Teoria dos Grafos
Aula 12

Aula de hoje

- Problema da soma do subconjunto (*subset sum*)
- Programação dinâmica
- Problema da mochila

Escalonamento de Tarefas

- N tarefas
- Cada tarefa leva tempo t_i para executar
- T: tempo total disponível

- **Objetivo**: Maximizar uso do tempo T disponível (minimizar a sobra)
  - número de tarefas não interessa
- **Problema**: Quais tarefas executar?

Investimentos

- N investimentos possíveis
- Cada investimento tem preço p_i
- W: orçamento disponível

- **Objetivo**: Maximizar os investimentos dentro do orçamento (minimizar sobra)
- **Problema**: Quais investimentos fazer?

Problema da Soma de Subconjunto

- Abstração destes problemas (e muitos outros)
  - *Subset Sum Problem*
- Dado um conjunto de N objetos, cada um com peso inteiro w_i, e um limite W
- **Solução**: subconjuto de objetos tal que soma dos pesos seja menor (ou igual) a W
- **Problema**: Determinar subconjunto que possui a maior soma (minimiza a sobra)

Problema da Soma de Subconjunto

- Exemplo
  - N = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
  - w_1= 4, w_2= 5, w_3= 11, w_4= 3, w_5= 2, w_6= 3
  - W= 10
- Subconjunto ótimo: O = {2, 5, 6}
  - valor de O = $w_2 + w_5 + w_6 = 10$
- Solução é sempre única?

Algoritmo para o problema?

Algoritmo Guloso

- Idéias para um guloso?
- Menor peso primeiro
  - Funciona? Contra-exemplo?
- Maior peso primeiro
  - Funciona? Contra-exemplo?

Não conhecemos algoritmo guloso que seja ótimo sempre!

Algoritmo para o Problema

- Abordagem via programação dinâmica
  - técnica para construção de algoritmos
- Estudo da estrutura da solução ótima
- Considere “O” o conjunto ótimo de objetos
  - subconjunto que minimiza a sobra
- O que podemos dizer sobre o último objeto do conjunto de objetos ?
- Duas possibilidades
  - pertence a O
  - não pertence a O

Analisando Solução Ótima

- O que podemos afirmar se n não pertence a O?
  - O é a solução ótima para o problema com os outros *n-1* objetos
  - pois caso contrário, O pode ser melhorado para o problema com *n-1* objetos

- Se n não pertence a O, então
  - OPT(n) = OPT(n-1)
  - onde OPT(n) é o valor da solução ótima com os primeiros n objetos
  - soma dos pesos dos objetos do subconjunto mais valioso com os primeiros n objetos cuja soma é menor que W

Analisando Solução Ótima

- Se n pertence a O, então...

O que podemos dizer neste caso?

- Incluir objeto n não necessariamente exclui nenhum outro objeto
  - difícil escrever OPT apenas removendo um objeto
- O que ocorre quando n pertence a O?

Limite W diminui (de w_n)

Adicionando uma Variável

- Definir OPT somente em função do número de objetos é impossível
- **Idéia:** adicionar outra variável para faciliar definir o subproblema

Que variável?

- Valor do orçamento, W
- Se n pertence a O, então
  - $OPT(n, W) = w_n + OPT(n-1, W - w_n)$
  - onde OPT(n, w) é o valor da solução ótima com os primeiros n objetos e orçamento w

Definindo Solução Ótima

- Duas variáveis facilita a recursão
- Mas aumenta o número de subproblemas que precisamos resolver
  - ótimo em função do limite W
- Definição de OPT:

$$OPT(i, w) = max_S \sum_{j \in S} w_j$$

Um subconjunto
do conjunto {1, 2, ..., i}

Soma dos elementos do
conjunto S tem que ser
menor que W (restrição)

Exemplo

- N = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- $w_1 = 2$, $w_2 = 5$, $w_3 = 10$, $w_4 = 3$, $w_5 = 2$, $w_6 = 3$
- W= 10

$$OPT(i, w) = max_S \sum_{j \in S} w_j$$

- OPT(1, 1) = ?
- OPT(1, 2) = ?
- OPT(2, 5) = ?
- OPT(2, 8) = ?
- OPT(2, 10) = ?
- OPT(3, 10) = ?

Custo da Solução Ótima

- Se i não pertence a solução ótima
  - $OPT(i, w) = OPT(i-1, w)$
- Se i pertence a solução ótima
  - $OPT(i, w) = w_i + OPT(i-1, w - w_i)$
- Qual das duas será utilizada?
  - a de maior valor, claro!
- Ou seja, quando $w > w_i$
  (caso contrário, não podemos adicionar i)
  - $OPT(i, w) = \max(OPT(i-1, w), w_i + OPT(i-1, w-w_i))$

Algoritmo

- Algoritmo para calcular OPT(n, W)?
  - iterativo, não recursivo (mas utilizando recursão)

```
SubsetSum-OPT(n, W)
  Array M[0,...,n ; 0,...,W]
  Init M[0,w]=0 w=0,1,...,W

  For i=1,2, ..., n
    For w=0,1, ..., W
      Se w < w[i] entao
        M[i, w] = M[i-1, w]
      Senao
        M[i, w] = max(M[i-1, w],
                      w[i] + M[i-1, w-w[i]])
  Retorna M[n,W]
```

Exemplo

- N = {1, 2, 3}
- $w_1 = 2$, $w_2 = 3$, $w_3 = 4$
- W= 8
- Tabela M que será construída?

w
(orçamento)

i (objeto)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	2	2	2	2	2	2	2
2	0	0	2	3	3	5	5	5	5
3	0	0	2	3	4	5	6	7	7

Inicialização

Solução ótima

Complexidade

- Tempo de execução do algoritmo?
- Observações
  - calcular cada elemento da matriz M, tempo constante
  - Tempo total: número de elementos da matriz M
  - O(nW)
- Tempo de execução é ***pseudo-polinomial***
  - polinomial no valor de W, mas não no tamanho da entrada
  - exponencial no tamanho da entrada
    - este problema é difícil, não é polinomial

Obtendo o Conjunto Ótimo

- Como obter o conjunto Ótimo?
  - dado M?
- Se *i* pertence ao ótimo, então temos que
  - w_i +OPT(i-1,w-w_i) > OPT(i-1, w)
- Algoritmo iterativo, para cada objeto verifica se ele pertence ou não ao ótimo
  - Utiliza matriz M
  - Começa com último objeto, M[n,w]
  - Complexidade?

Obtendo o Conjunto Ótimo

- Se *i* pertence ao ótimo, então temos que
  - $w_i + OPT(i-1, w-w_i) > OPT(i-1, w)$
- Exemplo

w
(orçamento)

i (objeto)

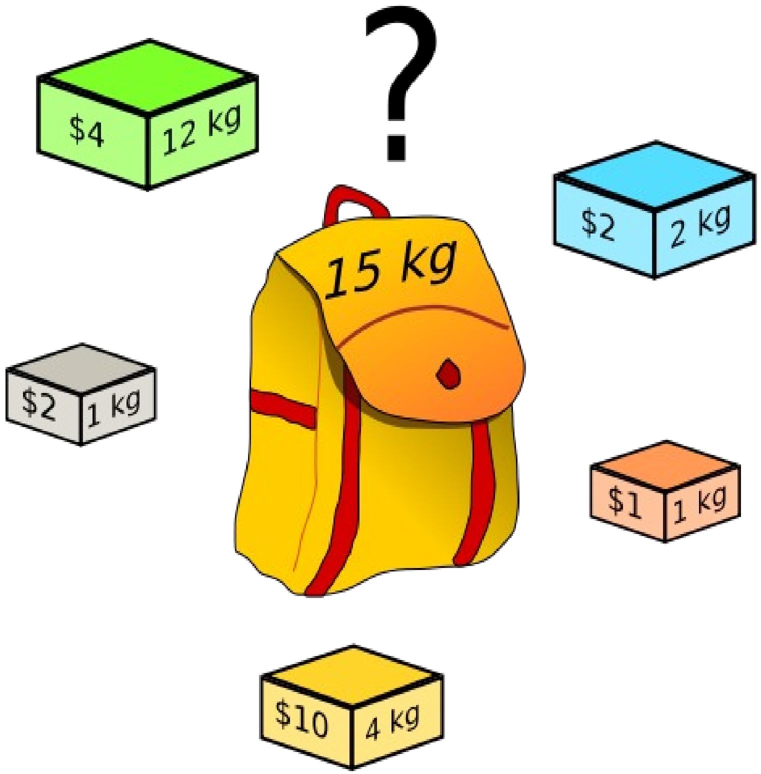
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	$\boxed{0}$	2	2	2	2	2	2	2
2	0	0	2	3	3	5	5	5	5
3	0	0	2	3	4	5	6	7	7

○ = pertence

□ = não pertence

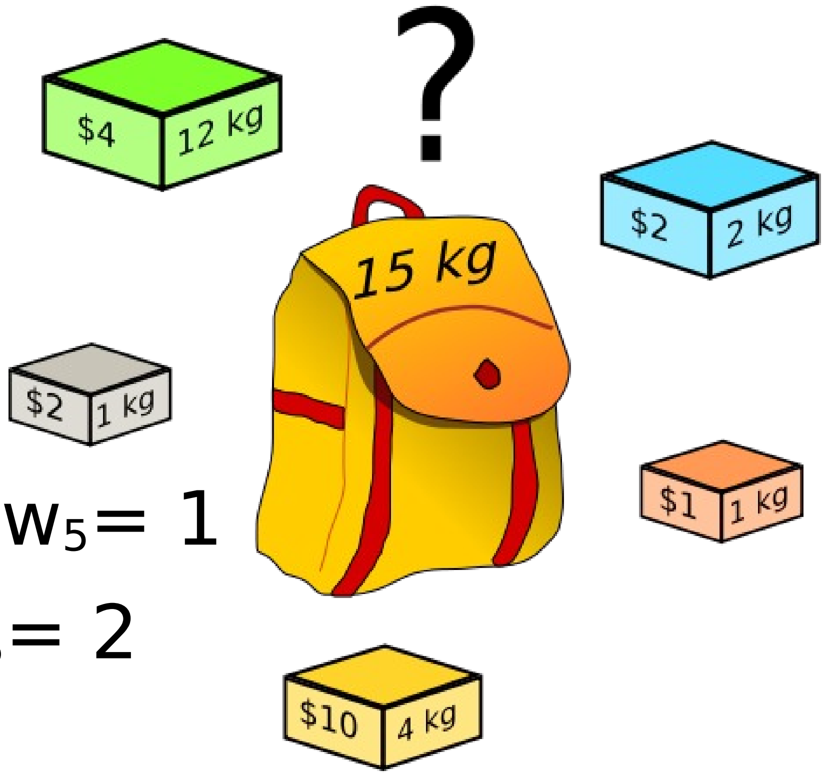
Problema da Mochila

- Generalização do problema anterior
  - *knapsack problem*
- Objetos possuem *valor* além do peso
- Pesos continuam limitando os objetos



- **Problema**: maximizar ***valor*** do subconjunto (soma dos valores dos objetos)
  - sobre restrição de peso total

Problema da Mochila



- Exemplo (ao lado)
  - $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
  - $w_1 = 12$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1$, $w_4 = 4$, $w_5 = 1$
  - $v_1 = 4$, $v_2 = 2$, $v_3 = 1$, $v_4 = 10$, $v_5 = 2$
  - $W = 15$

- **Problema**: maximizar *valor* dos objetos a serem incluídos na mochila
  - sobre restrição de peso total

Análise da Solução Ótima

- OPT(i, w) = valor da solução ótima com os *i* primeiros objetos e com limite de peso w

$$OPT(i, w) = max_S \sum_{j \in S} v_j$$

Um subconjunto do conjunto {1, 2, ..., i}

Soma dos valores do subconjunto *S*

- Sujeito ao limite de peso w: $\sum_{j \in S} w_j \leqslant w$

Análise da Solução Ótima

- Se i não pertence a solução ótima
  - $OPT(i, w) = OPT(i-1, w)$
- Se i pertence a solução ótima
  - $OPT(i, w) = v_i + OPT(i-1, w - w_i)$
- Qual das duas será utilizada?
  - A de maior valor, claro!
- Ou seja, quando $w > w_i$
  - $OPT(i, w) = \max(OPT(i-1, w), v_i + OPT(i-1, w-w_i))$

Única diferença! Valor e não peso do objeto

Algoritmo é idêntico

Complexidade e Variações

- O(nW) : pseudo-polinomial (cresce com magnitude do parâmetro e não com quantidade de parâmetros)
- Problema difícil: não se conhece algoritmo polinomial para resolver (vale 1 milhão)
- Algoritmos aproximativos: chegam próximo do ótimo em tempo polinomial
  - usam programação dinâmica
- Variações
  - múltiplas cópias de um mesmo item
  - quantidade fracionária de um item (fácil de resolver)