CONTROLE ÓTIMO PARA PROBLEMAS LQ A TEMPO CONTÍNUO COM SALTOS MARKOVIANOS

Jack Baczynski

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Prof. Marcelo Dutra Fragoso, Ph. D.

Prof. Ernesto Prado Lopes, Ph. D.

Prof. Oswaldo L. V. Costa, Ph. D.

Prof. Carlos S. Kubrusly, Ph. D.

Prof. Augusto C. Gadelha Vieira, Ph. D.

A. Bhaya.

Prof. Amit Bhaya, Ph. D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

JUNHO DE 2000

BACZYNSKI, JACK

Controle Ótimo para Problemas LQ a Tempo Contínuo com Saltos Markovianos [Rio de Janeiro] 1999

VII, 133 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 2000)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Controle Estocástico e Estabilidade.

2. Sistemas Lineares a Tempo Contínuo.

3. Semigrupo.

4. Cadeia de Markov.

5. Sistemas em Dimensão Infinita

I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

A meus pais Gina e Bronislaw

A minha esposa Sandra

Aos meus filhos Tathiana, Alexandre, Eduardo e Daniela

AGRADECIMENTOS:

Agradeço a minha mãe e ao meu pai, pela confiança que tiveram, em todos os momentos, no resultado final dessa jornada. Em especial, à minha mãe, pelo interesse e mesmo curiosidade manifestados.

Agradeço a minha esposa Sandra que valorizou meu trabalho e me ajudou; aos meus filhos pela importância que sempre deram a esta tarefa.

Agradeço aos orientadores, Professores Marcelo Fragoso e Ernesto Lopes pela dedicação de um tempo precioso. Em especial, ao Professor Marcelo, pela indicação do assunto e valiosas discussões.

Não posso deixar de agradecer ao Professor Carlos Kubrusly, sempre presente em momentos importantes da minha trajetória acadêmica.

Gostaria ainda de prestar meu reconhecimento à UFRJ, à COPPE Sistemas em particular, ao LNCC pelo apoio computacional e logístico em Petrópolis e ao suporte dado pelo CNPq.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

CONTROLE ÓTIMO PARA PROBLEMAS LQ A TEMPO CONTÍNUO COM SALTOS MARKOVIANOS

Jack Baczynski

Junho/2000

Orientadores: Marcelo Dutra Fragoso
Ernesto Prado Lopes

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Resolvemos o problema de controle ótimo a tempo continuo e horizonte infinito para sistemas lineares com saltos markovianos (MJLS) e critério de custo na forma integral quadrática. O que distingue este problema dos demais problemas encontrados na literatura sobre essa classe de assuntos é, essencialmente, o fato de adotarmos um conjunto infinito enumerável para a cadeia de saltos. Diferentemente do que ocorre no caso finito, um ponto peculiar neste cenário é que os conceitos de estabilidade na média quadrática e estabilidade estocástica não são mais equivalentes. A abordagem do caso infinito enumerável requer, além da teoria de operadores em espaços de Banach, a utilização de um ferramental elaborado, tal como a teoria de semigrupo e uma técnica de decomplexificação.

A solução para o problema recai, em parte, no estudo de um conjunto infinito enumerável de equações de Riccati algébricas interconectadas (ICARE). Estabelecemos condições de existência e unicidade de solução positiva semidefinida para a ICARE, a partir dos conceitos estendidos de estabilizabilidade estocástica e detectabilidade estocástica. Estes conceitos são capturados no arcabouço da teoria de operadores em espaços de Banach e, paralelamente ao caso clássico LQ, têm correspondência com o espectro de um certo operador linear de dimensão infinita.

Beneficiamo-nos ainda das teorias acima, abordando a questão de estabilidade via o conjunto infinito enumerável de equações de Lyapounov para o MJLS.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

OPTIMAL CONTROL FOR CONTINUOUS TIME LQ-PROBLEMS WITH INFINITE MARKOV JUMP PARAMETERS

Jack Baczynski

June/2000

Advisors: Marcelo Dutra Fragoso
Ernesto Prado Lopes

Department: Systems and Computing Engineering

The subject matter of the thesis is the optimal control problem for continuous-time linear systems subject to Markovian jumps in the parameters and the usual infinite time horizon quadratic cost.

What essentially distinguishes our problem from previous problems concerning this class of subjects, is the fact that the Markov chain takes values on a countably infinite set. Unlike the finite state case, a peculiar feature of this scenario is that mean square stability and stochastic stability are no longer equivalent concepts. To tackle our problem, we make use of powerful tools from semigroup theory in Banach space and a decomplexification technique.

The solution for the problem relies, in part, on the study of a countably infinite set of coupled algebraic Riccati equations (ICARE). Conditions for existence and uniqueness of a positive semidefinite solution of the ICARE are obtained via the extended concepts of stochastic stabilizability (SS) and stochastic detectability (SD). These concepts are couched into the theory of operators in Banach space and, parallel to the classical LQ case, bound up with the spectrum of a certain infinite dimensional linear operator.

We benefited from the above theories to pose the stability matter via the countably infinite set of Lyapunov equations associated to the MJLS.

Índice

Capítulo 1

Abreviaturas

Ao longo dos capítulos da tese, utilizamos as seguintes abreviaturas:

v.a.: variável aleatória.

MJLS: sistema linear com saltos markovianos (da abreviatura em inglês para Markov jump linear system).

LQ: problema de controle ótimo para a classe dos sistemas lineares com critério de custo integral quadrático (da abreviatura em inglês para linear/ quadratic).

JLQ: problema de controle ótimo para a classe dos MJLSs com critério de custo integral quadrático (da abreviatura em inglês para jump/ linear/ quadratic).

SS: estabilizabilidade estocástica (da abreviatura em inglês para stochastic stabilizability).

SD: detetabilidade estocástica: (da abreviatura em inglês para stochastic detectability).

MSS: estabilizabilidade na média quadrática (da abreviatura em inglês para mean square stabilizability).

ICARE: conjunto infinito enumerável de equações de Riccati algébricas interconectadas associadas ao MJLS (da abreviatura em inglês para countably infinite coupled algebraic Riccati equation).

Capítulo 2

Introdução

A partir dos resultados de Wonham [69] e Sworder [62], há trinta anos, uma extensa teoria foi desenvolvida para sistemas lineares com saltos markovianos. Os resultados obtidos estabeleceram uma base sólida para estabilidade e controle ótimo (ver, p.ex., [5], [8], [9], [13], [18], [19], [24], [26], [29], [30], [32], [33]-[36], [41], [45]-[47], [50], [52]-[54], [57], [62], [63], [68], [69]). Diversos resultados também foram obtidos para o problema de filtragem (ver, p.ex., [6], [7], [10], [11], [16], [27], [37]), controle H_∞ [17], [20], [22], [40], [38], [60] e controle robusto [55]. Mais recentemente, foram obtidos resultados para o problema H_2 (ver, p.ex.,[23]), H_2/H_∞ [20], jogos dinâmicos [60], [3] e MJLSs com *delay* (ver, p.ex., [4]). Finalmente, é interessante salientar a conexão entre os LDVs (abreviatura em inglês para "linear dinamically varying systems") e os MJLSs, recentemente explorada por Bohacek et al [12]. Os controladores LDVs dizem respeito a certa técnica para se controlar sistemas não lineares com dinâmicas complicadas.

Além do interesse no desenvolvimento teórico da classe MJLS, demonstrado pelas inúmeras publicações sobre o tema, esses modelos vem despertando grande interesse pela sua potencialidade na modelagem de sistemas cujas estruturas estão sujeitas à variações aleatórias abruptas. Nesta categoria incluem-se os sistemas tolerantes a falhas (sistemas críticos de segurança) e sistemas complexos integrados, o que portanto, remete os MJLSs a inúmeras aplicações, tais como: processos químicos, usinas nucleares, energia elétrica [67], [51], robótica, sistemas fabris, técnicas para diagnóstico automático de eletrocardiogramas [66], estruturas flexíveis de larga escala para estações espaciais tais como estruturas de captação de energia solar e sistemas de antenas [64], sistemas de controle aéreo, em particular, interferências eletromagnéticas [43] e confiabilidade [56], rastreamento de alvos múltiplos, econometria [8], [25], etc.

Os MJLSs pertencem à categoria dos sistemas híbridos, no sentido de que o processo de estado $\{x\}$ toma valores em $\mathbb{C}^n$, um espaço de estado contínuo, enquanto que a cadeia de Markov $\{\theta\}$ toma valores num espaço de estado discreto, compondo assim um espaço de estado "híbrido" para o processo Markov $\{x, \theta\}$.

Apesar do conjunto considerável de trabalhos lidando com a classe MJLS, um número razoável de questões continua em aberto, como por exemplo a questão de estabilidade com probabilidade um *(almost sure)*, o problema de controle com observações parciais, controle ergódico, etc. Além disso, nada foi feito para a classe MJLSs a tempo contínuo onde a cadeia de Markov tem *espaço de estado infinito enumerável.* No caso a tempo discreto, [18] e [17] são as primeiras incursões nesse cenário.

Nesse trabalho, abordamos o problema de controle ótimo *a tempo contínuo* para a classe dos MJLSs onde a cadeia de Markov toma valores num *espaço de estado infinito enumerável*, ao invés de um conjunto finito como usualmente considerado na literatura. Sendo o primeiro trabalho nesse cenário, até onde temos conhecimento, tivemos que introduzir toda uma metodologia que vai do uso da teoria de operadores em *dimensão infinita*, onde a teoria de semigrupos teve um papel fundamental, até a solução de equações de Riccati em espaços de Banach, incluindo uma técnica de *decomplexificação.* No que diz respeito à características *estocásticas* do trabalho, questões delicadas surgem quando consideramos o espaço de estado da cadeia de Markov infinito enumerável, como por exemplo a questão de ordem na definição da matriz de transição. Além disso, foi desenvolvido todo um aparato sobre questões de estabilidade que acreditamos será básico para pesquisas futuras nesse contexto da cadeia de Markov.

A teoria de semigrupo foi crucial para estabelecermos equivalência entre a condição de estabilizabilidade estocástica (SS) (detetabilidade estocástica (SD)) e certa propriedade do espectro de um operador linear de dimensão infinita. A teoria de operadores foi essencial para equacionar todo o problema na estrutura de espaços de Banach de dimensão infinita e identificar convenientemente tais espaços, o que nos conduziu à solução ótima para o problema. Além disso, introduzimos uma adaptação natural do conceito de decomplexificação descrito na Seção 18 de [1], para funções não lineares complexas com dominio em $\mathbb{R}$. Isto foi necessário para estabelecermos uma versão do conceito de gradiente e daí, a aproximação linear para funcionais não necessariamente holomorfos, o que parece corresponder a uma noção inexplorada na literatura de controle. Com esta estrutura em mãos, pudemos especificar convenientemente o semigrupo do processo Markov $\{x, \theta\}$ aplicado a um certo funcional quadrático (não holomorfo) com domínio no espaço complexo $\mathbb{C}^n$ e assim preservar a definição do nosso problema no corpo dos complexos. Tal estrutura (complexa) não é introduzida meramente para fins de generalização do problema, mas por ser imprescindível à prova de necessidade do importante Lema 53, que conecta certa propriedade espectral de um operador em dimensão infinita com o conceito de estabilizabilidade (detectabilidade) estocástica. A estruturação do problema no corpo dos complexos condiz na verdade com o conhecido fato de que, ao lidarmos com teoria de operadores e análise espectral, é tacitamente mais conveniente definir os operadores em espaços complexos.

O caso infinito enumerável é, de fato, uma situação bem mais delicada que o caso finito e seus resultados não podem ser obtidos por simples extensão das técnicas próprias à especialização finita. As diferenças no tratamento dos dois casos (finito e infinito) talvez possam ser melhor traduzidas através de resultados que ilustram a sutileza entre os dois cenários. Por exemplo, estabilidade estocástica e estabilidade na média quadrática, são equivalentes quando consideramos um conjunto finito para a cadeia de Markov do MJLS [30], o que não acontece no caso infinito (ver contra-exemplo da Seção 8.3). Não obstante, idéias inerentes ao caso de dimensão finita são usadas no nosso cenário. Por exemplo, paralelamente ao que ocorre no caso clássico LQ (vide, por exemplo, [68]), estabelecemos a solução ótima para o controle a partir da condição de existência e unicidade de soluções para um certo conjunto infinito enumerável de equações de Riccati algébricas interconectadas (ICARE), assumindo-se certas condições estruturais tais como estabilizabilidade estocástica e detectabilidade estocástica. É importante também salientar que [18] serviu como um roteiro seguro para o nosso trabalho, no que concerne a estruturação dos resultados.

Um aspecto peculiar da estrutura de resultados que conseguimos aqui é que, mesmo especializando o nosso problema para a situação onde o espaço de estado da cadeia de Markov é finito, a tese ainda propicia uma contribuição importante: as condições do Teorema 61 são um relaxamento daquelas consideradas no Teorema 5 de [45], i.e., o Teorema 5 de [45] usa o conceito de observabilidade enquanto que nós usamos o conceito SD para assegurar os resultados de otimalidade. De fato, se considerarmos o caso de um único estado para a cadeia de Markov (caso sem saltos) o conceito SD se reduz ao conceito de detetabilidade no sentido usual (vide Seção 8.6) enquanto que o conceito de observabilidade usado no Teorema 5 de [45] (vide a Definição 3 de [45]) se reduz à observabilidade no sentido usual. Esta contribuição se deve, principalmente, ao fato de identificarmos, em nossa técnica, o operador em espaço de Banach de dimensão infinita e a propriedade espectral citados acima.

No caso limite, onde o nosso caso se reduz ao caso sem saltos (vide a Seção 8.6), os conceitos SS e SD resgatam os conceitos de estabilizabilidade e detectabilidade do caso clássico determinístico e a condição espectral acima se reduz à condição usual "autovalores da matriz do sistema determinístico com parte real negativa". Esta reconciliação não é obtida em [41] e [45]. Logo, o problema com saltos, juntamente com os conceitos estruturais SS e SD e os resultados obtidos, são uma generalização clara do importante caso clássico LQ.

A tese também contempla o estudo de um conjunto infinito enumerável de equações de Lyapunov associado ao MJLS e, com o suporte das teorias de operadores e de semigrupo, mostramos que a condição de existência e unicidade de soluções para o conjunto de equações acima equivale à estabilizabilidade estocástica do MJLS. Este resultado estende o resultado de [45] para o caso infinito enumerável e provê a contrapartida de [18] para o caso contínuo.

Um resumo do conteúdo da tese pode ser dado da seguinte maneira. No Capítulo 3 introduzimos notações e definições que usamos ao longo da tese, bem como algumas propriedades básicas. No Capítulo 4 descrevemos o modelo, o problema de controle e anunciamos os resultados intermediários principais obtidos ao curso dos demais capítulos. Alguns conceitos fundamentais, tais como o de decomplexificação, a aproximação linear para funções não holomorfas, aspectos da teoria de semigrupo e resultados para certa classe de equações diferenciais lineares em espaços de Banach são apresentados no Capítulo 5. No capítulo 6 introduzimos os objetos probabilísticos, os operadores e os espaços em dimensão infinita, seminais para o desenvolvimento do caso onde temos um conjunto infinito enumerável para a cadeia de Markov. Os desenvolvimentos e resultados centrais da tese são apresentados nos Capítulos 7 e 8 para o problema em horizonte finito e infinito, respectivamente, bem como no Capítulo 9, onde abordamos a questão de estabilidade via a equação de Lyapunov associada ao MJLS. O Apêndice é basicamente composto de provas que deslocamos do corpo central da tese com o fito de tornar a leitura mais fluida. Nele introduzimos também um exemplo que deixa claro que o conceito de decomplexificação aqui adotado se transporta, de fato, ao conceito de decomplexificação como definido em [1].

Capítulo 3

Preliminares

3.1 Introdução

Neste capítulo, introduzimos as notações e definições que usaremos ao longo da tese, bem como algumas propriedades básicas.

Com o intuito de facilitar a consulta, dividimos esse material em duas partes:

1. informações mais gerais ou freqüentes na literatura

2. definições e propriedades básicas dos espaços de Banach específicos deste trabalho.

3.2 Notação Geral e Definições

Como é usual, $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$) representa o espaço Euclideano n-dimensional no corpo dos números complexos (resp. reais) $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) e denotamos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais $\{1, 2, ...\}$. Definimos $\mathcal{S} = \mathbb{N}$ para designar, especificamente, o espaço de estado da cadeia de saltos markovianos (vide Capítulo 4).

Utilizamos a notação $^{-}$, $'$ e *, respectivamente, para a operação de conjugação, de transposição e de transposição conjugada de um vetor ou matriz e $\otimes$ para o produto de Kronecker. Eventualmente, utilizamos $\circ$ para designar composição de operadores.

De modo a evitar confusão notacional com os índices i e j que usualmente aparecem em somatórios, representaremos por ι o complexo imaginário puro. Para $z \in \mathbb{C}$, simbolizamos por z_{Re} (e às vezes $\mathrm{Re}(z)$) e z_{Im}, respectivamente, a parte real e imaginária de z e escrevemos $z = z_{\mathrm{Re}} + \iota z_{\mathrm{Im}}$. Denotamos $x_{\mathrm{Re}} := (x_{1\,\mathrm{Re}}, .., x_{n\,\mathrm{Re}})'$ e $x_{\mathrm{Im}} := (x_{1\,\mathrm{Im}}, .., x_{n\,\mathrm{Im}})'$ a parte real e imaginária de $x \in \mathbb{C}^n$ e escrevemos $x = x_{\mathrm{Re}} + \iota x_{\mathrm{Im}}$ (as notações $x_{j\,\mathrm{Re}}$ e $x_{j\,\mathrm{Im}}$ abreviam as notações mais precisas $(x_j)_{\mathrm{Re}}$ e $(x_j)_{\mathrm{Im}}$, $j = 1, .., n$).

Definimos $\mathbb{M}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ o espaço linear normado constituído por todas as matrizes complexas n por m e, por simplicidade, escrevemos $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ sempre que $n = m$.

Denotamos $L \geq 0$ e $L > 0$ para indicar que uma matriz auto-adjunta é, respectivamente, semidefinida positiva e definida positiva e escrevemos

$$\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+ = \{L \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n); L = L^* \geq 0\}$$

Salvo indicação em contrário, $\|\cdot\|$ é usado tanto para representar a norma Euclideana em $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$ e no espaço produto $\mathbb{R}^m \times \mathbb{C}^n$ como para representar a norma espectral induzida em $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$. Denotamos por $\|\cdot\|_L$ a norma em $\mathbb{C}^n$ induzida pelo produto interno $\langle x, y\rangle_L = x^* L y$ sempre que $L = L^* \geq 0$. Indicamos ainda por $\|\cdot\|_Y$ uma norma genérica no espaço Y. Neste caso o texto deixará claro a que tipo de norma a notação se refere.

Nota 1 *Para todo $L \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$, existe um único $L^{1/2} \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ tal que $(L^{1/2})^2 = L$. O valor absoluto de $L \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$, denotado por $|L|$, é definido como $|L| = (L^* L)^{1/2}$. Verificamos que $\|L\| = \||L|\|$.*

Nota 2 *Todo elemento em $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ tem uma decomposição auto-adjunta Cartesiana (vide, e.g., [59], pg 376) e todo elemento auto-adjunto em $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ pode ser decomposto em parte positiva e parte negativa ([59], pg 464). Logo, para todo $L \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$, existem X^+, X^-, Y^+, Y^- em $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ tal que*

$$L = \left(X^+ - X^-\right) + \iota\left(Y^+ - Y^-\right)$$

Além disso $X^+ \leqslant X^+ + X^- = (L + L^*)/2$ e portanto $\|X^+\| \leqslant \|L\|$. Da mesma forma, $\|X^-\| \leqslant \|L\|$, $\|Y^+\| \leqslant \|L\|$ e $\|Y^-\| \leqslant \|L\|$.

Nota 3 *Se $A \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ é real (no sentido de ter elementos reais), então, em geral, inexistem A_1, $A_2 \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ autoadjuntas e reais tais que $A = A_1 + \iota A_2$ ou $A = A_1 + A_2$*

(de fato, na primeira (resp. segunda) expressão, se A_1e A_2 são reais (resp. auto-adjuntas), então A é obrigatoriamente complexa (auto-adjunta)). Logo, a decomposição conforme a Nota 2 não seria válida caso enunciássemos o problema de controle do Capítulo 4 na versão real. Isso inviabilizaria a parte "somente se " da prova do importante Lema 53. Para contornar o problema, teríamos, por exemplo, que lançar mão de uma técnica de imersão, restringindo nossos resultados ao caso real e preservando as hipóteses de estabilidade e detetabilidade no campo complexo.

Denotamos por $\{\eta\}$ qualquer processo $\{\eta(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$, sempre que estiver claro se T é finito ou não e por $E[\cdot]$ a expectância matemática usual.

Ainda, para algum conjunto A, denotamos por $1_A\ \{.\}$ a medida de Dirac.

Para um espaço de dimensão finita Y, denotamos por $o\left(\|r\|\right)$ toda função f : $Y\!\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{r\to 0}\frac{f(r)}{\|r\|_Y}=0$, com r tendendo a zero por qualquer caminho em Y.

Denotemos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ por $\mathbb{E}$. Uma função f : $[0,\infty)\!\rightarrow \mathbb{E}$, é dita $o\left(\delta\right)$ se $\lim_{\delta\downarrow 0}$ $\frac{|f(\delta)|}{\delta}=0$. Uma notação similar, qual seja, $o^n\left(\delta\right)$ $\left(o^{nn}\left(\delta\right)\right)$, representa uma função a valores num espaço de vetores (matrizes) se o limite acima vale para cada elemento do vetor (da matriz).

Finalmente suponha $g : \mathbb{R}^n\!\rightarrow \mathbb{R}$ com derivadas parciais $\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}$, $i=1,..,n$. Denotamos o gradiente de g por $\nabla_x g(x)=(\frac{\partial g(x)}{\partial x_1}...\frac{\partial g(x)}{\partial x_n})'$.

3.3 Espaços de Banach

Denotamos $\mathcal{H}_1^{m,n}$ (resp. $\mathcal{H}_\infty^{m,n}$) o espaço linear de todas as seqüências infinitas de matrizes complexas $H=(H_1,\ H_2,...)$, $H_i\in\mathbb{M}(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n)$ tais que $\sum_{i=1}^\infty\ \|H_i\|<\infty$ (resp. $\sup\{\|H_i\|\ ,\ i\in\mathcal{S}\}<\infty$) e escrevemos $\mathcal{H}_1^n$ e $\mathcal{H}_\infty^n$ sempre que $n=m$.

Para $H\in\mathcal{H}_1^{m,n}$ (resp. $H\in\mathcal{H}_\infty^{m,n}$) definimos

$$\|H\|_1=\sum_{i=1}^{\infty}\|H_i\| \quad \text{(resp. } \|H\|_\infty=\sup\{\|H_i\|\ ,\ i\in\mathcal{S}\})$$

a norma em $\mathcal{H}_1^{m,n}$ (resp. $\mathcal{H}_\infty^{m,n}$).

Denotamos

$$\mathcal{H}_1^{n^+}=\{H\in\mathcal{H}_1^n,\ H_i\in\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+, i\in\mathcal{S}\}$$

e

$$\mathcal{H}_\infty^{n^+}=\{H\in\mathcal{H}_\infty^n,\ H_i\in\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+, i\in\mathcal{S}\}$$

Para $H = (H_1, H_2, ...)$ e $L = (L_1, L_2, ...)$ em $\mathcal{H}_1^{n+}$ usamos a notação $H \leqslant L$ para indicar que $H_i \leqslant L_i$ para cada i em $\mathcal{S}$. Verificamos que

$$H \leqslant L \Rightarrow \|H\|_1 \leqslant \|L\|_1 \tag{3.1}$$

Ademais, usamos H^* para indicar que cada componente H_i^* de H^* é a adjunta de H_i, $i \in \mathcal{S}$ e denotamos

$$\mathcal{H}_\infty^{n^*} = \{H \in \mathcal{H}_\infty^n,\ H_i^* = H_i,\ i \in \mathcal{S}\}$$

Estendemos a notação da ordenação parcial acima para os elementos $H \in \mathcal{H}_1^n$ tais que $H = H^*$.

Usamos $(l_1, \|\cdot\|_1)$, $(l_2, \|\cdot\|_2)$ e $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, respectivamente, para os conjuntos constituídos por todas seqüências infinitas de números complexos $x = (x_1, x_2, ...)$ tais que $\sum_{i=1}^\infty |x_i| < \infty$, $\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty$ e $\sup\{|x_i|,\ i = 1, 2, ...\} < \infty$, equipados com a norma usual $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^\infty |x_i|$, $\|x\|_2 = \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2$e $\|x\|_\infty = \sup\{|x_i|,\ i = 1, 2, ...\}$ e, no caso de $(l_2, \|\cdot\|_2)$, equipado com o produto interno usual $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Nota 4 *É fácil verificar que $(\mathcal{H}_1^{m,n}, \|\cdot\|_1)$ e $(l_1, \|\cdot\|_1)$ são uniformemente homeomorfos. Similarmente, este é o caso de $(\mathcal{H}_\infty^{m,n}, \|\cdot\|_\infty)$ e $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Uma vez que $(l_1, \|\cdot\|_1)$ e $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ são espaços de Banach, temos então que $(\mathcal{H}_1^{m,n}, \|\cdot\|_1)$ e $(\mathcal{H}_\infty^{m,n}, \|\cdot\|_\infty)$ também o são.*

Nota 5 *Consideremos $Q = (Q_1, Q_{2,...}) \in \mathcal{H}_1^n$ arbitrário. Da Nota 2, temos que*

$$Q_i = \left(X_i^+ - X_i^-\right) \ + \iota\left(Y_i^+ - Y_i^-\right)$$

onde X_i^+,X_i^- ,Y_i^+ e Y_i^- pertencem a $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$. Vamos agora definir $X^+ = (X_1^+, X_2^+, ...)$, $X^- = (X_1^-, X_2^-, ...)$, $Y^+ = (Y_1^+, Y_2^+, ...)$ e $Y^- = (Y_1^-, Y_2^-, ...)$. Da Nota 2 e tendo em vista que $Q \in \mathcal{H}_1^n$, vem que X^+, X^-, Y^+ e Y^- pertencem a $\mathcal{H}_1^n$. Logo, $Q \in \mathcal{H}_1^n$ sempre pode ser decomposta em

$$Q = \left(X^+ - X^-\right) \ + \iota\left(Y^+ - Y^-\right)$$

com X^+, X^-, Y^+ e Y^- em $\mathcal{H}_1^{n+}$.

Denotamos

$$\check{\mathcal{H}}_\infty^{n+} = \{H \in \mathcal{H}_\infty^{n+}, H_i > \alpha_H I \text{ para algum } \alpha_H > 0, i \in \mathcal{S}\}$$

e dizemos que cada elemento de $\breve{\mathcal{H}}_{\infty}^{n+}$ é estritamente positivo.

Denotamos $\mathcal{W}_{\infty}^{m,n}$ o espaço constituído por todas as matrizes complexas de dimensão infinita do tipo

$$\mathcal{C} = diag\,(C_i) \equiv \begin{bmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & 0 & \\ & & \cdot & \\ & 0 & \cdot & \\ & & & \cdot \end{bmatrix}$$

onde $C_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$, $i \in \mathcal{S}$ e $\sup_{i\in\mathcal{S}} \|C_i\| < \infty$. Para $\mathcal{C} \in \mathcal{W}_{\infty}^{m,n}$ definimos

$$\|\mathcal{C}\|_{\mathcal{W}_{\infty}} = \sup_{i\in\mathcal{S}} \|C_i\|$$

a norma em $\mathcal{W}_{\infty}^{m,n}$. Escrevemos $\mathcal{W}_{\infty}^{n}$ sempre que $n = m$ e denotamos

$$\mathcal{W}_{\infty}^{n+} = \{\mathcal{C} \in \mathcal{W}_{\infty}^{n},\, C_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+, i \in \mathcal{S}\}$$

a classe dos elementos semidefinidos positivos de $\mathcal{W}_{\infty}^{n}$.

Para $\mathcal{C} \in \mathcal{W}_{\infty}^{m,n}$, dizemos que

$$\mathcal{C}^* = diag(C_i^*) \in \mathcal{W}_{\infty}^{n,m} \tag{3.2}$$

e denotamos $\mathcal{W}_{\infty}^{n^*} = \{\mathcal{C} \in \mathcal{W}_{\infty}^{n}\colon\, \mathcal{C}^* = \mathcal{C}\}$ a classe dos elementos auto-adjuntos de $\mathcal{W}_{\infty}^{n}$.

Para $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{W}_{\infty}^{n*} \supset \mathcal{W}_{\infty}^{n+}$, dizemos que $\mathcal{B} \leqslant \mathcal{C}$ se $B_i \leqslant C_i$, $i \in \mathcal{S}$.

Nota 6 *Claramente, $(\mathcal{W}_{\infty}^{m,n}, \|\cdot\|_{\mathcal{W}_{\infty}})$ e $(\mathcal{H}_{\infty}^{m,n}, \|\cdot\|_{\infty})$ são uniformemente homeomorfos. Uma vez que $(\mathcal{H}_{\infty}^{m,n}, \|\cdot\|_{\infty})$ é um espaço de Banach, $(\mathcal{W}_{\infty}^{m,n}, \|\cdot\|_{\mathcal{W}_{\infty}})$ também o é.*

Para qualquer espaço de Banach complexo X, denotamos $Blt\,(X)$ o espaço de Banach constituído por todas transformações lineares limitadas definidas e a valores em X, equipadas com a norma induzida uniforme representada por $\|\cdot\|$ e, para $L \in Blt\,(X)$, denotamos $\sigma\,(L)$ o espectro de L.

Capítulo 4

Descrição do Problema

Fixamos um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ munido de uma filtragem contínua a direita $\{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}\colon\ t \in [s,T)\}$ para $s, T \in [0,\infty)$ arbitrários e consideramos a classe de sistemas dinâmicos modelados pelo seguinte tipo de equação diferencial estocástica:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t), \quad s < t < T \\ x(s) &= x_s, \quad \theta(s) = \theta_s \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $x(t) \in \mathbb{C}^n$ denota o vetor de estado e $u(t) \in \mathbb{C}^m$ o controle adaptado à σ-álgebra $\mathcal{F}_t$, $t \in [s,T)$. Os parâmetros do sistema são funções de um processo de Markov homogêneo $\{\theta(t), t \in [s,T]\}$ com trajetórias contínuas à direita e um espaço de estado infinito enumerável que, por conveniência, designamos por $\mathcal{S} = \{1, 2, ...\}$. Assumimos que ao processo de saltos markovianos $\{\theta\}$, corresponde uma função matriz de probabilidade de transição estacionária standard (vide [48, pg 138]) $\{P_\tau(i,j)\}_{i,j\in\mathcal{S}}$ no sentido de que, para $0 \leqslant \tau \leqslant T - t$,

$$P_\tau(i,j) = \mathcal{P}\{\theta(t+\tau) = j|\ \theta(t) = i\} = \begin{cases} \lambda_{ij}\tau + o_{ij}(\tau) & i \neq j \\ 1 + \lambda_{ii}\tau + o_{ii}(\tau) & i = j \end{cases} \tag{4.2}$$

onde definimos $\Lambda = [\lambda_{ij}]_{i,j\in\mathcal{S}}$ a matriz infinitesimal de $\{\theta\}$ com $\lambda_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$. O processo de Markov $\{\theta\}$ é conservativo no sentido de que

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} \lambda_{ij} = -\lambda_{ii}, \quad i \in \mathcal{S} \tag{4.3}$$

e assumimos que os coeficientes $-\lambda_{ii}$ têm limite superior uniforme na variável i, digamos c (ou equivalentemente, que a condição standard $\lim_{\tau\to 0} P_\tau\ (i,i) = 1$ vale uniformemente para todo $i \in \mathcal{S}$; vide [48]). Assumimos também que $\{A_{(.)}, B_{(.)}\}$ são tais que, para cada $j \in \mathcal{S}$ e cada $\theta(t) = j$, $A_{\theta(t)} = A_j$ e $B_{\theta(t)} = B_j$, com A_j, B_j sendo, respectivamente, matrizes constantes em $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ e $\mathbb{M}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$. Além disso, supomos que os parâmetros sejam limitados em norma, no sentido de que $A = (A_1, A_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^n$ e $B = (B_1, B_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{m,n}$. Consideramos x_s uma v.a. de segunda ordem, dependente ou não da v.a. θ_s, e denotamos ϑ_s=$\vartheta_s(x_s, \theta_s)$ a distribuição conjunta da condição inicial (x_s, θ_s). Adicionalmente, assumimos as v.as. $\theta(t+\tau)$ condicionalmente independentes de x_s, dado $\theta(t)$, para $s \leqslant t < T$, $0 < \tau \leqslant T - t$ (esta estrutura para a condição inicial é natural, sendo solicitada em determinada prova; mais ainda, ela propicia a geração do "span" correspondente a certo espaço de Banach, o que não ocorre caso tomemos a hipótese usual de independência de $\theta(t)$, $t \geq s$, com relação a x_s.).

Denotaremos o sistema (4.1)-(4.2) por (A, B, Λ).

Consideramos o problema de observações perfeitas, no sentido de que o controlador tem acesso ao processo de estado $\{x\}$ e à cadeia de Markov $\{\theta\}$ até o instante presente t. Nesse sentido, denotamos $\mathcal{F}_t$ a σ- álgebra gerada pelo processo observado $\{(x(r), \theta(r)),\ s \leqslant r \leqslant t\}$.

Inicialmente, estudamos o problema de controle ótimo em horizonte finito, definido a seguir.

Assumimos que a classe das políticas admissíveis de controle $\mathcal{U}^{s,T}$ ($\mathcal{U}^{0,T} \equiv \mathcal{U}^T$) é constituída das funções Borel mensuráveis $u : \{[s,T], \mathbb{C}^n, \mathcal{S}\} \to \mathbb{C}^m$ tais que:

C1. Para alguma constante k que pode depender de u,

(a) $\|u(t,z,i) - u(t,y,i)\| \leqslant k\,\|z-y\|$, z , $y \in \mathbb{C}^n$, $t \in [s,T]$ e $i \in \mathcal{S}$ (Condição Lipschitz).

(b) $\|u(t,y,i)\| \leqslant k(1 + \|y\|)$, $y \in \mathbb{C}^n$, $t \in [s,T]$ e $i \in \mathcal{S}$ (Condição de crescimento).

Para um instante inicial $0 \leqslant s < T$, uma condição terminal $L \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ e para cada política $u \in \mathcal{U}^{s,T}$, definimos o funcional de custo

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_{[s,T],L}(\vartheta_s, u) \\ &= E[\int_s^T \left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(r)\right\|^2 + \left\|\mathcal{R}^{1/2}u(r)\right\|^2 dr + x(T)^* L_{\theta(T)} x(T)] \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $x(t)$ satisfaz (4.1), $\mathcal{R}, \mathcal{Q} \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ e $\mathcal{R} > 0$.

O problema consiste em achar $\hat{u}^T \in \mathcal{U}^{s,T}$ que minimiza $\mathcal{J}_{[s,T],L}(\vartheta_s, u)$.

O fito maior deste trabalho é o problema de controle ótimo em horizonte infinito assim estruturado:

Tomamos a versão do problema de controle ótimo em horizonte finito com $t \geq 0$ e $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}^{0,\infty}$ e a condição adicional

C2. O modelo (4.1) com $t > 0$ é estável no critério da média quadrática (MSS), i.e., $E[\|x(t)\|^2] \to 0$ quando $t \to \infty$, para qualquer distribuição ϑ_0.

Para cada política $u \in \mathcal{U}$, definimos o funcional de custo

$$\mathcal{J}(\vartheta_0, u) := E[\int_0^\infty \left(\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + \left\|\mathcal{R}^{1/2}u(t)\right\|^2\right) dt] \tag{4.5}$$

onde $x(t)$ satisfaz (4.1) com $t > 0$.

O objetivo principal deste trabalho é determinar uma política ótima de controle $\hat{u}$, na classe $\mathcal{U}$, que minimiza o custo acima, i.e., tal que

$$\mathcal{J}(\vartheta_0, \hat{u}) := \inf_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(\vartheta_0, u), \tag{4.6}$$

É importante talvez mencionar que para atingirmos o nosso objetivo os seguintes resultados intermediários são estabelecidos.

(a) Certa versão do gradiente e a forma da aproximação linear para funções não necessariamente holomorfas (Seção 5.2).

(b) Um contraexemplo: falha da equivalência entre os conceitos de estabilizabilidade estocástica e estabilizabilidade na média quadrática quando passamos ao caso de espaço de estado infinito enumerável (Seção 8.3).

(c) As definições de estabilizabilidade estocástica e detetabilidade estocástica (Seção 8.2) como condições estruturais do problema.

(d) Certo operador linear em dimensão infinita e a equivalência de determinada propriedade espectral com as condições SS e SD (Seção 8.4).

(e) Uma condição suficiente de otimalidade: existência e unicidade de soluções para a ICARE (Seção 8.5).

(f) A forma fechada da solução ótima de controle para o problema em horizonte finito (Capítulo 7).

Independentemente do objetivo principal citado acima, um resultado importante conseguido, ainda dentro do contexto dos problemas de controle e estabilidade, diz respeito à

(g) Equação de Lyapunov associada ao MJLS e a equivalência com o conceito de estabilizabilidade estocástica (Capítulo 9).

Nota 7 *Uma vez que* $\{x(t), \theta(t)\}$ *é um processo Markov, (4.1) e (4.4) estabelecem um "problema Markov" e portanto políticas de controle da forma* $u(t) = u(t, x(t), \theta(t))$ *bastam, vis-à-vis a classe mais estendida das políticas de controle da forma* $u(t) = u(t, x(s), \theta(s), s \leqslant t)$. *Notamos que a condição "Markov" do problema depende da expressão do custo. Mais explicitamente, de que a expressão de custo tenha a propriedade de ser "gerada recursivamente para trás". A forma (4.4) é um exemplo padrão na classe de funcionais de custo que exibem esta propriedade (este tema é bem ilustrado em [65] para o caso discreto).*

Nota 8 *Por questões de simplificação, assumimos que as matrizes* $\mathcal{Q}$ *e* $\mathcal{R}$ *são independentes de* $\{\theta\}$. *No entanto, todos os desenvolvimentos e resultados se reestabelecem, verbatim, no caso de considerarmos* $\mathcal{Q}_{\theta(t)}$ *e* $\mathcal{R}_{\theta(t)}$ *limitados em norma.*

Nota 9 *Por solução de (4.1) queremos dizer um processo* $\{x\}$ *cujas funções amostra* $x(\cdot, \omega)$, $\omega \in \Omega$, *são absolutamente contínuas e satisfazem*

$$x(t, \omega) = x_{s,\omega} + \int_s^t A_{\theta(r,\omega)} x(r, \omega) dr + \int_s^t B_{\theta(r,\omega)} u(r, \omega) dr$$

com probabilidade um.

A condição Lipschitz garante unicidade de soluções para (4.1). O conceito de unicidade é dado em termos de trajetórias i.e., se $\{x\}$ *e* $\{y\}$ *são soluções para (4.1), então suas funções amostra são as mesmas com probabilidade um.*

A condição de crescimento linearmente limitado garante que a solução de (4.1) não explode em tempo finito [31]. Esta condição elimina funções impulsionais da classe $\mathcal{U}^{s,T}$, que produziriam trajetórias de $\{x\}$ descontínuas [45].

Nota 10 (extensão da classe $\mathcal{U}$) *Uma restrição de cunho prático que impomos na Seção 4 é que as políticas de controle sejam tais a preservar a estabilidade do sistema, no sentido de que $E[\|x(t)\|^2] \to 0$ quando $t \to \infty$. Isto é bastante natural, tendo em vista que não desejamos que o estado tome valores muito grandes à medida que atuamos no índice de custo. Não obstante, examinamos a extensão da classe $\mathcal{U}$ considerando o relaxamento da Condição C2. Neste novo cenário, $u \in \mathcal{U}$ poderia ser tal que (***i***) $E[\|x(t)\|^2] \to \infty$ quando $t \to \infty$, (***ii***) $E[\|x(t)\|^2] \to$ cte $\in (-\infty, +\infty)$ quando $t \to \infty$ e (***iii***) $E[\|x(t)\|^2]$ é limitada mas não exibe limite quando $t \to \infty$.*

O caso (i) é inócuo, visto que a detetabilidade de $(\bar{Q}^{1/2}, A, \Lambda)$, $\bar{Q}^{1/2} = (Q^{1/2}, Q^{1/2}, \ldots)$ (que é uma condição estrutural a ser assumida adiante), impõe que se $E[\|x(t)\|^2] \to \infty$ quando $t \to \infty$ então $\mathcal{J}(u) = \infty$, de modo que o caso não propicia nenhum interesse. Entretanto, (ii) e (iii) podem estar vinculados a um custo finito e nada nos diz, de antemão, que algum controle associado a estes casos não poderia ser ótimo.

No caso (iii), vale notar que uma característica atrativa da solução ótima de controle do caso clássico LQ ou LQG é que ela é ótima também na classe de controles onde incluímos as políticas variáveis no tempo. Agora, é claro que se uma política de controle é variável ao longo de todo intervalo $[0, \infty)$, dificilmente estará incluída na classe de controles tais que $E[\|x(t)\|^2]$ convirja para algum valor real quando $t \to \infty$. Conseqüentemente tal política se enquadra no caso (iii), salvo se corresponder ao caso (i).

Nesse sentido, seria interessante assegurar que a política ótima de controle na classe $\mathcal{U}$ preserva a otimalidade na classe das políticas onde os casos (ii) e (iii) se incluem, i.e., na versão da classe $\mathcal{U}$ definida na Seção 4 onde descartamos a Condição C2. Isso, de fato, pode ser implementado simplesmente estendendo-se a Proposição 58.

Capítulo 5

Conceitos Fundamentais

5.1 Introdução

Introduzimos, na primeira parte deste capítulo (Seção 5.2), uma adaptação natural do conceito de decomplexificação descrito na Seção 18 de [1], para funções complexas não lineares com imagem em $\mathbb{R}$. Estabelecemos daí, uma versão do conceito do gradiente e subseqüentemente a aproximação linear para funções não necessariamente holomorfas. Isto permitirá enunciar o problema de controle considerando o corpo dos números complexos, tendo em vista que agora, certos desenvolvimentos relativos ao semigrupo associado ao processo de Markov $\{x, \theta\}$, aplicado a certo funcional quadrático (não holomorfo) com domínio em $\mathbb{C}^n$ (vide Seção 7.2), se tornam bem definidos.

Quanto a segunda parte deste capítulo, definimos, na Seção 5.3.1, alguns conceitos básicos da teoria de semigrupo. Na Seção 5.3.2 nós relacionamos certas propriedades espectrais de geradores infinitesimais à propriedades de convergência dos respectivos semigrupos. Na Seção 5.3.3 abordamos a questão de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais lineares em espaços de Banach de dimensão infinita governadas por uma certa classe de operadores infinitesimais. A solução é expressa em termos do semigrupo associado à equação, para todo valor inicial do espaço de Banach considerado.