 8



- c(A,B) = 9

Problema do Corte Mínimo

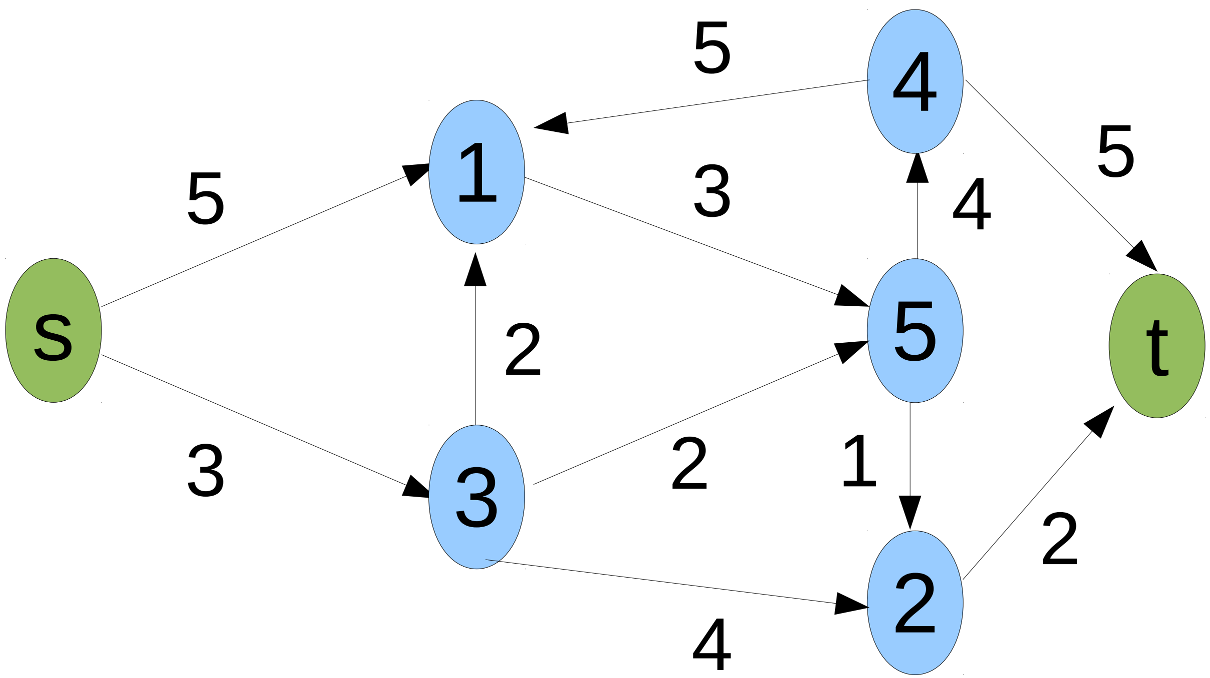
- Dado G=(V,E) com capacidade nas arestas
  - E dois vértices *s* e *t*
- **Problema**: Determinar corte s-t de menor capacidade



- Corte mínimo?

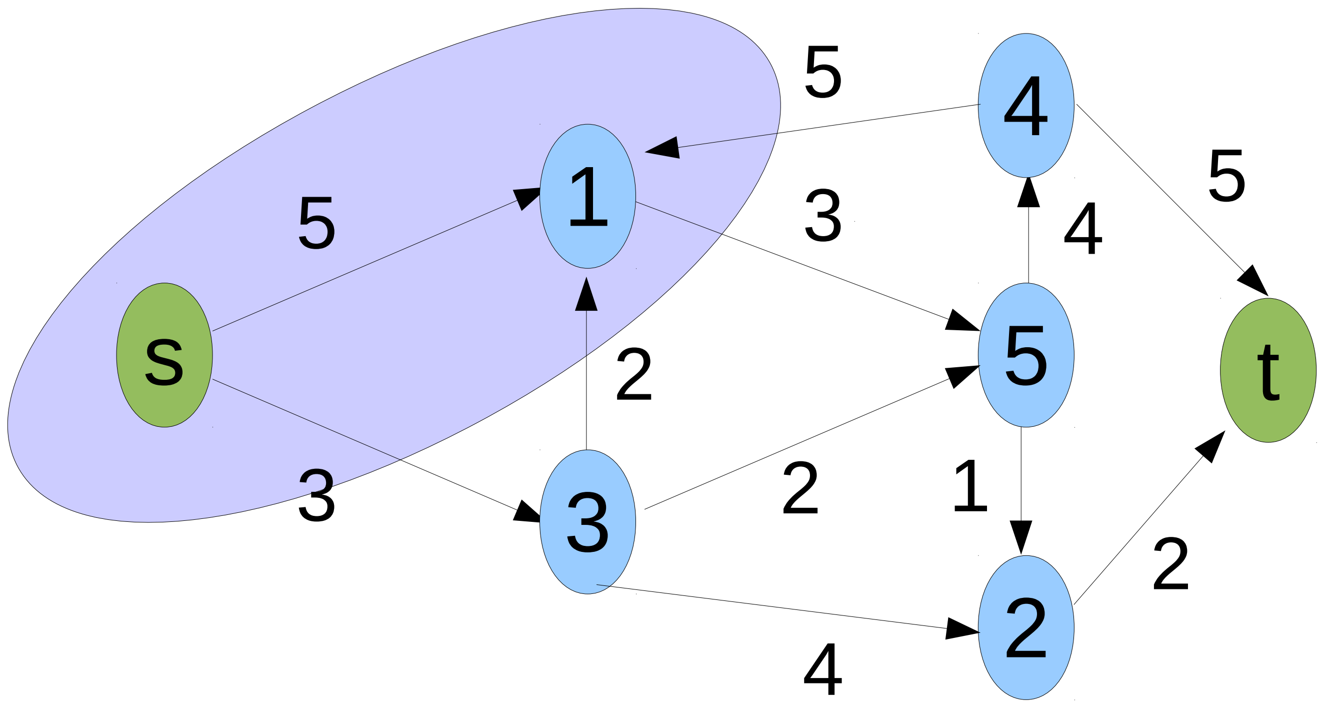
Limitantes para Corte Mínimo

- Capacidade de saída de *s*, C_s
  - soma das capacidades das arestas de saída
- Capacidade de entrada em *t*, C_t
  - soma das capacidades das arestas de entrada
- Corte mínimo <= min{C_s, C_t}



- $C_s = 8$, $C_t = 7$
- Corte mínimo <= 7

Corte Mínimo



- A = {s, 1} , B = {2,3,4,5,t}
- c(A,B) = 6
- Não há outro corte com menor capacidade

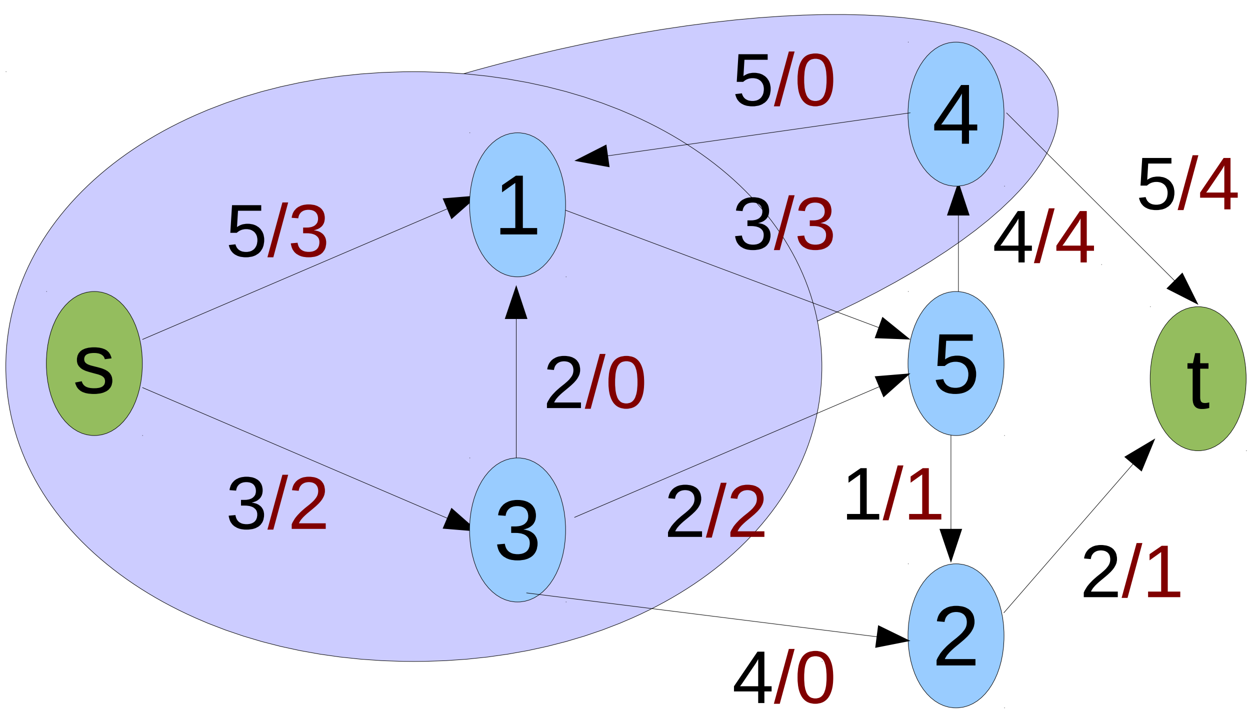
Fluxo Máximo e Corte Mínimo

- Problemas duais: Fluxo máximo é igual ao corte mínimo em qualquer rede de fluxos
  - resolver um problema implica em resolver o outro
  - diferentes algoritmos
- Mostrar essa dualidade

Fluxo Total no Corte

- Seja f um fluxo na rede e (A, B) um corte s-t
  - então o fluxo total entre A e B é igual ao fluxo saindo de s

$$\sum_{e \text{ saindo de } A} f(e) - \sum_{e \text{ entrando em } A} f(e)$$



- Fluxo total (A,B) = 5
- Fluxo total (A,B) = 5

Lema do Fluxo Total

- Seja f um fluxo, e (A, B) um corte s-t
- Então o fluxo total entre A e B é igual ao fluxo saindo de s

$$\sum_{e \text{ saindo de } A} f(e) - \sum_{e \text{ entrando em } A} f(e) = v(f)$$

Conservação de fluxo: todos os termos são zero menos s e t

- Prova

$$v(f) = \sum_{e \text{ saindo de } s} f(e)$$

$$v(f) = \sum_{v \in A} \left(\sum_{e \text{ saindo de } v} f(e) - \sum_{e \text{ entrando em } v} f(e) \right)$$

Todas arestas dentro de A se cancelam

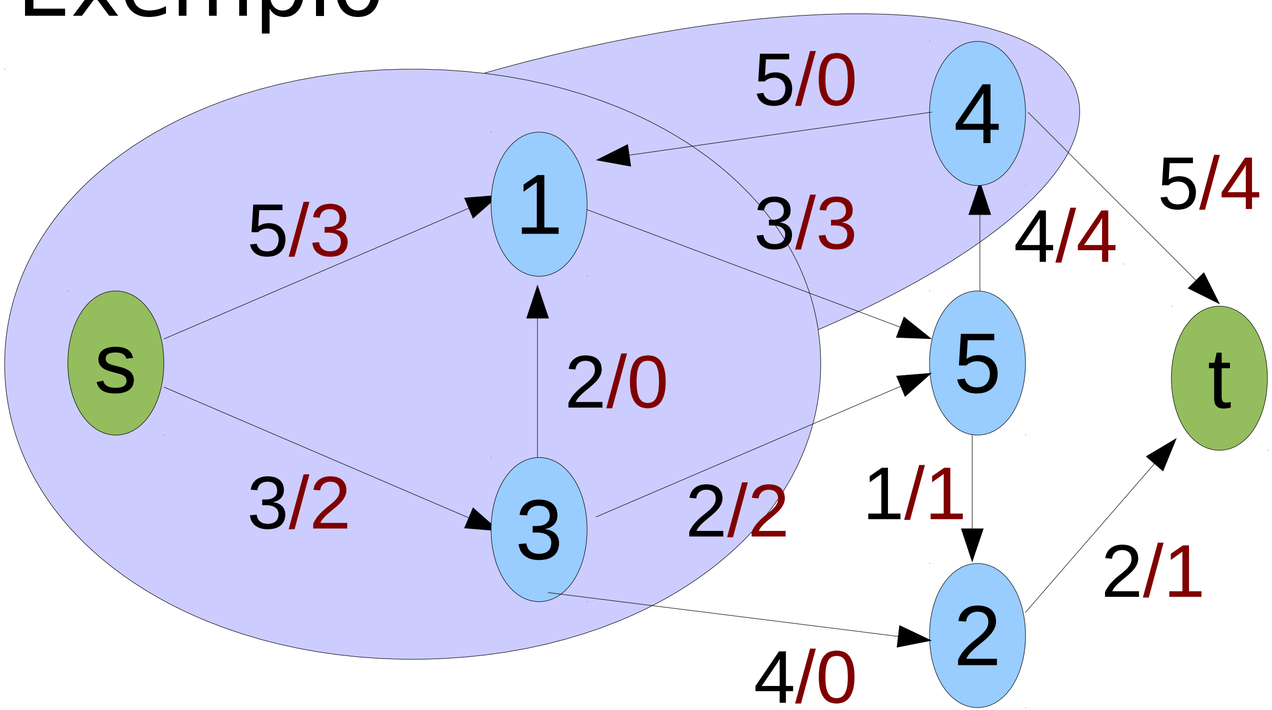
$$v(f) = \sum_{e \text{ saindo de } A} f(e) - \sum_{e \text{ entrando em } A} f(e)$$

Relação de Fluxo e Corte

- Seja f um fluxo qualquer e (A, B) um corte s-t qualquer
- Então o valor do fluxo v(f), é no máximo a *capacidade* do corte

$$v(f) \leqslant c(A, B)$$

- Exemplo



- v(f) = 5
- c(A,B) = 9
- c(A,B) = 11

Dualidade Fraca

- Seja f um fluxo qualquer e (A, B) um corte s-t qualquer, então $v(f) \leqslant c(A, B)$

- Prova

$$
\begin{aligned}
v(f) &= \sum_{e \text{ saindo de } A} f(e) - \sum_{e \text{ entrando em } A} f(e) \\
&\leqslant \sum_{e \text{ saindo de } A} f(e) \\
&\leqslant \sum_{e \text{ saindo de } A} c(e) \\
&= c(A, B)
\end{aligned}
$$

- Implica que fluxo máximo é menor ou igual ao corte mínimo
  - v(f) <= c*(A,B), onde c*(A,B) é o corte mínimo

Dualidade Forte

- Para qualquer rede de fluxos
- Temos que v(f) <= c*(A,B), o corte mínimo
- Seja v*(f) o valor do fluxo máximo
- Pode-se mostrar que c*(A,B) <= v*(f)
  - detalhes no livro texto
- Logo temos que c*(A,B) = v*(f)

Fluxo Máximo = Corte Mínimo