Emparelhamentos em grafos bipartidos

Fábio Botler

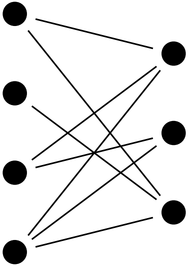
Programa de Engenharia de Sistemas e Computação
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Grafos bipartidos

Grafos bipartidos

Um grafo $G = (V, E)$ é dito **bipartido** se podemos particionar V em dois conjuntos disjuntos $V = A \cup B$ tal que

$$E \subseteq \{ab \colon a \in A, b \in B\}$$



Grafos bipartidos

Grafos bipartidos

- Trabalhador $\times$ Tarefa

  $A =$ trabalhadores

  $B =$ tarefas

  cada aresta liga um trabalhador a uma das tarefas que ele pode realizar

- Professor $\times$ Disciplinas

  $A =$ professores

  $B =$ disciplinas

  cada aresta liga um professor a uma das disciplinas que ele pode ministrar

Grafos bipartidos

Grafos bipartidos

- Aluno $\times$ Cadeiras

  $A =$ alunos

  $B =$ cadeiras em uma sala

  cada aresta liga um aluno a uma das cadeiras na qual ele gostaria de sentar

- Pesquisador $\times$ Artigo

  $A =$ pesquisadores

  $B =$ artigos científicos

  cada aresta liga um pesquisador a um de seus artigos científicos

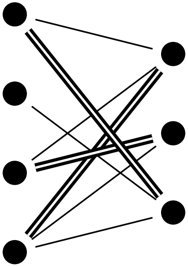
Emparelhamentos

Emparelhamentos

Um **emparelhamento** em um grafo G é um conjunto $M \subseteq E$ de arestas de G tal que cada vértice é incidente a **no máximo uma aresta de** M.

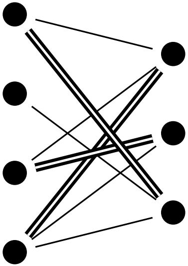
Emparelhamentos

Um **emparelhamento** em um grafo G é um conjunto $M \subseteq E$ de arestas de G tal que cada vértice é incidente a **no máximo uma aresta de** M.



Emparelhamentos

Um **emparelhamento** em um grafo G é um conjunto $M \subseteq E$ de arestas de G tal que cada vértice é incidente a **no máximo uma aresta de** M.



Obs: Um emparelhamento induz um subgrafo de G com grau máximo no máximo 1.

Emparelhamentos

Emparelhamentos

- Trabalhador $\times$ Tarefa
  um emparelhamento atribui uma tarefa a cada trabalhador
- Professor $\times$ Disciplinas
  um emparelhamento atribui um professor a uma disciplina
- Aluno $\times$ Cadeiras na sala
  um emparelhamento atribui um aluno a uma cadeira
- Pesquisador $\times$ Artigos
  um emparelhamento atribui um pesquisador a um de seus artigos científicos

Emparelhamentos

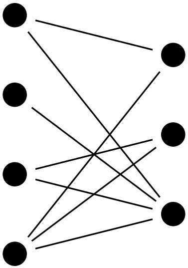
Emparelhamentos

Um emparelhamento M em G é **maximal** se não há um emparelhamento maior M' em G que contenha M.

Emparelhamentos

Um emparelhamento M em G é **maximal** se não há um emparelhamento maior M' em G que contenha M.

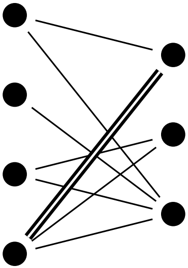
Um emparelhamento M é maximal se não podemos adicionar nenhuma aresta a ele.



Emparelhamentos

Um emparelhamento M em G é **maximal** se não há um emparelhamento maior M' em G que contenha M.

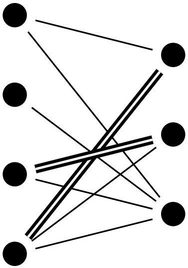
Um emparelhamento M é maximal se não podemos adicionar nenhuma aresta a ele.



Emparelhamentos

Um emparelhamento M em G é **maximal** se não há um emparelhamento maior M' em G que contenha M.

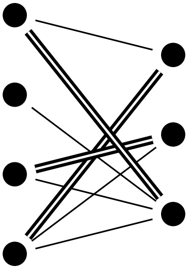
Um emparelhamento M é maximal se não podemos adicionar nenhuma aresta a ele.



Emparelhamentos

Um emparelhamento M em G é **maximal** se não há um emparelhamento maior M' em G que contenha M.

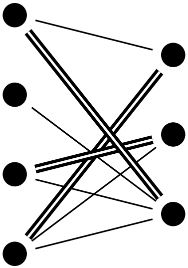
Um emparelhamento M é maximal se não podemos adicionar nenhuma aresta a ele.



Emparelhamentos

Um emparelhamento M em G é **maximal** se não há um emparelhamento maior M' em G que contenha M.

Um emparelhamento M é maximal se não podemos adicionar nenhuma aresta a ele.



Obs: Um emparelhamento em G possui no máximo $n/2$ arestas.

Emparelhamentos

Emparelhamentos

Um emparelhamento M em G é **máximo** se não há emparelhamento em G maior que M.

Emparelhamentos

Um emparelhamento M em G é **máximo** se não há emparelhamento em G maior que M.

Todo emparelhamento máximo é maximal?

Emparelhamentos

Um emparelhamento M em G é **máximo** se não há emparelhamento em G maior que M.

Todo emparelhamento máximo é maximal? SIM!

Emparelhamentos

Um emparelhamento M em G é **máximo** se não há emparelhamento em G maior que M.

Todo emparelhamento máximo é maximal? SIM!

Todo emparelhamento maximal é máximo?

Emparelhamentos

Um emparelhamento M em G é **máximo** se não há emparelhamento em G maior que M.

Todo emparelhamento máximo é maximal? SIM!

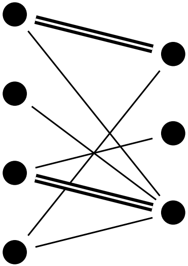
Todo emparelhamento maximal é máximo? NÃO!

Emparelhamentos

Um emparelhamento M em G é **máximo** se não há emparelhamento em G maior que M.

Todo emparelhamento máximo é maximal? SIM!

Todo emparelhamento maximal é máximo? NÃO!

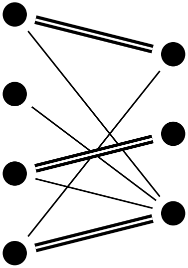


Emparelhamentos

Um emparelhamento M em G é **máximo** se não há emparelhamento em G maior que M.

Todo emparelhamento máximo é maximal? SIM!

Todo emparelhamento maximal é máximo? NÃO!



Emparelhamentos

Emparelhamentos

Como encontrar um emparelhamento máximo?

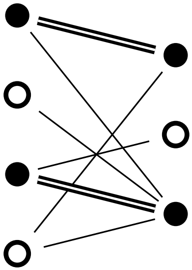
Definições importantes

Definições importantes

Uma aresta de M é dita M-**emparelhada**

Um vértice incidente a uma aresta de M é dito M-**saturado**

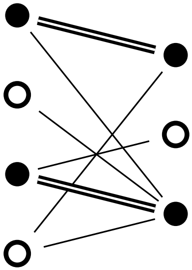
Um vértice que não é M-saturado é dito M-**exposto**.



Definições importantes

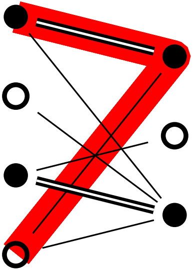
Definições importantes

Um caminho em G é dito M-**alternante** quando suas arestas alternam entre $E \setminus M$ e M.



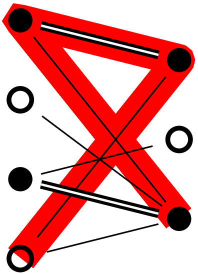
Definições importantes

Um caminho em G é dito M-**alternante** quando suas arestas alternam entre $E \setminus M$ e M.



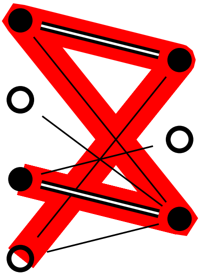
Definições importantes

Um caminho em G é dito M-**alternante** quando suas arestas alternam entre $E \setminus M$ e M.



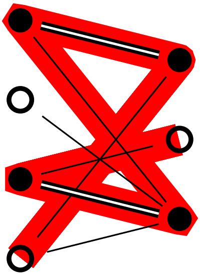
Definições importantes

Um caminho em G é dito M-**alternante** quando suas arestas alternam entre $E \setminus M$ e M.



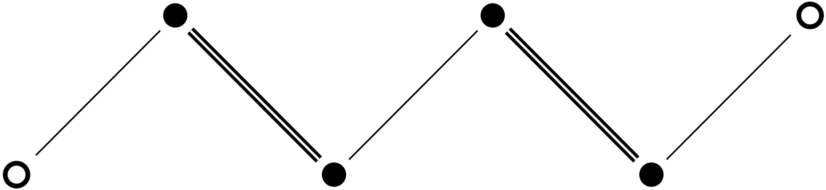
Definições importantes

Um caminho em G é dito M-**alternante** quando suas arestas alternam entre $E \setminus M$ e M.

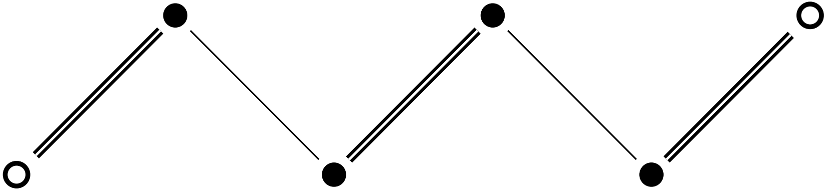


Definições importantes

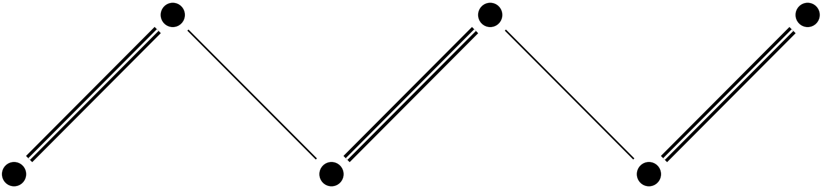
Definições importantes



Definições importantes

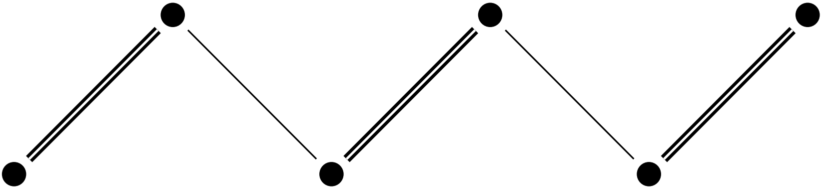


Definições importantes



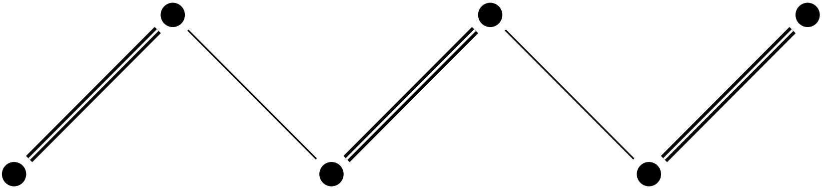
Definições importantes

Um caminho M-alternante é dito M-**aumentante** se liga dois vértices M-expostos.



Definições importantes

Um caminho M-alternante é dito M-**aumentante** se liga dois vértices M-expostos.



Esta operação se chama **diferença simétrica** de M e $E(P)$ (notação: $M \triangle E(P)$).

Caminhos M-aumentantes $\times$ Emparelhamentos máximos

Caminhos M-aumentantes $\times$ Emparelhamentos máximos

Se um grafo possui um caminho M-aumentante, então M não é um emparelhamento máximo!

Caminhos M-aumentantes $\times$ Emparelhamentos máximos

Se um grafo possui um caminho M-aumentante, então M não é um emparelhamento máximo!

Isso nos dá uma ideia para um algoritmo para encontrar emparelhamentos máximos!

Caminhos M-aumentantes $\times$ Emparelhamentos máximos

Se um grafo possui um caminho M-aumentante, então M não é um emparelhamento máximo!

Isso nos dá uma ideia para um algoritmo para encontrar emparelhamentos máximos!

Basta encontrar caminhos M-aumentantes!

Caminhos M-aumentantes $\times$ Emparelhamentos máximos

Se um grafo possui um caminho M-aumentante, então M não é um emparelhamento máximo!

Isso nos dá uma ideia para um algoritmo para encontrar emparelhamentos máximos!

Basta encontrar caminhos M-aumentantes!

Mas como encontrar caminhos M-aumentantes?

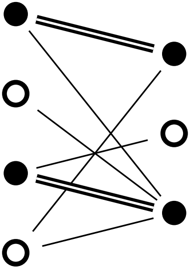
Encontrando caminhos M-aumentantes

Encontrando caminhos M-aumentantes

Orientamos as arestas de M para um lado (de B para A) e as arestas de $E \setminus M$ para o outro (de A para B).

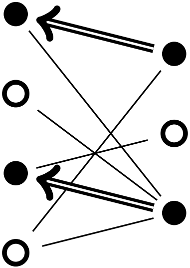
Encontrando caminhos M-aumentantes

Orientamos as arestas de M para um lado (de B para A) e as arestas de $E \setminus M$ para o outro (de A para B).



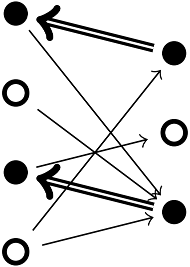
Encontrando caminhos M-aumentantes

Orientamos as arestas de M para um lado (de B para A) e as arestas de $E \setminus M$ para o outro (de A para B).



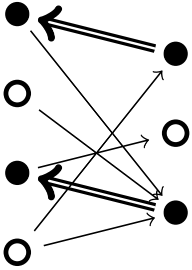
Encontrando caminhos M-aumentantes

Orientamos as arestas de M para um lado (de B para A) e as arestas de $E \setminus M$ para o outro (de A para B).



Encontrando caminhos M-aumentantes

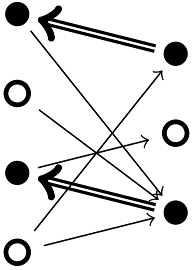
Orientamos as arestas de M para um lado (de B para A) e as arestas de $E \setminus M$ para o outro (de A para B).



Um caminho direcionado ligando dois vértices M-expostos é um caminho M-aumentante!

Encontrando caminhos M-aumentantes

Orientamos as arestas de M para um lado (de B para A) e as arestas de $E \setminus M$ para o outro (de A para B).



Um caminho direcionado ligando dois vértices M-expostos é um caminho M-aumentante!
E pode ser encontrado com uma busca (BFS ou DFS).

Algoritmo

Algoritmo

Bipartite-matching(G)

$M \leftarrow \emptyset$
$P \leftarrow$ caminho M-aumentante
$M \leftarrow M \triangle E(P)$ % diferença simétrica entre M e as arestas em P
Enquanto $P \neq \emptyset$
    $P \leftarrow$ caminho M-aumentante
    $M \leftarrow M \triangle E(P)$
retorna M

Encontrando caminhos M-aumentantes

Encontrando caminhos M-aumentantes

Qual a complexidade desse algoritmo?

Encontrando caminhos M-aumentantes

Qual a complexidade desse algoritmo?

Cada caminho aumentante pode ser encontrado em tempo $O(m)$

Encontrando caminhos M-aumentantes

Qual a complexidade desse algoritmo?

Cada caminho aumentante pode ser encontrado em tempo $O(m)$

Cada caminho aumentante aumenta o tamanho de M em exatamente 1

Encontrando caminhos M-aumentantes

Qual a complexidade desse algoritmo?

Cada caminho aumentante pode ser encontrado em tempo $O(m)$

Cada caminho aumentante aumenta o tamanho de M em exatamente 1

Como um emparelhamento máximo possui no máximo $n/2$ arestas, o loop da linha 4 é realizado no máximo $n/2$ vezes.

Encontrando caminhos M-aumentantes

Qual a complexidade desse algoritmo?

Cada caminho aumentante pode ser encontrado em tempo $O(m)$

Cada caminho aumentante aumenta o tamanho de M em exatamente 1

Como um emparelhamento máximo possui no máximo $n/2$ arestas, o loop da linha 4 é realizado no máximo $n/2$ vezes.

Logo, o custo do algoritmo `Bipartite-matching` é

Encontrando caminhos M-aumentantes

Qual a complexidade desse algoritmo?

Cada caminho aumentante pode ser encontrado em tempo $O(m)$

Cada caminho aumentante aumenta o tamanho de M em exatamente 1

Como um emparelhamento máximo possui no máximo $n/2$ arestas, o loop da linha 4 é realizado no máximo $n/2$ vezes.

Logo, o custo do algoritmo `Bipartite-matching` é $O(nm)$

Encontrando caminhos M-aumentantes

Qual a complexidade desse algoritmo?

Cada caminho aumentante pode ser encontrado em tempo $O(m)$

Cada caminho aumentante aumenta o tamanho de M em exatamente 1

Como um emparelhamento máximo possui no máximo $n/2$ arestas, o loop da linha 4 é realizado no máximo $n/2$ vezes.

Logo, o custo do algoritmo `Bipartite-matching` é $O(nm)$

Problema:

Encontrando caminhos M-aumentantes

Qual a complexidade desse algoritmo?

Cada caminho aumentante pode ser encontrado em tempo $O(m)$

Cada caminho aumentante aumenta o tamanho de M em exatamente 1

Como um emparelhamento máximo possui no máximo $n/2$ arestas, o loop da linha 4 é realizado no máximo $n/2$ vezes.

Logo, o custo do algoritmo `Bipartite-matching` é $O(nm)$

Problema: O emparelhamento retornado é máximo?

Caminhos M-aumentantes $\times$ Emparelhamentos máximos

Caminhos M-aumentantes $\times$ Emparelhamentos máximos

Encontramos um emparelhamento M tal que G não possui caminho M-aumentante.

Caminhos M-aumentantes $\times$ Emparelhamentos máximos

Encontramos um emparelhamento M tal que G não possui caminho M-aumentante.

Teorema (Berge)

Um emparelhamento M em um grafo G é máximo se e somente se não existe caminho M-aumentante.

Teorema de Berge

Teorema de Berge

Um emparelhamento M em um grafo G é máximo se e somente se não existe caminho M-aumentante.

Teorema de Berge

Um emparelhamento M em um grafo G é máximo se e somente se não existe caminho M-aumentante.

Prova.

Teorema de Berge

Um emparelhamento M em um grafo G é máximo se e somente se não existe caminho M-aumentante.

Prova. Seja M um emparelhamento, e seja M^* um emparelhamento máximo.

Teorema de Berge

Um emparelhamento M em um grafo G é máximo se e somente se não existe caminho M-aumentante.

Prova. Seja M um emparelhamento, e seja M^* um emparelhamento máximo.

Considere o grafo H induzido pelas arestas em $M \cup M^*$.

Teorema de Berge

Um emparelhamento M em um grafo G é máximo se e somente se não existe caminho M-aumentante.

Prova. Seja M um emparelhamento, e seja M^* um emparelhamento máximo.

Considere o grafo H induzido pelas arestas em $M \cup M^*$.

Como cada vértice é incidente a no máximo uma aresta de M e no máximo uma aresta de M^*, cada componente de H possui grau máximo no máximo 2.

Teorema de Berge

Um emparelhamento M em um grafo G é máximo se e somente se não existe caminho M-aumentante.

Prova. Seja M um emparelhamento, e seja M^* um emparelhamento máximo.

Considere o grafo H induzido pelas arestas em $M \cup M^*$.

Como cada vértice é incidente a no máximo uma aresta de M e no máximo uma aresta de M^*, cada componente de H possui grau máximo no máximo 2.

Ou seja, cada componente de H é um dentre

Teorema de Berge

Um emparelhamento M em um grafo G é máximo se e somente se não existe caminho M-aumentante.

Prova. Seja M um emparelhamento, e seja M^* um emparelhamento máximo.

Considere o grafo H induzido pelas arestas em $M \cup M^*$.

Como cada vértice é incidente a no máximo uma aresta de M e no máximo uma aresta de M^*, cada componente de H possui grau máximo no máximo 2.

Ou seja, cada componente de H é um dentre

uma aresta isolada; um caminho M-alternante; um circuito M-alternante; um caminho M-aumentante

Teorema de Berge

Um emparelhamento M em um grafo G é máximo se e somente se não existe caminho M-aumentante.

Prova. Seja M um emparelhamento, e seja M^* um emparelhamento máximo.

Considere o grafo H induzido pelas arestas em $M \cup M^*$.

Como cada vértice é incidente a no máximo uma aresta de M e no máximo uma aresta de M^*, cada componente de H possui grau máximo no máximo 2.

Ou seja, cada componente de H é um dentre

uma aresta isolada; um caminho M-alternante; um circuito M-alternante; um caminho M-aumentante

Como se M não é máximo, então temos $|M^*| > |M|$ e, portanto, H possui uma componente com mais arestas de M^* do que de M. Essa componente tem que ser um caminho M-aumentante.

Teorema de Berge

Um emparelhamento M em um grafo G é máximo se e somente se não existe caminho M-aumentante.

Prova. Seja M um emparelhamento, e seja M^* um emparelhamento máximo.

Considere o grafo H induzido pelas arestas em $M \cup M^*$.

Como cada vértice é incidente a no máximo uma aresta de M e no máximo uma aresta de M^*, cada componente de H possui grau máximo no máximo 2.

Ou seja, cada componente de H é um dentre

uma aresta isolada; um caminho M-alternante; um circuito M-alternante; um caminho M-aumentante

Como se M não é máximo, então temos $|M^*| > |M|$ e, portanto, H possui uma componente com mais arestas de M^* do que de M. Essa componente tem que ser um caminho M-aumentante. $\square$

Considerações finais

Considerações finais

O algoritmo proposto encontra em cada iteração um caminho aumentante

Considerações finais

O algoritmo proposto encontra em cada iteração um caminho aumentante

O alforitmo de Hopcroft-Karp encontra um conjunto maximal de caminhos aumentantes, e possui complexidade $O(m\sqrt{n})$.

Considerações finais

O algoritmo proposto encontra em cada iteração um caminho aumentante

O alforitmo de Hopcroft-Karp encontra um conjunto maximal de caminhos aumentantes, e possui complexidade $O(m\sqrt{n})$.

Teorema (Hall)

Seja G um grafo bipartido com bipartição $V = A \cup B$, e seja $X \subseteq A$. Existe um emparelhamento que satura todos os vértices de X se e somente se $|N(X')| \geq |X'|$ para todo $X' \subseteq X$.

Emparelhamentos em grafos bipartidos

Fábio Botler

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação
Universidade Federal do Rio de Janeiro