



## DECOMPOSIÇÃO DE GRAFOS EM SUBGRAFOS LOCALMENTE IRREGULARES

Wanderson Douglas Lomenha Pereira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Fábio Happ Botler

Rio de Janeiro  
Abril de 2021

DECOMPOSIÇÃO DE GRAFOS EM SUBGRAFOS LOCALMENTE  
IRREGULARES

Wanderson Douglas Lomenha Pereira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Orientador: Fábio Happ Botler

Aprovada por: Prof. Fábio Happ Botler

Profa. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Profa. Diana Sasaki Nobrega

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

ABRIL DE 2021

Pereira, Wanderson Douglas Lomenha

Decomposição de grafos em subgrafos localmente irregulares/Wanderson Douglas Lomenha Pereira. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2021.

X, 50 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Fábio Happ Botler

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2021.

Referências Bibliográficas: p. 48 – 50.

1. Grafos. 2. Decomposição. 3. Localmente irregular.  
I. Botler, Fábio Happ. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*A esperança é o sonho do  
homem acordado*

# Agradecimentos

O primeiro agradecimento vai para a minha mãe, a qual reconheço o esforço em dar as melhores oportunidades possíveis aos seus filhos, permitindo que eu chegasse até aqui. Obrigado por todo apoio que você tem dado e por ter apoiado as minhas decisões.

Ao meu orientador Fábio, por ter me acolhido na área e depositado sua confiança em mim. Agradeço a todos os ensinamentos valiosos, pela sua disponibilidade, por sua paciência e por me ajudar a me tornar um pesquisador. Você sempre será uma grande referência para mim. Sou eternamente grato por tudo que você fez e continua fazendo por mim.

A minha melhor amiga e companheira, Larissa, pelo grande incentivo, por me orientar e me motivar com suas, sempre, sensatas palavras. Agradeço também por todas as correções textuais que você realizou no decorrer desse trabalho. Sou muito grato por ter uma companheira tão carinhosa, atenciosa, sensível como você e por sempre estar ao meu lado. Te amo!

Aos meus amigos que tive o prazer de conhecer no PESCC, Alexsander, Alexandre, Moysés, Edinelço e Amanda. Em especial ao Alexsander e ao Moysés que diversas vezes sanaram as minhas dúvidas e que acompanharam todo o processo da minha dissertação. E a Amanda por todo apoio e seus resumos incríveis. Vocês são conceito A.

Ao meu amigo João Gomes, que sempre esteve presente me apoiando durante todo o processo. E por todas as chamadas de vídeos que fizemos para trabalharmos juntos nos problemas. Aos meus amigos da CDJ, Jonathan, Mateus, Pedro Paulo, Pedro Baptista e aos meus irmãos Wallace, Jefferson e Isabelle, vocês participaram menos desse processo de mestrado, mas foram muito importantes. Obrigado a todas as vezes que eu precisei sair e me distrair e vocês estiveram comigo.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro dado a mim, sem o qual este trabalho não poderia ter sido realizado.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## DECOMPOSIÇÃO DE GRAFOS EM SUBGRAFOS LOCALMENTE IRREGULARES

Wanderson Douglas Lomenha Pereira

Abril/2021

Orientador: Fábio Happ Botler

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Um *grafo localmente irregular* é um grafo no qual vértices adjacentes possuem graus distintos. Uma *k-aresta coloração localmente irregular*, ou *kLI-coloração* para simplificar, de um grafo  $G$  é uma coloração das arestas de  $G$  na qual cada classe de cor induz um subgrafo localmente irregular. Baudon, Bensmail, Przybyło, e Woźniak (2015) conjecturaram que se um grafo  $G$  admite uma *kLI-coloração*, então  $G$  admite uma *3LI-coloração*. Nesta dissertação, verificamos essa conjectura para grafos potência de ciclo, para uma família de grafos cúbicos, e para algumas famílias de Snarks: Snark-Flor, Snark de Goldberg, Snark de Loupekine e Snark de Blanusa 1 e 2. Além disso, apresentamos uma condição para grafos não admitirem uma *2LI-coloração*.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## GRAPH DECOMPOSITION INTO LOCALLY IRREGULAR SUBGRAPHS

Wanderson Douglas Lomenha Pereira

April/2021

Advisor: Fábio Happ Botler

Department: Systems Engineering and Computer Science

A *locally irregular graph* is a graph in which adjacent vertices have distinct degrees. A *locally irregular  $k$ -edge coloring*, or  *$kLI$ -coloring* for short, of a graph  $G$  is a coloring of the edges of  $G$  in which each color class induces a locally irregular subgraph. Baudon, Bensmail, Przybyło, e Woźniak (2015) conjectured that if a graph  $G$  admits a  $kLI$ -coloring, then  $G$  admits a  $3LI$ -coloring. In this dissertation, we verify this conjecture for power of cycle graphs, for a family of cubic graphs, and for some families of Snarks: Flower Snark, Goldberg Snark, Loupekine Snark and Blanusa Snark 1 and 2. Furthermore, we present a condition for graphs not to accept a  $2LI$ -coloring.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Definições gerais . . . . .	1
1.2 Coloração de arestas localmente irregular e Conjectura 1-2-3 . . . . .	4
<b>2 Coloração localmente irregular</b>	<b>10</b>
2.1 Grafos completos . . . . .	10
2.2 Grafos potência de Ciclo . . . . .	12
2.3 Grafos bipartidos e grafos split . . . . .	15
2.4 Árvores e Florestas . . . . .	17
2.5 Grafos degenerados . . . . .	21
<b>3 Coloração localmente irregular de grafos cúbicos</b>	<b>23</b>
<b>4 Coloração localmente irregular de Snarks</b>	<b>29</b>
4.1 Grafo de Petersen, Celmins-Swart 1 e 2, Estrela Dupla, Szekeres, Watkins . . . . .	29
4.2 Famílias Snark-Flor, Goldberg, Loupekine e Blanusa 1 e 2 . . . . .	33
<b>5 Testes computacionais</b>	<b>43</b>
5.1 Programação linear e programação linear inteira . . . . .	43
5.2 Resultados experimentais . . . . .	45
<b>6 Conclusão e trabalhos futuros</b>	<b>47</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>48</b>



# Lista de Figuras

1.1	(a) $\{b, c, f\}$ é um conjunto independente. (b) $\{a, d, e, f\}$ é uma clique.	2
1.2	Grafos não isomorfos com o mesmo número de vértices e arestas, e mesma sequência de graus. . . . .	3
1.3	Decomposição do $K_9$ em quatro cópias de $C_9$ . . . . .	4
1.4	Grafo em que $\chi'(G) = 4$ ; os rótulos das arestas indicam uma coloração de arestas de $G$ . . . . .	5
1.5	$2LI$ -coloração do grafo de Petersen . . . . .	5
1.6	Membro da família $\mathcal{T}$ . . . . .	6
1.7	$3$ -NSD do grafo $C_5$ . . . . .	8
2.1	$3LI$ -coloração do grafo completo $K_4$ . . . . .	11
2.2	$2LI$ -coloração do grafo $K_4 - \{e\}$ e dos grafos $K_4 - \{e, e'\}$ . . . . .	12
2.3	$(3, 4)$ -pseudo potência de caminho . . . . .	13
2.4	$(3, 3)$ -pseudo potência de caminho . . . . .	13
2.5	$3LI$ -coloração dos grafos potência de ciclo $C_{15}^2, C_{11}^3$ e $C_{12}^4$ de acordo com o Teorema 2.3. As cores 1,2 e 3 estão representadas respectivamente por azul, vermelho e verde. . . . .	14
2.6	$2LI$ -coloração dos grafos potência de ciclo $C_{15}^2, C_{11}^3$ e $C_{12}^4$ . . . . .	15
2.7	Uma árvore $T$ e uma árvore $T$ enraizada . . . . .	17
2.8	Exemplos de árvores enraizadas, arbustos, $2LI$ -coloração e $2QLI$ -coloração. Arestas em azul (vermelho) representam $a$ -coloração ( $b$ -coloração). . . . .	18
2.9	Árvore em que o processo de inversão falha . . . . .	20
3.1	$\mathcal{P}$ -orientação dos caminhos $P \in \mathcal{P}$ . . . . .	24
3.2	Os valores 1,2 e 3 representam o $\mathcal{P}$ de cada vértice. . . . .	25
3.3	Grafo $G[E_3^{\mathcal{P}}]$ e Grafo $G - \{V_3\}$ . . . . .	26
3.4	. . . . .	26
3.5	. . . . .	27
3.6	Grafo faixa . . . . .	27
3.7	$2LI$ -coloração de uma meia faixa . . . . .	28

4.1	$2LI$ -coloração grafo de Petersen . . . . .	30
4.2	$2LI$ -coloração do grafo Celmins-Swart 1 . . . . .	30
4.3	$2LI$ -coloração do grafo Celmins-Swart 2 . . . . .	30
4.4	$2LI$ -coloração do grafo de Zamfirescu com 36 vértices . . . . .	31
4.5	$2LI$ -coloração do grafo Estrela Dupla . . . . .	31
4.6	$2LI$ -coloração do grafo Szekeres . . . . .	32
4.7	$2LI$ -coloração do grafo Watkins . . . . .	32
4.8	$2LI$ -coloração do grafo de Descartes . . . . .	33
4.9	Bloco $B_i$ e conexão entre os blocos . . . . .	33
4.10	$2LI$ -coloração dos snarks $F_3$ , $F_5$ e $F_7$ . . . . .	34
4.11	Bloco $B_i$ e conexão entre os blocos . . . . .	35
4.12	$2LI$ -coloração dos Snarks $G_3$ e $G_5$ . . . . .	36
4.13	Grafo de Petersen e Bloco $B_i$ respectivamente . . . . .	36
4.14	Conexão entre os blocos . . . . .	37
4.15	Snark de Loupekine $LO_3$ . . . . .	37
4.16	$2LI$ -coloração do Snark $LO_5$ . . . . .	38
4.17	Bloco de Petersen . . . . .	38
4.18	Snark $BF_0$ . . . . .	39
4.19	$2LI$ -coloração dos Snarks $BF_0$ e $BF_1$ respectivamente. . . . .	40
4.20	Snark $BS_0$ . . . . .	41
4.21	$2LI$ -coloração dos Snarks $BS_0$ e $BS_1$ respectivamente. . . . .	42

# Capítulo 1

## Introdução

Neste capítulo apresentamos definições gerais de Teoria dos Grafos, decomposição de grafos e coloração localmente irregular e por fim a organização da dissertação.

### 1.1 Definições gerais

Um grafo é um par  $G = (V, E)$  no qual  $V$  é um conjunto e  $E$  é um conjunto de pares de elementos de  $V$ . A *ordem* de um grafo  $G$  é o número de elementos do conjunto  $V(G)$ . Neste trabalho nos restringimos a grafos nos quais o conjunto de vértices é finito e não vazio.

Dizemos que dois vértices  $u$  e  $v$  são *adjacentes* ou *vizinhos* se  $\{u, v\} \in E(G)$ . Diremos que a aresta  $e = uv$  *incide* em  $u$  e em  $v$  que, por sua vez, são os *extremos* de  $e$ ; e que duas arestas são *adjacentes* se elas possuem um extremo em comum. Para simplificar chamaremos uma aresta  $e = \{u, v\}$  de  $e = uv$ . A *vizinhança* de um vértice  $u$ , denotada por  $N(u)$ , é o conjunto de vértices que são adjacentes a  $u$ . O número de arestas incidentes a um dado vértice  $u$  é chamado de *grau* de  $u$  e é denotado por  $d_G(u)$  ou simplesmente por  $d(u)$ . Uma aresta com extremos iguais é chamada de *laço*. Um grafo pode ter *arestas paralelas*, que são duas ou mais arestas diferentes com o mesmo par de extremos. Um grafo com arestas paralelas ou laços é chamado de *multigrafo*, e um grafo sem este tipo de aresta é chamado de grafo *simples*.

Um grafo  $H$  é *subgrafo* de  $G$  se o conjunto de vértices de  $H$  está contido no conjunto de vértices de  $G$  e se o conjunto de arestas de  $H$  está contido no conjunto de arestas de  $G$ , ou seja, se:

$$V(H) \subseteq V(G) \text{ e } E(H) \subseteq E(G).$$

Para qualquer subconjunto  $S \subseteq V$ , o *subgrafo de  $G$  induzido por  $S$* , denotado por  $G[S]$ , é o grafo que contém todas as arestas de  $G$  que tem ambas as extremidades

em  $S$ .

Um grafo é chamado de *completo* quando  $uv \in E$  para todo  $u, v \in V$  com  $u \neq v$ , ou seja, quando todos os vértices são adjacentes entre si. O grafo completo com  $n$  vértices é denotado por  $K_n$ . Uma *clique* num grafo  $G$  é qualquer conjunto  $X$  de vértices dois a dois adjacentes. Portanto,  $X$  é uma clique se o grafo induzido  $G[X]$  é completo. O grafo vazio é o grafo cujo conjunto de arestas é vazio. Um *conjunto independente* de um grafo  $G$  é um conjunto  $S$  de vértices de  $G$  tal que não existem dois vértices adjacentes contidos em  $S$ . Em outras palavras, se  $u$  e  $v$  são vértices de um conjunto independente, não há arestas entre  $u$  e  $v$ . Na Figura 1.1 (a), o conjunto  $\{b, c, f\}$  é um conjunto independente e em (b), o conjunto  $\{a, d, e, f\}$  é uma clique.

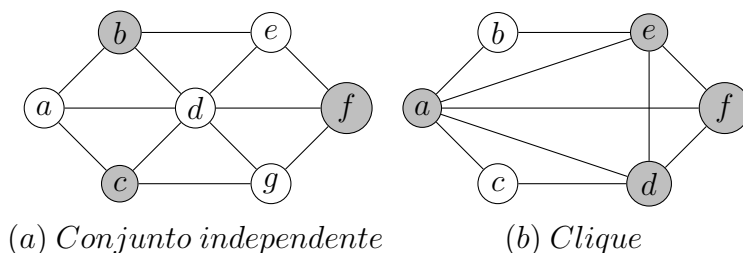


Figura 1.1: (a)  $\{b, c, f\}$  é um conjunto independente. (b)  $\{a, d, e, f\}$  é uma clique.

O grau máximo de  $G$  é denotado por  $\Delta = \Delta(G) = \max\{d(u) : u \in V(G)\}$  e o grau mínimo de  $G$  é denotado por  $\delta = \delta(G) = \min\{d(u) : u \in V(G)\}$ . Um vértice é *isolado* quando tem grau 0 (não possui vizinhos). Um vértice  $v$  é *universal* quando é adjacente a todos os demais vértices, isto é,  $N(v) = V(G) \setminus \{v\}$ . Se  $v$  é um vértice universal em um grafo simples, então  $d(v) = n - 1$ . Um grafo  $G$  é *k-regular* quando o grau de todos os vértices é igual a  $k$ . Em particular, o grafo completo  $K_n$  é  $(n - 1)$ -regular. O grafo 3-regular também é chamado de *cúbico*.

O *hipercubo*  $Q_n$  é grafo com conjunto de vértices  $Z_2^n$ , e no qual dois vértices  $(u_1, \dots, u_n)$  e  $(v_1, \dots, v_n)$  são adjacentes se  $u_i \neq v_i$  para exatamente um  $i$  em  $\{1, \dots, n\}$ .

Um *isomorfismo* de dois grafos  $G$  e  $G'$  é uma bijeção  $f$  de  $V(G)$  em  $V(G')$ ,  $f: V(G) \rightarrow V(G')$ , na qual dois vértices  $u$  e  $v$  são adjacentes em  $G$  se, e somente se,  $f(u)$  e  $f(v)$  são adjacentes em  $G'$ . Em particular, para que dois grafos sejam isomorfos, ambos devem possuir o mesmo número de vértices, de arestas e ter a mesma sequência de graus. Note que essas condições são necessárias mas não são suficientes para que sejam isomorfos. Por exemplo, os grafos da Figura 1.2 respeitam essas duas condições, mas não são isomorfos.

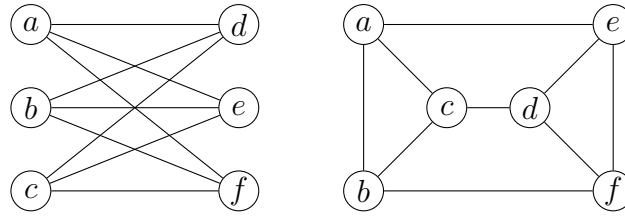


Figura 1.2: Grafos não isomorfos com o mesmo número de vértices e arestas, e mesma sequência de graus.

Um *passeio* é uma sequência de vértices  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  tal que  $v_i v_{i+1} \in E(G)$ , com  $1 \leq i \leq k$ . Um *caminho* é um passeio com vértices distintos e um *ciclo* é um passeio na qual  $v_1, \dots, v_{k-1}$  é um caminho e  $v_1 = v_k$ . O *comprimento* de um caminho ou ciclo é o seu número de arestas. A *cintura* de um grafo é o comprimento do menor ciclo contido no grafo.

Dizemos que um grafo  $G$  é *conexo* se para todo par de vértices distintos existe um caminho entre eles; caso contrário, dizemos que o grafo é *desconexo*. Uma *componente conexa* de  $G$  é um subgrafo maximal conexo de  $G$  (Lembre-se que um conjunto é maximal quando não está contido propriamente em outro). Denota-se o número de componentes conexas do grafo por  $\omega(G)$ . Um grafo *acíclico* é um grafo que não possui ciclos, também conhecido como *floresta*. Uma *árvore* é um grafo acíclico e conexo. Uma *folha* é um vértice de grau 1. Uma floresta também pode ser definida como uma união disjunta de árvores.

Um grafo é dito *bipartido* se os seus vértices podem ser particionados em dois conjuntos  $X$  e  $Y$  de tal forma que toda aresta possui um extremo em  $X$  e outro em  $Y$ . O par  $(X, Y)$  é chamado de *bipartição* do grafo e  $X$  e  $Y$  de *partes*. É possível provar que um grafo é bipartido se, e somente se, não possui ciclo de comprimento ímpar.

Uma *ponte* ou *aresta de corte* de um grafo  $G$  é uma aresta  $e$  tal que sua remoção aumenta o número de componentes conexas de  $G$ , ou seja,  $\omega(G - e) > \omega(G)$ . Em particular, se  $e$  é uma ponte  $\omega(G - e) = \omega(G) + 1$ .

Um *emparelhamento* em um grafo  $G$  é um conjunto de arestas duas a duas disjuntas. O tamanho do maior emparelhamento em  $G$  é denotado por  $\alpha'(G)$  e é limitado superiormente por  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Um emparelhamento é dito *perfeito* quando seu tamanho é  $\frac{n}{2}$ .

Uma *decomposição* de um grafo é um conjunto de subgrafos aresta-disjuntos  $\mathcal{D} = \{H_1, H_2, \dots, H_k\}$  de um grafo  $G$  tal que  $\bigcup_{i=1}^k E(H_i) = E(G)$ . Há diversos resultados em decomposição de grafos. Por exemplo, Lovász [1] provou que um grafo  $G$  com  $n$  vértices, não necessariamente conexo, pode ser decomposto em  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  caminhos e ciclos. Botler, Mota, Oshiro e Wakabayashi [2, 3] provaram que para todo inteiro positivo  $l$ , existe um inteiro positivo  $m_0$  tal que se  $G$  é um grafo  $2ml$ -

regular com  $m \geq m_0$ , então  $G$  admite uma  $P_l$ -decomposição. Além disso, provaram que dado  $l$  existe um inteiro positivo  $k_l$  tal que se  $G$  é um grafo  $k_l$ -aresta-conexo cujo número de arestas é divisível por  $l$ , então  $G$  admite uma  $P_l$ -decomposição. A Figura 1.3 exibe a decomposição do  $K_9$  em quatro cópias de  $C_9$ .

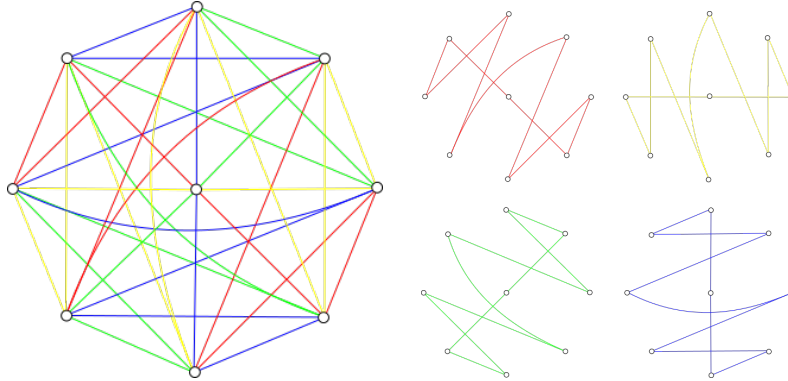


Figura 1.3: Decomposição do  $K_9$  em quatro cópias de  $C_9$

Para mais definições e conceitos em teoria dos grafos, nós recomendamos ao leitor [4, 5].

## 1.2 Coloração de arestas localmente irregular e Conjectura 1-2-3

O problema de coloração de grafos surgiu em 1852 quando o Frederick Guthrie relatou ao seu professor Augustus De Morgan um problema colocado pelo seu irmão. Francis Guthrie constatou ao pintar um mapa da Inglaterra que não era necessário mais do que quatro cores para colorir tal mapa de forma que regiões vizinhas não possuíssem a mesma cor. Assim, Francis Guthrie conjecturou que 4 cores seriam suficientes para colorir as regiões de um mapa de forma que regiões vizinhas fossem coloridas com cores diferentes. Diversos matemáticos, entre eles De Morgan, se interessaram pelo problema. Esse problema ficou conhecido como *Problema das quatro cores*. Alguns problemas clássicos, como o problema de *Coloração de vértices* e *Coloração de arestas*, foram motivados pelo problema das quatro cores. O principal foco deste trabalho é uma das variações do problema de coloração de arestas.

Uma  $k$ -coloração de arestas de um grafo  $G$  sem laços é uma atribuição de cores  $c: E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  das arestas de  $G$ . Dizemos que  $c$  é *própria* se  $c(e) \neq c(f)$  sempre que  $e$  e  $f$  tiverem um vértice em comum. Um grafo  $G$  possui uma  $k$ -coloração de arestas se existe uma coloração própria de  $G$  com no máximo  $k$  cores. Se  $k$  for o menor inteiro tal que  $G$  é  $k$ -arestas colorível, então o *índice cromático* de  $G$  é  $k$  e é denotado por  $\chi'(G)$ . Neste trabalho, quando conveniente, denotamos o grau do

vértice  $u$  na cor  $j$  por  $d_j(u)$ . A Figura 1.4 apresenta um grafo em que  $\chi'(G) = 4$ ; os rótulos das arestas indicam uma coloração de arestas de  $G$ .

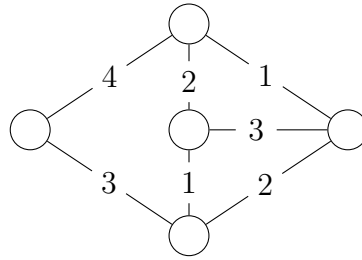


Figura 1.4: Grafo em que  $\chi'(G) = 4$ ; os rótulos das arestas indicam uma coloração de arestas de  $G$ .

Um grafo  $G$  é dito *localmente irregular* se não possuir dois vértices adjacentes com o mesmo grau. Dado um grafo  $G$ , uma *decomposição localmente irregular* de  $G$  é uma decomposição  $\mathcal{D}$  na qual todo elemento de  $\mathcal{D}$  é localmente irregular. Tal decomposição pode ser considerada uma coloração (imprópria) de arestas de  $G$ , na qual cada classe de cor induz um subgrafo localmente irregular. Tal coloração de arestas é dita *localmente irregular*. Uma  $k$ -aresta coloração localmente irregular de  $G$  é uma coloração localmente irregular de  $G$  usando  $k$  cores. Com o objetivo de facilitar a notação chamamos tal coloração por  $kLI$ -coloração. A Figura 1.5 exhibe a coloração localmente irregular do grafo de Petersen utilizando duas cores.

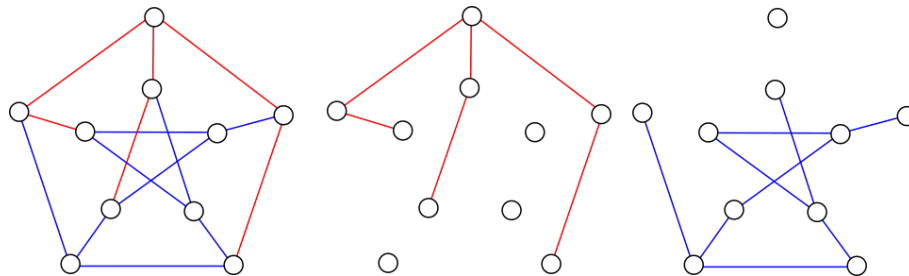


Figura 1.5:  $2LI$ -coloração do grafo de Petersen

Dizemos que  $G$  é *decomponível* se  $G$  admite uma coloração de arestas localmente irregular. Neste caso, o *índice cromático irregular* de  $G$ , denotado por  $\chi'_{irr}(G)$ , é o menor valor de  $k$  para o qual  $G$  admite uma  $kLI$ -coloração. Caso  $G$  não seja decomponível, então  $\chi'_{irr}(G)$  não é definido e dizemos que  $G$  é *excepcional*. Em particular, como o caminho de comprimento 2 é um grafo localmente irregular, todo grafo conexo com um número par de arestas é decomponível de acordo com o seguinte teorema.

**Teorema 1.1** (Jünger, Reinelt e Pulleyblank, 1985 [6]). *Se  $G$  é um grafo conexo com número par de arestas, então  $G$  admite uma decomposição em caminhos de comprimento 2.*

Um grafo  $G$  é *excepcional* nos seguintes casos. Se  $P_n$  é um caminho com  $n$  arestas, então existe uma  $2LI$ -coloração se  $n$  é par, mas não existe coloração localmente irregular de  $P_n$  caso contrário. Se  $C_n$  é um ciclo com  $n$  vértices, então existe uma  $2LI$ -coloração se  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , ou uma  $3LI$ -coloração se  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , mas não existe coloração localmente irregular de  $C_n$  caso contrário.

Uma caracterização completa de todos os demais grafos que são excepcionais foi apresentada por Baudon, Bensmail, Przybyło e Woźniak [7]. A família de grafos  $\mathcal{T}$  é definida de forma recursiva como segue.

- O triângulo  $K_3$  pertence a família  $\mathcal{T}$ .
- Todo grafo em  $\mathcal{T}$  pode ser obtido de um grafo  $G \in \mathcal{T}$  contendo um triângulo com pelo menos um vértice, digamos  $v$ , de grau 2 em  $G$ , e um grafo auxiliar  $F$ , que pode ser um caminho de comprimento ímpar ou um caminho de comprimento par com um triângulo em uma de suas extremidades e identificando  $v$  com um vértice de grau 1 em  $F$ .

Em outras palavras, os grafos da família  $\mathcal{T}$  consistem em triângulos disjuntos conectados como em uma estrutura de árvore, de modo que, ao contrair os triângulos, dois vértices do triângulo são unidos por um caminho de comprimento ímpar, enquanto um vértice que originalmente era um triângulo e um vértice de grau 1 original são unidos por um caminho de comprimento par. A Figura 1.6 exibe um membro da família  $\mathcal{T}$ .

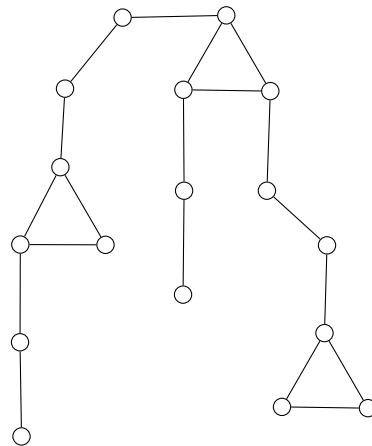


Figura 1.6: Membro da família  $\mathcal{T}$

O problema de coloração de arestas localmente irregular foi introduzido por Baudon, Bensmail, Przybyło e Woźniak [7], motivados pelo problema de coloração neighbour-sum-distinguishing, que por sua vez, foi introduzida por Karoński, Łuczak e Thomason [8]. A seguinte conjectura é similar a conjectura 1-2-3 (Conjectura 1.3),



foi introduzida por Baudon, Bensmail, Przybyło e Woźniak [7] e é o problema central desse trabalho.

**Conjectura 1.2** (Baudon-Bensmail-Przybyło-Woźniak, 2015, [7]). *Para todo grafo decomponível  $G$ , temos  $\chi'_{irr}(G) \leq 3$ .*

Em 2015, Baudon, Bensmail, Przybyło e Woźniak [7] provaram que se  $G$  é um grafo  $r$ -regular com  $r$  suficientemente grande, então existe uma  $3LI$ -coloração de  $G$ . Além disso, Baudon, Bensmail, Przybyło e Woźniak [7] provaram que todo hipercubo  $Q_n$  com  $n \geq 2$  admite uma  $2LI$ -coloração.

Seja  $G = (V, E)$  um grafo e  $c: E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  uma coloração das arestas de  $G$ . Para cada vértice  $v \in V(G)$  seja  $S_c(v) = \sum_{u \in N(v)} c(uv)$  a soma de todas as cores incidentes a  $v$ . Se para todo par de vértices adjacentes  $u, v$  de  $G$  temos  $S_c(v) \neq S_c(u)$ , então  $c$  é dita *neighbour sum distinguishing*. Para facilitar a notação, dizemos que  $c$  é uma  $kNSD$ -coloração.

A seguinte conjectura, conhecida como Conjectura 1-2-3, foi proposta por Karoński, Łuczak e Thomason [8].

**Conjectura 1.3** (Karoński, Łuczak e Thomason, 2004 [8]). *Todo grafo sem componente isomorfa a  $K_2$  admite uma coloração de arestas neighbour sum distinguishing com as cores  $\{1, 2, 3\}$ .*

O resultado a seguir mostra a relação entre 2-NSD e 2-LI colorações em grafos regulares.

**Proposição 1.1** (Baudon, Bensmail, Przybyło e Woźniak, 2015 [7]). *Seja  $G$  um grafo regular e seja  $c: E(G) \rightarrow \{1, 2\}$  uma coloração das arestas de  $G$ . Então  $c$  é uma 2NSD-coloração se e somente se  $c$  é uma 2LI-coloração.*

*Demonstração.* Primeiramente, suponha que  $c$  é uma 2NSD-coloração de  $G$ . Vamos mostrar que para toda aresta  $xy$  temos  $d_i(x) \neq d_i(y)$ , onde  $i = c(xy)$ . De fato, seja  $xy \in E(G)$  e seja  $i = c(xy)$ . Suponha, por contradição, que  $d_i(x) = d_i(y)$ . Como  $G$  é regular, digamos  $r$ -regular, então  $d_i(x) + d_{3-i}(x) = r = d_i(y) + d_{3-i}(y)$ . Como  $d_i(x) = d_i(y)$ , temos  $d_{3-i}(x) = d_{3-i}(y)$ . Logo  $S_c(x) = d_1(x) + 2d_2(x) = d_1(y) + 2d_2(y) = S_c(y)$ , uma contradição com a definição de 2NSD-coloração. Logo, temos que  $d_i(x) \neq d_i(y)$ . Como isso vale para todas as arestas de  $G$ , temos que  $c$  é uma 2LI-coloração.

Agora suponha que  $c$  é uma 2-LIC de  $G$ . Vamos mostrar que para toda aresta  $xy$ , temos  $S_c(x) \neq S_c(y)$ . Seja  $xy \in E(G)$ . Como  $c$  é uma 2LI-coloração, temos  $d_i(x) \neq d_i(y)$ . Assim, como  $G$  é regular, temos  $d_{3-i}(u) = r - d_i(u)$ , para  $u \in \{x, y\}$ . Logo,  $S_c(u) = d_i(u) + 2d_i(u) = d_i(u) + 2(r - d_i(u)) = 2r - d_i(u)$  para  $u \in \{x, y\}$ . Note que se  $S_c(x) = S_c(y)$ , então  $2r - d_i(x) = 2r - d_i(y)$  e, portanto,  $d_i(x) = d_i(y)$ , uma contradição.  $\square$

Note que a equivalência apresentada pela Proposição 1.1 não vale para  $k$ -aresta coloração se  $k \geq 3$ . Em particular o grafo  $C_5$  admite uma 3-NSD coloração, mas é um grafo excepcional. A Figura 1.7 exhibe uma 3-NSD do grafo  $C_5$ . Podemos introduzir uma outra variação para este problema, na qual em vez de considerarmos os pesos, consideraremos o multiconjuntos. Nesse caso, dizemos que uma coloração  $c$  é *neighbour multiset distinguishing* se para todo par de vértices adjacentes  $u, v$  em  $G$ , os multiconjuntos de cores incidentes a  $u$  e a  $v$  forem distintos. A seguinte conjectura foi proposta por Karoński, Łuczak e Thomason em 2004 [8]. Addario-Berry, Aldred, Dalal e Reed [9] provaram os seguintes resultados para neighbour multiset distinguishing. Para facilitar a notação, dizemos que tal coloração é uma  $k$ NMD-coloração.

**Conjectura 1.4** (Karoński, Łuczak e Thomason, 2004 [8]). *Todo grafo sem componente isomorfa a  $K_2$  admite uma coloração de arestas neighbour multiset distinguishing com as cores  $\{1, 2, 3\}$ .*

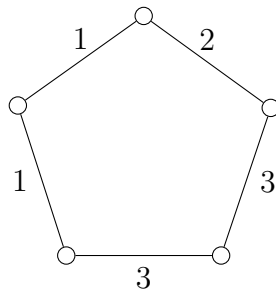


Figura 1.7: 3-NSD do grafo  $C_5$

**Teorema 1.5** (Addario-Berry, Aldred, Dalal e Reed, 2005 [9]). *Seja  $G$  um grafo que não possui componente isomorfa a  $K_2$ , então vale o seguinte.*

- $G$  admite uma 4-NMD-coloração;
- se  $\delta(G) \geq 1000$ , então  $G$  admite uma 3-NMD-coloração.

Além disso, podemos observar que toda  $k$ LI-coloração é também uma neighbour multiset distinguishing  $k$ -aresta coloração. Porém o contrário não é válido, exceto no caso de 2-aresta coloração de grafos regulares.

**Proposição 1.2** (Baudon, Bensmail, Przybyło e Woźniak, 2015 [7]). *Se  $G$  admite uma  $k$ LI-coloração então  $G$  também admite uma  $k$ NMD-coloração.*

*Demonstração.* Seja  $u, v$  um par de vértices adjacentes, e suponha que  $uv$  seja colorida com a cor  $i$ . Então o número de arestas da cor  $i$  incidentes a  $u$  e  $v$  são diferentes, e logo o multiconjunto de cores incidentes a  $u$  e  $v$  são distintos.  $\square$

A recíproca, entretanto, não é verdadeira. De fato, se  $G = K_3$  e  $c$  é uma coloração tal que cada aresta de  $G$  é colorida com uma cor diferente, então  $c$  é uma 3-NMD-coloração, mas não é uma 3LI-coloração.

Para problemas relacionados, sugerimos ao leitor [10]. E para alguns resultados em NSD e NMD sugerimos [11–13]

Diante do exposto, o presente trabalho pretende investigar a validade da Conjectura 1.2 para grafos 3-regulares, em particular para Snarks. Em particular, as principais contribuições deste trabalho são (i) a verificação da Conjectura 1.2 para uma família de grafos cúbicos; e (ii) a determinação do índice cromático irregular para algumas famílias de Snarks.

O trabalho encontra-se organizado da seguinte forma. O Capítulo 2 apresenta o estado da arte do tema estudado, no qual exibimos os resultados de coloração localmente irregular para grafos gerais, grafos completos,  $r$ -regulares com  $r$  suficientemente alto, grafos bipartidos, grafos split, árvores, grafos subcúbicos, hipercubo, e grafos degenerados e verificamos a Conjectura 1.2 para grafos potência de ciclo. No Capítulo 3 realizamos a coloração localmente irregular de alguns grafos cúbicos. Além disso, mostramos uma condição que limita inferiormente o índice cromático irregular de alguns grafos cúbicos. No Capítulo 4, apresentamos os Snarks. Além disso, realizamos a coloração localmente irregular dos Snarks de Petersen, Celmins-Swart 1 e 2, Estrela Dupla, Szekeres, Watkins, Descartes e das famílias de Snark, Snark-Flor, Snark de Goldberg, Snark de Loupekine e Snark de Blanusa 1 e 2. No Capítulo 5 apresentamos um modelo de programação linear inteira para computar o índice cromático irregular de grafos. Finalmente, no Capítulo 6 abordamos as questões que gostaríamos de responder como trabalho futuro.

# Capítulo 2

## Coloração localmente irregular

Este Capítulo apresenta os principais resultados encontrados na literatura que compõem o estado da arte do problema de coloração localmente irregular. Na Seção 2.1 são abordados resultados que estabelecem o índice cromático irregular para o grafo completo  $K_n$ , o grafo  $K_n - \{e\}$  e o grafo  $K_n - \{e, e'\}$ . Na Seção 2.2 verificamos a conjectura 1.2 para os grafos potência de ciclo. Na Seção 2.3 apresentamos resultados que estabelecem limitantes para a coloração localmente irregular de grafos bipartidos. Ainda nessa seção, abordamos resultados que estabelecem o índice cromático irregular de grafos split. Na Seção 2.4 apresentamos um algoritmo proposto por Baudon, Bensmail e Sopena que determinam o índice cromático irregular de árvores. Além disso, apresentamos resultados que estabelecem o índice cromático irregular de florestas balanceadas. Na Seção 2.5 apresentamos resultados que estabelecem um limitante superior no índice cromático irregular de grafos degenerados.

Em 2017, Bensmail, Merker e Thomassen [14] provaram que se  $G$  é um grafo decomponível, então  $\chi'_{irr}(G) \leq 328$ . Um ano mais tarde, este resultado foi melhorado por Lužar, Przybyło e Soták [15], que provaram que  $\chi'_{irr}(G) \leq 220$ . Além disso, Przybyło [16] demonstrou o seguinte resultado.

**Teorema 2.1** (Przybyło, 2015 [16]). *Se  $G$  é tal que  $\delta(G) \geq 10^{10}$ , então  $\chi'_{irr}(G) \leq 3$ .*

### 2.1 Grafos completos

Para provar que todo grafo completo  $K_n$  admite uma 3LI-coloração Baudon, Bensmail, Przybyło e Woźniak [7] provaram o Lema 2.1. Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices. Dado  $k$  e  $i$  tal que  $1 \leq i \leq k$ , dizemos que uma  $kLI$ -coloração de  $G$  é  $i$ -boa se nenhum vértice possui  $n - 1$  arestas na cor  $i$ .

**Lema 2.1.** *Seja  $G$  um grafo que admite uma  $kLI$ -coloração  $c$  que é  $i$ -boa então o grafo  $G'$  obtido de  $G$  pela adição de um vértice universal monocromático na cor  $i$ , admite uma  $kLI$ -coloração  $j$ -boa para  $j \neq i$ .*

*Demonstração.* Seja  $G$  e  $c$  como no enunciado do Lema 2.1 e considere o grafo  $G'$  obtido de  $G$  pela adição de um novo vértice  $u$  ligado a todos os vértices de  $G$ . Dê a cor  $i$  para todas as arestas incidentes a  $u$  e note que o número de arestas da cor  $i$  incidente a cada vértice de  $G$  aumenta em 1. Como todo vértice de  $G$  tem no máximo  $n - 2$  arestas da cor  $i$ , a coloração obtida é localmente irregular. Além disso, seja  $j$  uma cor diferente de  $i$ . Como todo vértice de  $G$  possui uma aresta da cor  $i$ , nenhum vértice de  $G$  possui  $n$  arestas da cor  $j$ .  $\square$

Utilizando o Lema 2.1, os autores provaram o seguinte resultado.

**Teorema 2.2** (Baudon, Bensmail, Przybyło e Woźniak, 2015 [7]). *Todo grafo completo  $K_n$  de ordem  $n \geq 4$  admite uma 3LI-coloração  $i$ -boa para algum  $i$ .*

*Demonstração.* A prova segue por indução em  $G$ . Suponha que  $n = 4$  e tome  $D = \{\{21, 14\}, \{13, 34\}, \{32, 24\}\}$ . Note que nenhum vértice possui três arestas da mesma cor. Logo,  $G$  possui uma 3LI-coloração  $i$ -boa para todo  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

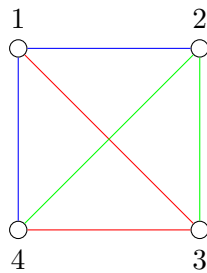


Figura 2.1: 3LI-coloração do grafo completo  $K_4$

Assim podemos supor que  $n > 4$ , e que o enunciado vale para  $n - 1$ , i.e., há 3LI-coloração  $i$ -boa do grafo completo com  $n - 1$  vértices para algum  $i$ . Seja  $G'$  o grafo obtido de  $G$  pela remoção de um vértice. Pela hipótese de indução, há uma coloração de  $G'$  na qual para um das cores, digamos  $i$ , todos os vértices de  $G'$  são incidentes a no máximo  $n - 3$  arestas da cor  $i$ . Pelo Lema 2.1  $G$  admite uma coloração como desejada.  $\square$

Esta mesma estratégia prova que  $K_n - e$  e  $K_n - \{e, e'\}$  admitem uma 2LI-coloração, basta notar que o grafos  $K_4 - e$  e  $K_4 - \{e, e'\}$  admitem 2LI-coloração na qual há uma cor  $i$ , para a qual nenhum vértice recebe  $n - 1$  arestas na cor  $i$ , (veja Figura 2.2).

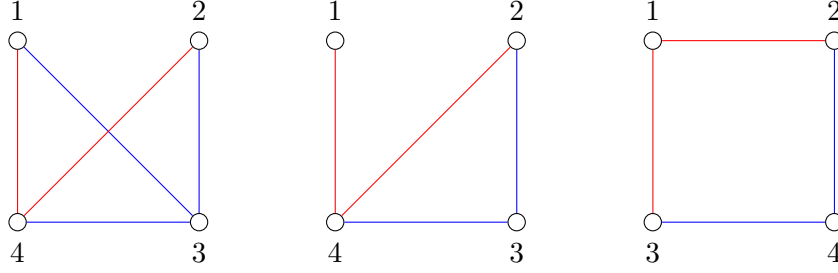


Figura 2.2: 2LI-coloração do grafo  $K_4 - \{e\}$  e dos grafos  $K_4 - \{e, e'\}$

Como vimos, esta estratégia nos dá uma 3LI-coloração para todo grafo completo  $K_n$  de ordem  $n \geq 4$ , entretanto podemos nos questionar se para todo grafo completo  $K_n$  com  $n \geq 4$  não seria possível colorir com apenas duas cores. Podemos provar que o índice cromático irregular de  $K_n$  não pode ser 2.

**Proposição 2.1.** *Todo grafo completo  $K_n$  não admite uma 2LI-coloração.*

*Demonstração.* Suponha por contradição que  $K_n$  possa ser colorido com 2 cores, seja  $c$  uma 2LI-coloração de  $K_n$ , e seja  $H_i$  o subgrafo induzido pelas arestas de cor  $i$ . Como todo grafo tem dois vértices com o mesmo grau, então  $H_i$  tem dois vértices com o mesmo grau, digamos  $u$  e  $v$ . Como  $c$  é uma coloração localmente irregular, então  $uv$  não está em  $H_1$ . Logo,  $uv$  está em  $H_2$ . Mas  $d_{H_2}(u) = n - 1 - d_{H_1}(u) = n - 1 - d_{H_1}(v) = d_{H_2}(v)$ , uma contradição.  $\square$

## 2.2 Grafos potência de Ciclo

Dado um inteiro  $k$ , a  $k$ -potência de grafo  $G$  denotada por  $G^k$ , é o grafo  $(V', E')$  com  $V' = V(G)$  e  $E' = \{uv : dist(u, v) \leq k\}$ . Os grafos *potência de ciclo*  $C_n^k$  são os grafos com  $V(C_n^k) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$  e  $E(C_n^k) = E^1 \cup \dots \cup E^k$ , em que  $E^i = \{v_j v_{(j+i) \pmod n} : 0 \leq j \leq n-1\}$ . Note que se  $k = 1$ , o grafo  $C_n^k$  é isomorfo ao  $C_n$ , cujo índice cromático irregular já é conhecido, (se  $n$  é ímpar, então  $C_n$  é excepcional; se  $n \equiv 0 \pmod 4$ , então  $\chi'_{irr}(C_n) = 2$ ; e  $\chi'_{irr}(C_n) = 3$  caso contrário). Além disso, se  $n \leq 2k + 1$ , então  $C_n^k$  é isomorfo ao  $K_n$ , cujo índice cromático irregular é 3. Seja  $G$  um grafo potência de ciclo. Dado  $k$  e  $r$  com  $r \neq k$ , uma  $(k, r)$ -pseudo potência de caminho  $P_r^{(k)}$  é o grafo com  $k + r$  vértices e  $E(P_r^{(k)}) = \{x_i x_j : i \leq j - 1 \leq k\}$ . A Figura 2.3 exibe uma pseudo potência de caminho  $P_4^3$ .

Uma  $(k, r)$ -pseudo potência de caminho é o grafo obtido do grafo  $P_{2k+1}^{(k)}$  pela remoção das arestas de uma cópia de  $P_{2k-r}^{(k)}$  nos vértices  $x_{r+1}, \dots, x_{2k+1}$ . Note que no grafo  $(k, k)$ -pseudo potência de caminho há dois vértices com grau  $k$  adjacentes. A Figura 2.4 exibe uma  $(3, 3)$ -pseudo potência de caminho.

**Lema 2.2.** *Dados  $k$  e  $r$  com  $r \neq k$  e  $r \leq k + 1$ ,  $P_r^{(k)}$  é localmente irregular.*

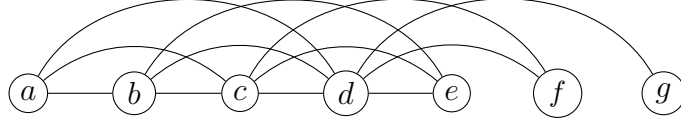


Figura 2.3: (3,4)-pseudo potência de caminho

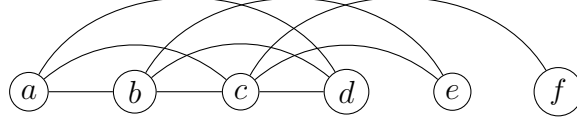


Figura 2.4: (3,3)-pseudo potência de caminho

*Demonstração.* Seja  $(x_1, \dots, x_{2k+1})$  uma sequência de  $P_r^{(k)}$ , a sequência de graus  $(d(x_0), d(x_1), \dots, d(x_{2k+1}))$  é  $(k, k+1, \dots, 2k, k, k-1, \dots, 1)$ , e como cada vértice é vizinho dos próximos  $k$  vértices, temos que o grafo  $(k, r)$ -pseudo potência de caminho é localmente irregular.  $\square$

Em [32] os autores provaram a Conjectura 1.4 para todo grafo potência de ciclo  $C_n^k$  com  $k \leq 6$  e assintoticamente para todo  $k \geq 7$  utilizando duas cores. Como a recíproca da Proposição 1.2 é verdadeira quando limitamos a uma  $2NMD$ -coloração de grafos regulares, isso implica que também temos uma  $2LI$ -coloração para tais grafos. A seguir nós apresentamos uma demonstração para grafos potência de ciclo  $C_n^k$  onde  $n > 2k+1$ , pois caso contrário vimos que  $C_n^k$  é isomorfo a  $K_n$  cujo índice cromático irregular é 3.

**Teorema 2.3.** *Se  $G$  é o grafo potência de ciclo  $C_n^k$ , então  $\chi'_{irr}(G) \leq 3$ .*

*Demonstração.* A prova está dividida em dois casos, dependendo se  $n \not\equiv k \pmod{k+1}$ .

**Caso 1:** Se  $n \not\equiv k \pmod{k+1}$  então a divisão de  $n$  por  $k+1$  deixa resto  $r$ , com  $0 \leq r \leq k-1$  e  $r \in \mathbb{Z}^+$ . Dessa forma, o grafo potência de ciclo  $C_n^k$  pode ser decomposto em uma cópia de  $P_r^{(k)}$ , digamos  $P_0$ , e  $\frac{n-r}{k+1}$  cópias de  $P_{k+1}^{(k)}$ , digamos  $P_1, P_2, \dots, P_{\frac{n-r}{k+1}}$ . Assim, colorimos as arestas de  $P_0$  com a cor 1 e alternadamente colorimos as arestas de  $P_1, \dots, P_{\frac{n-r}{k+1}-1}$  com as cores 2 e 1. Por fim, colorimos as arestas de  $P_{\frac{n-r}{k+1}}$  com a cor 3.

**Caso 2:** Se  $n \equiv k \pmod{k+1}$  então a divisão de  $n$  por  $k+1$  deixa resto  $r = k$ . Dessa forma, o grafo potência de ciclo  $C_n^k$  pode ser decomposto em uma cópia de  $P_{k-1}^{(k)}$ , digamos  $P_0$ , uma cópia de  $P_1^{(k)}$ , digamos  $P_1$  e  $\frac{n-k}{k+1}$  cópias de  $P_{k+1}^{(k)}$ , digamos  $P_2, P_3, \dots, P_{\frac{n-k}{k+1}+1}$ . Assim, colorimos as arestas de  $P_0$  com a cor 3 e as arestas de  $P_1$  com a cor 1. Por fim, colorimos alternadamente as arestas de  $P_2, P_3, \dots, P_{\frac{n-k}{k+1}+1}$

com as cores 2 e 1. Logo, obtemos uma  $3LI$ -coloração para todo grafo potência de ciclo  $C_n^k$ .  $\square$

A Figura 2.5 exhibe a coloração localmente irregular dos grafos potência de ciclo  $C_{15}^2$ ,  $C_{11}^3$  e  $C_{12}^4$ .

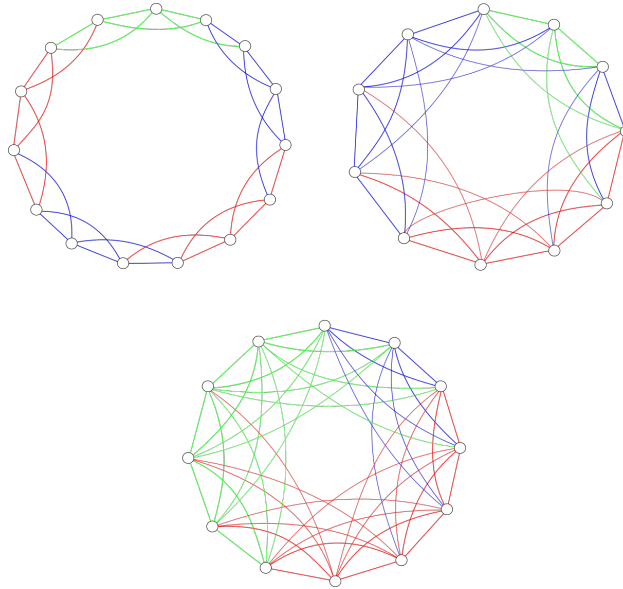


Figura 2.5:  $3LI$ -coloração dos grafos potência de ciclo  $C_{15}^2$ ,  $C_{11}^3$  e  $C_{12}^4$  de acordo com o Teorema 2.3. As cores 1, 2 e 3 estão representadas respectivamente por azul, vermelho e verde.

Provamos a Conjectura 1.2 para grafos potência de ciclo  $C_n^k$  utilizando 3 cores. Entretanto, verificamos nos testes computacionais que duas cores são suficiente para colorir de forma localmente irregular os grafos potência de ciclo  $C_n^k$ . A Figura 2.6 exhibe uma coloração localmente irregular dos grafos potência de ciclo  $C_{15}^2$ ,  $C_{11}^3$  e  $C_{12}^4$  utilizando duas cores.



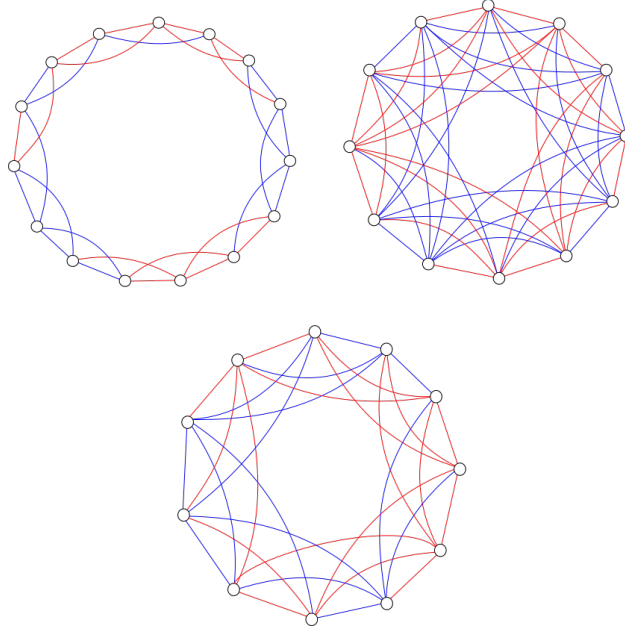


Figura 2.6:  $2LI$ -coloração dos grafos potência de ciclo  $C_{15}^2$ ,  $C_{11}^3$  e  $C_{12}^4$

## 2.3 Grafos bipartidos e grafos split

Um grafo  $G$  é dito balanceado, se todo ciclo induzido possuir comprimento  $0 \pmod{4}$ . Um grafo bipartido é dito *balanceado* se todos os vértices em uma das classes de bipartição possuir grau par.

Para grafos bipartidos alguns limitantes superiores foram estabelecidos por Bensmail, Merker e Thomassen [14]. Dizemos que um grafo  $G$  tem tamanho par se  $m$  é par e dizemos que um grafo  $G$  tem tamanho ímpar se  $|E(G)|$  é ímpar.

**Teorema 2.4** (Bensmail, Merker e Thomassen, 2017 [14]). *Se  $G$  é um grafo conexo bipartido de tamanho par, então  $\chi'_{irr}(G) \leq 9$ .*

Seja  $G$  um grafo conexo de tamanho ímpar. Em [14] foi provado que se  $G$  é decomponível, então  $G$  contém um subgrafo localmente irregular  $H$  no qual toda componente  $G - E(H)$  possui tamanho par. Combinando esse resultado com o Teorema 2.4 obtemos o seguinte resultado.

**Corolário 2.1** (Bensmail, Merker e Thomassen, 2017 [14]). *Se  $G$  é um grafo bipartido conexo que não é um caminho de comprimento ímpar, então  $\chi'_{irr}(G) \leq 10$ .*

Chamamos de *aresta conexidade* de um grafo  $G$  o menor número de arestas  $G$  cuja remoção resulta em um grafo desconexo.

**Teorema 2.5** (Bensmail, Merker e Thomassen, 2017 [14]). *Para todo grafo bipartido 16-aresta conexo  $G$ , temos  $\chi'_{irr}(G) \leq 2$ .*

Lužar, Przybyło e Soták [15] em 2018 mostraram que se  $G$  é um grafo balanceado então  $\chi'_{irr}(G) \leq 4$ . Utilizando este limitante os autores foram capazes de melhorar o limitante superior para grafos bipartidos apenas seguindo os passos da demonstração do Teorema 2.4 e do Corolário 2.1 de [14].

**Teorema 2.6** (Lužar, Przybyło e Soták, 2018 [15]). *Seja  $G$  um grafo bipartido decomponível, então  $\chi'_{irr}(G) \leq 7$ . Em particular, se  $G$  é um grafo bipartido decomponível de tamanho par, então  $\chi'_{irr}(G) \leq 6$ .*

Ainda em 2015 Baudon, Bensmail, Przybyło e Woźniak [7] provaram que todo grafo bipartido completo com  $q \geq 2$  (ou  $p \geq 2$ ) admite uma  $2LI$ -coloração. De fato, suponha que  $G$  é um grafo bipartido completo com partes de tamanhos  $p, q \geq 2$ . Se  $p \neq q$ , então  $G$  é localmente irregular, logo  $\chi'_{irr}(G) = 1$ . Por outro lado, se  $p = q$ , podemos escolher arbitrariamente um vértice e colorir todas suas arestas com a cor 2, e então  $\chi'_{irr}(G) = 2$ .

Em [17] foi provado que existe uma neighbour multiset distinguishing 2-aresta coloração para todo grafo bipartido com grau mínimo pelo menos três, a partir desse resultado, Baudon, Bensmail, Przybyło e Woźniak [7] apresentaram o seguinte resultado para grafos bipartidos regulares.

**Corolário 2.2** (Baudon, Bensmail, Przybyło e Woźniak, 2015 [7]). *Se  $G$  é um grafo bipartido regular com grau mínimo  $\delta \geq 3$ , então  $G$  admite uma  $2LI$ -coloração.*

Um grafo é *split* se existe uma partição  $\{X, Y\}$  de  $V(G)$  tal que  $G[X]$  é um grafo completo e  $Y = V(G) \setminus X$  é um conjunto independente. Um grafo split também pode ser interpretado como  $G(X, Y)$  para também definir uma partição  $\{X, Y\}$  de  $V(G)$ , no qual  $X$  é um clique máximo e  $Y = V(G) \setminus X$  um conjunto independente. Neste caso, para cada  $v_i \in X$ , denotamos por  $d_G(v_i, Y)$  o número de vizinhos de  $v_i$  em  $Y$ . Para simplificar escreveremos  $d_i$  para  $d_G(v_i, Y)$ .

Em 2021, Lintzmayer, Mota, e Sambinelli [18] caracterizam a classe de grafos split de acordo com o índice cromático irregular.

**Fato 2.1.** *Seja  $G(X, Y)$  um grafo split com  $X = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , no qual  $d_1 \geq \dots \geq d_n$  e  $n \geq 2$ . Então  $\chi'_{irr}(G) = 1$  se e somente se  $d_1 > \dots > d_n$ .*

**Teorema 2.7.** *Seja  $G(X, Y)$  um grafo split com  $X = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  no qual  $d_1 \geq \dots \geq d_n$ . Se  $n \geq 10$ , então o seguinte vale.*

(i)  $\chi'_{irr}(G) \leq 2$  se e somente se  $d_1 \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  ou  $d_2 \geq 1$ ;

(ii)  $\chi'_{irr}(G) = 3$  se e somente se  $d_1 < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  e  $d_2 = 0$

## 2.4 Árvores e Florestas

Nesta seção apresentamos dois algoritmos propostos por Baudon, Bensmail, e Sopena [19], o primeiro algoritmo é utilizado para colorir arbustos enquanto o segundo determina o índice cromático irregular de uma árvore  $T$ . Além disso, apresentamos resultados que estabelecem o índice cromático irregular de uma floresta balanceada.

Antes de enunciarmos os resultados, veremos algumas definições importantes. Dada uma árvore  $T$  e um vértice  $r \in V(T)$ , dizemos que  $T$  é *enraizada* em  $r$  se algum vértice  $r \in V(T)$  é escolhido como especial. Chamamos esse vértice de *raiz da árvore*. A árvore da Figura 2.7 torna-se enraizada escolhendo o vértice  $e$  como raiz.

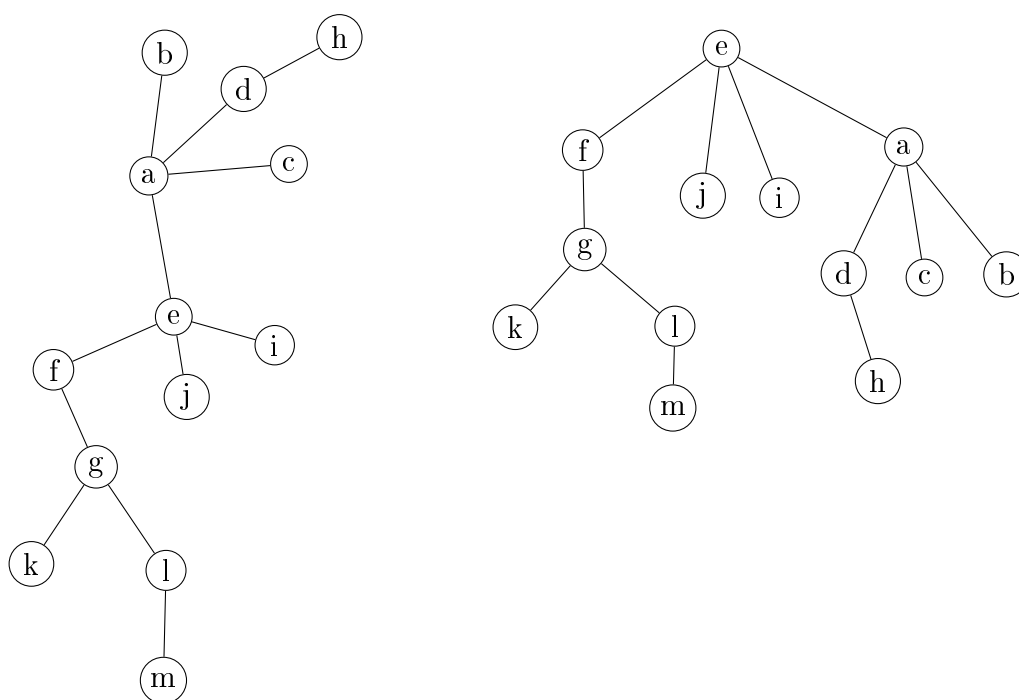


Figura 2.7: Uma árvore  $T$  e uma árvore  $T$  enraizada

Em 2015 Baudon, Bensmail, Przybyło e Woźniak [7] provaram que se  $T$  é uma árvore que não é um caminho de comprimento ímpar, então  $T$  admite uma  $3LI$ -coloração. Em [19] é apresentado um algoritmo que determina o índice cromático de uma árvore  $T$ .

Os seguintes conceitos são apresentados em [19]. Denotaremos uma árvore enraizada por  $T_r$ , no qual  $r$  é a raiz da árvore. Se o vértice  $u$  em  $T_r$  possuir no máximo um vizinho, denotado por  $u^-$  e este vértice estiver mais próximo de  $r$  do que o vértice  $u$ , então ele é dito *pai* de  $u$  em  $T_r$ . Os outros vizinhos de  $u$  são chamados de *filhos* de  $u$  em  $T_r$ . Em uma árvore enraizada  $T_r$ , a raiz  $r$  não possui pai e as folhas de  $T_r$  não possuem filhos. Considere o caso no qual  $u$  possui apenas um filho em  $T_r$ .

Denotaremos este vértice por  $u^+$ . Dizemos que  $T_r$  é um *arbusto* se  $r^+$  é definido, ou seja, se  $r$  possuir apenas um filho.

Se assumirmos que  $u$  possui  $p \geq 1$  filhos  $v_1, v_2, \dots, v_p$  em  $T_r$  para todo  $i \in \{1, \dots, p\}$  denotamos por  $T_r[u, i]$  a subárvore de  $T_r$  induzida por  $u$  e os vértices na subárvore de  $T_r$  enraizada em  $v_i$ . Toda  $T_r[u, i]$  é um arbusto, com  $v_i = u^+$  e  $u = v_i^-$ . Claramente,  $T_r$  é isomorfa à árvore obtida identificando as raízes dos arbustos  $T_r[r, 1], \dots, T_r[r, d(r)]$ .

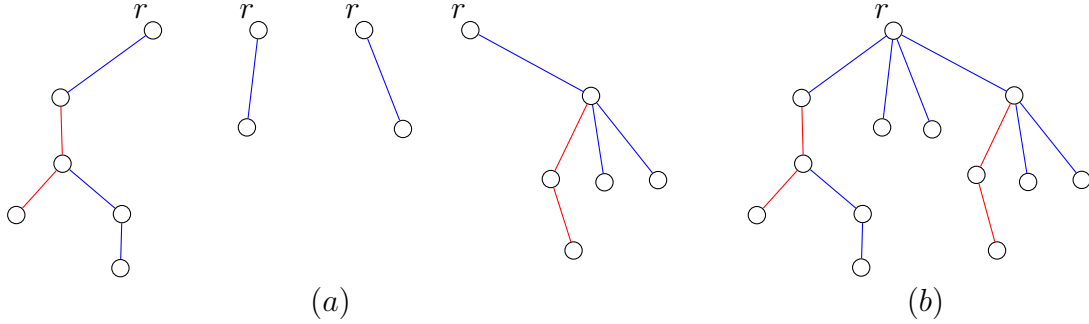


Figura 2.8: Exemplos de árvores enraizadas, arbustos,  $2LI$ -coloração e  $2QLI$ -coloração. Arestas em azul (vermelho) representam  $a$ -coloração ( $b$ -coloração).

Suponha que  $T_r$  seja um arbusto e  $\phi: E(T_r) \rightarrow \{a, b\}$  uma  $2LI$ -coloração de  $T_r$  ou uma quase  $2LI$ -coloração de  $T_r$  ( $2QLI$ -coloração para simplificar) se  $rr^+$  é isolada no subgrafo induzido pela cor  $a$  e  $\phi_{a,b}$  é uma  $2LI$ -coloração de  $T_r[r, 1]$ . Escrevemos  $\phi_{a,b}$  quando a aresta  $\phi(rr^+) = a$ , ou  $\phi_{b,a}$  quando  $\phi(rr^+) = b$ . Seja  $\phi_{a,b}$  uma  $2LI$ -coloração de  $T_r$  com as cores  $a$  e  $b$ . Se  $c$  e  $d$  é um par de cores distintas, podemos obter uma  $2LI$ -coloração  $\phi_{c,d}$  de  $T_r$  com as cores  $c$  e  $d$  realizando o *swap* que consiste em realizar as trocas,  $\phi_{c,d}(uv) = c$  se  $\phi_{a,b} = a$  ou  $\phi_{c,d} = d$  caso contrário. Fixadas cores  $a$  e  $b$ , o swap  $I$ , tal que  $I(\phi_{a,b}) = \phi_{b,a}$  é chamado de *inversão*. Se uma coloração localmente irregular  $\phi$  de  $T_r$  usa a cor  $a$ , chamamos de  $a$ -subgrafo de  $T_r$  o subgrafo de  $T_r$  induzido pelas arestas coloridas com a cor  $a$ . O  $a$ -grau de um vértice  $u \in T_r$  é o grau de  $u$  no  $a$ -subgrafo de  $T_r$ . Considere uma árvore  $T$  na qual o conjunto de arestas  $E(T)$  pode ser particionado em  $p$  partes  $E_1, \dots, E_p$  e seja  $\phi_{a,b}^1, \dots, \phi_{a,b}^p$  uma  $2LI$ -coloração de  $E_1, \dots, E_p$  respectivamente. A *união*  $\phi_{a,b} = \phi_{a,b}^1 + \dots + \phi_{a,b}^p$  é definida por  $\phi_{a,b}(uv) = \phi_{a,b}^i(uv)$  se  $uv \in E_i$ . A Figura 2.8 (a) ilustra uma  $2QLI$ -coloração  $\phi_{a,b}^1, \phi_{a,b}^2, \phi_{a,b}^3$  e  $\phi_{a,b}^4$  de  $T_r[r, 1], T_r[r, 2], T_r[r, 3]$  e  $T_r[r, 4]$  respectivamente e a Figura 2.8 (b) ilustra uma  $2LI$ -coloração  $\phi_{a,b}$  de  $T_r$  obtida pela união  $\phi_{a,b}^1 + \phi_{a,b}^2 + \phi_{a,b}^3 + \phi_{a,b}^4$ .

Em [19] os autores criaram um algoritmo que constrói uma  $2QLI$ -coloração  $\phi_{a,b}$  de qualquer arbusto  $T_r$ .

Neste algoritmo,  $p \geq 0$  denota o número de filhos de  $r^+$ . O Algoritmo 1 primeiro constrói indutivamente  $2QLI$ -colorações  $\phi_{a,b}^1, \dots, \phi_{a,b}^p$  de  $T_r[r^+, 1], \dots, T_r[r^+, p]$

<p><b>Algoritmo 1:</b> Algoritmo para construir <math>2QLI</math>-coloração <math>\phi_{a,b}</math> de um arbusto <math>T_r</math></p> <pre> 1 <b>if</b> <math>p \geq 0</math> <b>then</b> 2   <math>\lfloor \phi_{a,b}(rr^+) = a</math> 3 <b>else</b> 4   <b>foreach</b> <math>i \in \{1, \dots, p\}</math> <b>do</b> 5     <math>\lfloor</math> Compute uma <math>2QLI</math>-coloração <math>\phi_{a,b}^i</math> de <math>T_r[r^+, i]</math> indutivamente 6     <math>\phi_{a,b}^0[rr^+] = a</math> 7     Escolha <math>\phi_{c_i, c'_i}^i = \phi_{a,b}^i</math> ou <math>\phi_{b,a}^i</math> para todo <math>i \in \{1, \dots, p\}</math> de modo que        <math>\phi_{a,b} = \phi_{a,b}^0 + \phi_{c_1, c'_1}^1 + \phi_{c_2, c'_2}^2 + \dots + \phi_{c_p, c'_p}^p</math> seja uma <math>2QLI</math>-coloração de <math>T_r</math> </pre>
---

respectivamente. Em seguida ele inverte algumas das  $\phi_{a,b}^i$ 's de modo que a união é uma  $2QLI$ -coloração de  $T_r$ , quando  $rr^+$  é colorido com a cor  $a$ . Baudon, Bensmail, e Sopena [19] provaram que a linha 7 sempre pode ser feita, isso implica no seguinte teorema.

**Teorema 2.8** (Baudon, Bensmail, e Sopena, 2015 [19]). *Todo arbusto admite uma  $2QLI$ -coloração.*

Não temos garantias que os procedimentos da coloração sempre vá funcionar, pois invertendo alguns dos  $\phi_{a,b}^i$ 's pode não levar a uma  $2LI$ -coloração de  $T_r$ . Claramente, quanto mais filhos  $r$  possui, maior é a quantidade de inversões que podemos realizar, pois o número de inversões cresce exponencialmente na ordem de  $d(r)$ . Uma vez que cada arbusto tem duas opções de coloração ( $\phi_{a,b}^i$  ou  $\phi_{b,a}^i$ ), há  $2^{r-1}$  opções. Consequentemente os autores provaram que esta estratégia funciona sempre que  $d(r) \geq 5$ , chegando ao seguinte teorema.

**Teorema 2.9** (Baudon, Bensmail, e Sopena, 2015 [19]). *Se  $\Delta(T) \geq 5$ , então  $\chi'_{irr}(T) \leq 2$ .*

Seja  $D_i$  o conjunto de todos os possíveis  $a$ -graus de  $v_i$  em  $T_r[r^+, i]$  para todas as possíveis  $2QLI$ -coloração de  $T_r[r^+, 1]$ . Os  $D_i$ 's representam uma *assinatura* de  $T_r$ . Denotaremos o conjunto de todos os possíveis  $a$  graus de  $r^+$  em todas as  $2QLI$ -coloração de  $T_r$  por  $D_0$ . Dizemos que  $T_r$  é um arbusto  $k$ -ruim se  $D_0 = \{k\}$ , isto é,  $D_0$  é um singleton.

Focaremos nossa atenção agora em árvores com grau máximo 4. Como visto anteriormente, nem sempre o Algoritmo 1 consegue determinar uma  $2LI$ -coloração de uma árvore  $T_r$ . De fato, isso se dá quando o processo de inversão falha, ou seja, quando todas as possíveis inversões falham. Logo,  $\phi_{a,b}^i$  não é uma  $2LI$ -coloração. Os autores mostraram que o processo de inversão falha, se e somente se, a sequência de  $a$ -graus dos  $v_i$ 's em  $T_r[r, i]$ 's pela  $\phi_{a,b}^i$  é  $(1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(3, 2, 2)$  ou  $(4, 3, 3, 2)$  quando

$p = d(r)$  é 1, 2, 3 ou 4, respectivamente. Neste caso, dizemos que a sequência dos  $a$ -graus é ruim. A Figura 2.9 exibe uma árvore cujo processo de inversão falha. Note que a sequência de  $a$ -graus é (3, 2, 2). Dizemos que um vértice  $r$  é ruim se falhar os procedimentos da coloração, ou seja, se nenhuma inversão dos  $\phi_{a,b}$  levar a uma 2LI-coloração. Baudon, Bensmail, e Sopena [19] provaram o seguinte resultado.

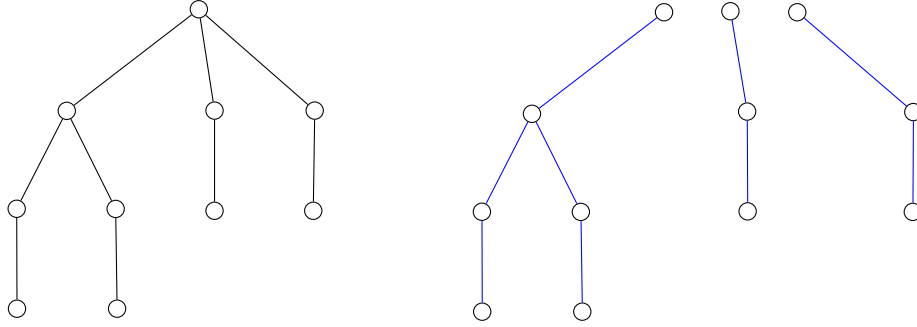


Figura 2.9: Árvore em que o processo de inversão falha

**Teorema 2.10** (Baudon, Bensmail, e Sopena, 2015 [19]). *Se  $r$  é um vértice ruim de  $T$ , então todos vértices de  $T$  também são.*

**Corolário 2.3** (Baudon, Bensmail, e Sopena, 2015 [19]).  $\chi'_{irr}(T) = 3$  se e somente se qualquer vértice de  $T$  é ruim

Por fim, os autores criaram o seguinte algoritmo para determinar o índice cromático irregular de uma árvore. Lembrando que as sequências de grau  $a$  ruim são (1), (2, 1), (3, 2, 2) e (4, 3, 3, 2). O Algoritmo 2 possui complexidade  $O(n)$ , no qual  $n$  é a ordem de  $T$ .

Uma floresta é dita *balanceada* se existir uma bipartição  $(A, B)$  de seus vértices tal que todos os vértices em  $B$  possuem grau par. Dada uma coloração de arestas de  $G$ , dizemos que  $v \in V(G)$  é *monocromático* se todas as arestas incidentes a  $v$  tiverem a mesma cor. O lema a seguir foi provado por Bensmail, Merker e Thomassen [14].

**Lema 2.3** (Bensmail, Merker e Thomassen, 2017 [14]). *Se  $G$  é uma floresta balanceada, então  $\chi'_{irr}(G) \leq 2$ . Em particular, há uma 2LI-coloração de  $G$  tal que todo vértice na classe de partição sem vértice de grau ímpar é monocromático.*

*Demonstração.* A prova segue por indução no número de arestas de  $G$ . Se  $|E(G)| = 2$ , então  $G$  é um caminho de comprimento 2 e, portanto, admite uma 1LI-coloração. Assim, podemos supor que  $|E(G)| > 2$ , e que o enunciado vale para toda floresta balanceada com no máximo  $|E(G)| - 1$  arestas. Se  $G$  é desconexo, então podemos aplicar a hipótese de indução em cada componente, e obtemos uma coloração como

**Algoritmo 2:** Algoritmo para determinar o índice cromático irregular de uma árvore  $T$

```

1 if  $T$  é um caminho de comprimento ímpar then
2    $\chi'_{irr}(T)$  não é definido;
3 else if  $T$  é localmente irregular then
4    $\chi'_{irr}(T) = 1$ ;
5 else if  $\Delta(T) \leq 2$  ou  $\Delta(T) \geq 5$  then
6    $\chi'_{irr}(T) = 2$ 
7 else
8   Escolha um vértice arbitrário  $r$  de  $T$  com grau  $p \geq 1$ ;
9   foreach  $i \in \{1, \dots, p\}$  do
10    Seja  $D_i$  o conjunto  $D_0$  de  $T_r[r, i]$  computado indutivamente;
11    if  $D_i$  não é um singleton then
12       $\chi'_{irr}(T) = 2$ ;
13      exit algoritmo;
14    Seja  $D_i = \{d_i\}$  para todo  $i \in \{1, \dots, p\}$ ;
15    if  $(d_1, \dots, d_p)$  não é uma sequência de grau a ruim then
16       $\chi'_{irr}(T) = 2$ ;
17    else
18       $\chi'_{irr}(T) = 3$ ;

```

a desejada. Então, podemos supor que  $G$  é conexo. Seja  $A$  e  $B$  as classes de partição de  $G$ , no qual todos os vértices em  $B$  possuem grau par. Podemos assumir que algum vértice em  $A$  possui grau par, pois caso contrário  $G$  é localmente irregular. Seja  $u$  um vértice em  $A$  com grau par. Substituímos  $u$  por  $d(u)$  novos vértices  $u_1, u_2, \dots, u_{d(u)}$ , cada um incidente a um dos vizinhos de  $u$ . Em outras palavras, particionamos  $G$  em  $d(u)$  novas árvores  $T_1, T_2, \dots, T_{d(u)}$  tal que  $\bigcup E(T_i) = E(G)$ . Cada uma das árvores  $T_1, T_2, \dots, T_{d(u)}$  é balanceada e tem, portanto, uma coloração de arestas, digamos nas cores azul e vermelha, na qual todo vértice em  $B$  é monocromático. Isso também nos dá uma coloração das arestas de  $G$ . Invertendo a coloração de  $T_i$  para qualquer  $i$ , se necessário, podemos garantir que o grau de  $v$  na cor vermelha seja 1. Assim a decomposição obtida é como desejada.  $\square$

## 2.5 Grafos degenerados

Um grafo  $G$  é  $d$ -degenerado se cada subgrafo  $H$  de  $G$  tem um vértice de grau no máximo  $d$ . Em particular, um grafo  $G$  é 1-degenerado, se e somente se,  $G$  é uma floresta. Em 2017, Bensmail, Merker e Thomassen [14] estabeleceram um limitante superior para coloração localmente irregular de grafos conexos  $d$ -degenerados com um número de aresta par. Esse corolário resulta do Teorema 2.4 e de [14], que

nos diz que, se  $d \geq 1$  e um número natural, e  $G$  é um grafo  $d$ -degenerado no qual cada componente tem um número de arestas par, então  $G$  pode ser decomposto em  $\lceil \log_2(d+1) \rceil + 1$  grafos bipartidos no qual cada componente tem um número de arestas par.

**Corolário 2.4** (Bensmail, Merker e Thomassen, 2017 [14]). *Se  $G$  é um grafo conexo  $d$ -degenerado com um número de arestas par, então  $\chi'_{irr} \leq 9(\lceil \log_2(d+1) \rceil + 1)$*



# Capítulo 3

## Coloração localmente irregular de grafos cúbicos

Como vimos anteriormente, Baudon, Bensmail, Przybyło e Woźniak verificaram a Conjectura 1.2 para grafos  $r$ -regulares quando  $r \geq 10^7$ . Assim, queremos investigar a Conjectura 1.2 para valores de  $r$  pequenos. Em particular quando  $r = 3$ , ou seja, os grafos cúbicos. Um grafo *subcúbico* é um grafo no qual todo vértice possui grau no máximo 3. Em 2018 Lužar, Przybyło e Soták [15] apresentaram o seguinte resultado para grafos subcúbicos.

**Teorema 3.1** (Lužar, Przybyło e Soták, 2018 [15]). *Seja  $G$  um grafo subcúbico decomponível, então  $\chi'_{irr}(G) \leq 4$ .*

Nesta capítulo melhoramos o limitante do Teorema 3.1 para uma família de grafos cúbicos. Para isso, apresentamos alguns resultados auxiliares.

**Lema 3.1.** *Se  $G$  é um grafo  $k$ -regular, então  $|E(G)| = \frac{kn}{2}$*

*Demonstração.* Como  $G$  é  $k$ -regular e a soma dos graus de um grafo é exatamente  $2|E(G)|$ , logo:

$$2|E(G)| = kn \Leftrightarrow |E(G)| = \frac{kn}{2}$$

□

Uma  $P_2$ -decomposição de um grafo  $G$  é uma decomposição de  $G$  em caminhos de comprimento 2. Seja  $G$  um grafo cúbico, e seja  $\mathcal{P}$  uma  $P_2$ -decomposição de  $G$ . Dado um vértice  $v \in V(G)$ , denotamos  $\mathcal{P}(v)$  o número de caminhos  $P \in \mathcal{P}$  nos quais  $d_P(v) = 1$ . Dado  $i \in \{1, 3\}$ , seja  $V_i^{\mathcal{P}}$  o conjunto de vértices de  $G$  no qual  $\mathcal{P}(v) = i$  e  $E_i^{\mathcal{P}}$  o conjunto de arestas incidentes aos vértices de  $V_i^{\mathcal{P}}$ . A Figura 3.2 exibe uma  $P_2$ -decomposição de um grafo 3-regular  $G$  no qual cada cor representa um caminho de  $\mathcal{P}$ .

Podemos ver uma  $P_2$ -decomposição  $\mathcal{P}$  em um grafo cúbico de outra forma. Seja  $G$  um grafo cúbico, e seja  $\mathcal{P}$  uma  $P_2$ -decomposição de  $G$ . Uma  $\mathcal{P}$ -orientação de  $G$  é uma orientação das arestas de  $G$  na qual cada caminho  $P \in \mathcal{P}$  é orientado do vértice interno para as folhas. A Figura 3.1 ilustra uma orientação de um caminho  $P \in \mathcal{P}$  no qual  $b$  é um vértice interno.

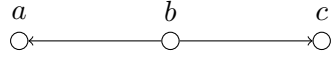


Figura 3.1:  $\mathcal{P}$ -orientação dos caminhos  $P \in \mathcal{P}$

Pela definição de  $\mathcal{P}$ -orientação, não podemos ter um vértice com grau de saída 1, pois se houver uma aresta saindo dele, esse vértice será um vértice interno e, portanto, deverá ter uma outra aresta saindo dele. De maneira análoga, observamos que não podemos ter um vértice com grau de saída 3. Dessa observação obtemos o seguinte lema.

**Lema 3.2.** *Seja  $\mathcal{P}$  uma  $P_2$ -decomposição de um grafo cúbico  $G$ . Então todo vértice possui grau de saída par na  $\mathcal{P}$ -orientação de  $G$ .*

Chamamos os vértices com grau de saída 0 na  $\mathcal{P}$ -orientação de uma  $P_2$ -decomposição de *sumidouros*. O Lema a seguir determina uma relação entre o número de vértices de um grafo cúbico  $G$  e a quantidade de sumidouros em uma  $\mathcal{P}$ -orientação de  $G$ .

**Lema 3.3.** *Seja  $G$  um grafo cúbico que admite uma  $P_2$ -decomposição  $\mathcal{P}$ , então o número de sumidouros é na  $\mathcal{P}$ -orientação de  $G$  é  $\frac{n}{4}$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema 3.1 temos que  $|E(G)| = \frac{3n}{2}$ . Temos que o número de vértices internos em  $\mathcal{P}$  é metade do número de arestas, pois cada caminho em  $\mathcal{P}$  possui duas arestas e um vértice interno. O número total de vértices internos (grau de saída 2) é  $\frac{3n}{4}$ . Pelo Lema 3.2, os vértices de  $G$  possuem grau de saída 0 ou 2. Assim, a quantidade de sumidouros é.

$$n - \frac{3n}{4} = \frac{n}{4}$$

□

**Proposição 3.1.** *Se  $G$  é um grafo cúbico, então  $|E(G)|$  é par se  $n \equiv 0 \pmod{4}$  e ímpar caso contrário.*

*Demonstração.* Como  $G$  é cúbico, pelo Lema 3.1, sabemos que o número de arestas é  $\frac{3n}{2}$ . Assim,  $|E(G)|$  é par se  $\frac{3n}{2}$  é par. Para que isso ocorra  $n$  deve ser múltiplo de

4. Caso  $n$  seja múltiplo de 2 e não seja múltiplo de 4, temos que  $\frac{n}{2}$  é ímpar. Logo, a expressão  $\frac{3n}{2}$  resultará em um número ímpar.  $\square$

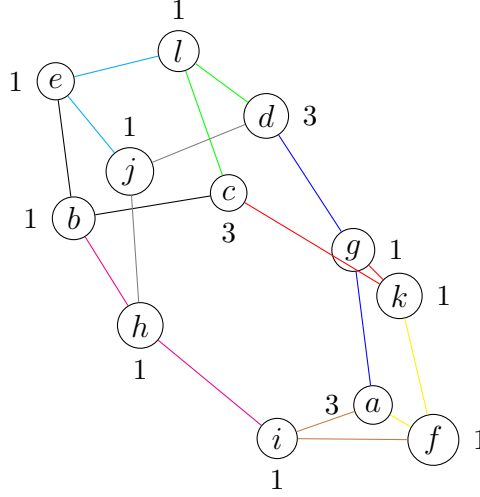


Figura 3.2: Os valores 1,2 e 3 representam o  $\mathcal{P}$  de cada vértice.

Observe que alguns grafos cúbicos não admitem uma  $P_2$ -decomposição, pois possuem um número ímpar de arestas. Na Figura 3.2 temos  $V_1^{\mathcal{P}} = \{b, e, f, g, h, i, j, k, l\}$  e  $V_3^{\mathcal{P}} = \{a, c, d\}$ . Note que  $\mathcal{P}(v) \in \{1, 3\}$  para todo  $v \in V(G)$ . Em particular todo vértice de  $V_1^{\mathcal{P}}$  é um vértice interno de precisamente um caminho de  $\mathcal{P}$ . A Figura 3.3 exibe o grafo  $G[E_3^{\mathcal{P}}]$  e o grafo  $G - \{V_3^{\mathcal{P}}\}$ .

**Proposição 3.2.** *Seja  $G$  um grafo cúbico e dado uma  $\mathcal{P}$  decomposição de  $G$ , então o subgrafo  $G[E_3^{\mathcal{P}}]$  é localmente irregular.*

*Demonstração.* Como o número de caminhos de  $\mathcal{P}$  que terminam nos vértices de  $V_3^{\mathcal{P}}$  é 3. Então, todo vértice  $v \in V_3^{\mathcal{P}}$  possui grau 3 em  $G[E_3^{\mathcal{P}}]$ , e como todo vértice adjacente aos vértices de  $V_3^{\mathcal{P}}$  em  $G[E_3^{\mathcal{P}}]$  são vértices internos de um caminho na  $P_2$ -decomposição, então todo vértice  $v \in V(G[E_3^{\mathcal{P}}] \setminus V_3^{\mathcal{P}})$  possuem grau 2 se forem adjacentes a dois vértices de  $V_3^{\mathcal{P}}$  e grau 1 caso contrário. Portanto, o subgrafo  $G[E_3^{\mathcal{P}}]$  é localmente irregular.  $\square$

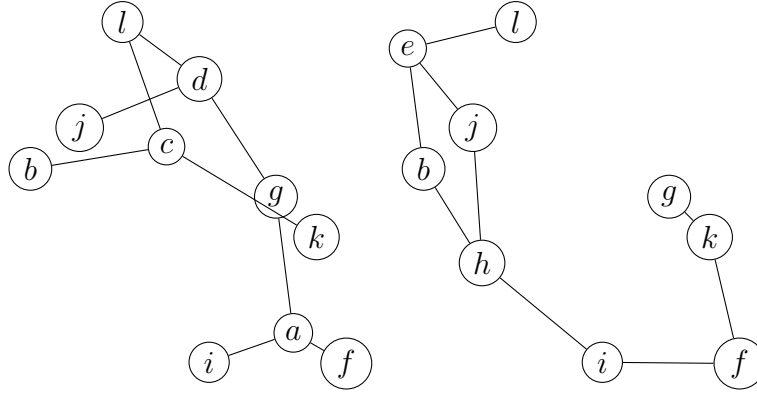


Figura 3.3: Grafo  $G[E_3^{\mathcal{P}}]$  e Grafo  $G - \{V_3\}$

Como o grafo  $G[E_3^{\mathcal{P}}]$  forma um grafo localmente irregular, podemos atribuir a todas as arestas  $E(G[V_3])$  a mesma cor. Isso implica no seguinte resultado:

**Teorema 3.2.** *Se  $G$  é um grafo cúbico que admite uma  $P_2$ -decomposição  $\mathcal{P}$  no qual  $G[V_1^{\mathcal{P}}]$  é um conjunto de ciclos vértices-disjuntos, então  $\chi'_{irr}(G) \leq 3$ .*

*Demonstração.* Como  $G[V_1^{\mathcal{P}}]$  é um conjunto de ciclos vértices-disjuntos, então todo vértice em  $V_1^{\mathcal{P}}$  é adjacente a precisamente um vértice de  $V_3^{\mathcal{P}}$ , pois são os vértices que não estão contidos no ciclo e dois vértices de  $V_1^{\mathcal{P}}$ . Dado um ciclo  $C \in G[V_1^{\mathcal{P}}]$ , nós particionamos o conjunto de vértices  $C$  em pares e no máximo uma tripla de vértices consecutivos quando o ciclo possuir tamanho ímpar.

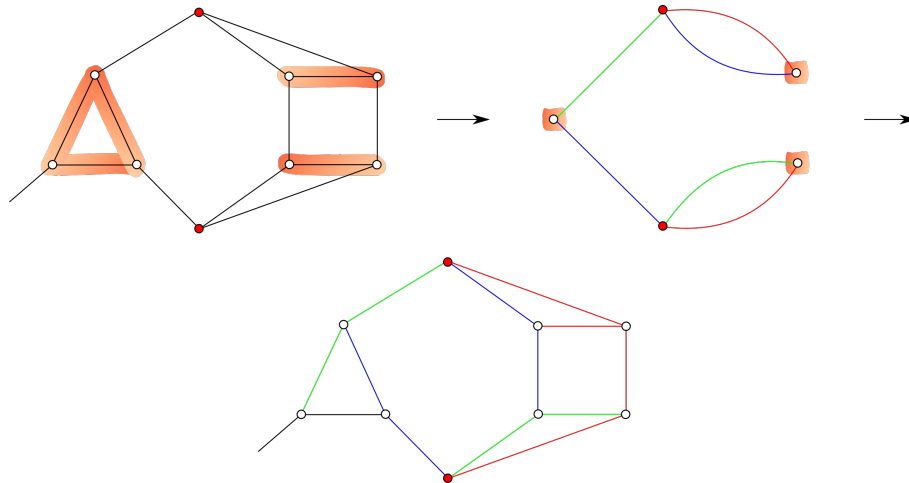


Figura 3.4

Seja  $H$  o grafo obtido de  $G \setminus E(G[V_1^{\mathcal{P}}])$  identificando os vértices no mesmo par ou tripla, e mantendo arestas paralelas. Note que todo caminho de  $\mathcal{P}$  possuem exatamente uma aresta em  $H$ . O grafo  $H$  é um grafo bipartido com grau máximo

exatamente 3. Não é difícil provar que  $G$  admite uma coloração própria de aresta com três cores.

Agora, usamos a coloração própria de arestas acima, para obter uma coloração localmente irregular de  $E(G)$ . Por construção todo caminho em  $\mathcal{P}$  possui precisamente uma aresta já colorida em  $H$ , e colorimos as arestas restantes (que estão no ciclo de  $G[V_1^{\mathcal{P}}]$ ) com a mesma cor. Como cada aresta de  $G[V_1^{\mathcal{P}}]$  está no mesmo par ou tripla de pelo menos um de seus vizinhos em  $G[V_1^{\mathcal{P}}]$ , cada caminho de  $\mathcal{P}$  é colorido com a mesma cor de no máximo um caminho com o qual compartilha um vértice. Portanto, cada cor consiste de caminhos vértice-disjuntos de comprimento 2 e árvores com quatro arestas e um vértice de grau 3, e conseqüentemente, é um grafo localmente irregular.  $\square$

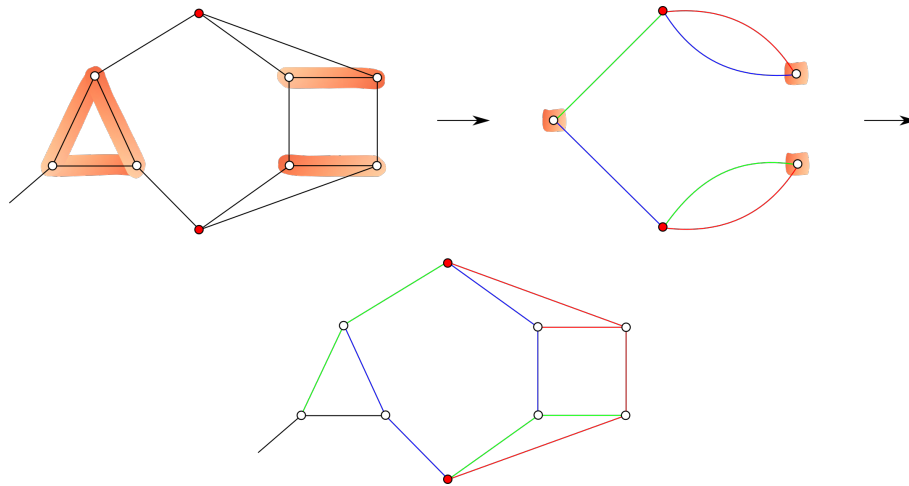


Figura 3.5

A Figura 3.5 exibe a técnica utilizada para demonstrar o Teorema 3.2. A fim de provar que alguns grafos cúbicos possuem índice cromático pelo menos 3, nós apresentamos um gadget, que nós chamamos de *faixa*.

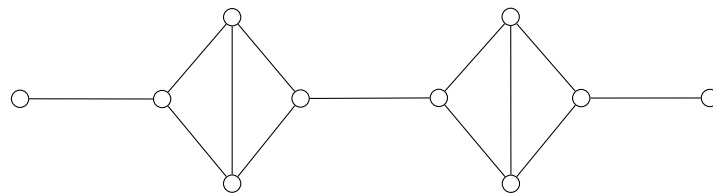


Figura 3.6: Grafo faixa

**Teorema 3.3.** *Se  $G$  possui uma faixa  $S$  cujos vértices de grau 3 não são adjacentes em  $V(G) \setminus S$ , então  $\chi'_{irr}(G) > 2$ .*

*Demonstração.* A prova segue do fato que qualquer  $2LI$ -coloração de uma “meia faixa” deve ser como a da figura abaixo, e então as duas “meia faixas” da mesma faixa não podem ser coloridas de maneira compatível, pois haveria uma aresta  $e = uv$  cujos extremos  $u$  e  $v$  possuem grau 2 na cor azul. Portanto, não iria satisfazer a condição de irregularidade local.  $\square$

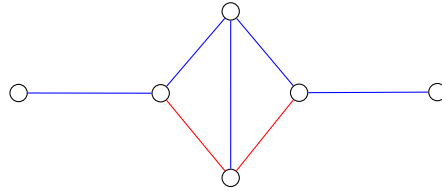


Figura 3.7:  $2LI$ -coloração de uma meia faixa

Note que a faixa é planar e todo vértice com exceção dos vértices extremos possuem grau 3. Assim, substituindo uma aresta por uma faixa, provamos que existem infinitos grafos que não admitem uma  $2LI$ -coloração. Em particular, há um número infinito de grafos cúbicos com índice cromático 4 e grafos planares que não admitem uma  $2LI$ -coloração, e conseqüentemente, o limitante superior da Conjectura 1.2 é justo para essas classes de grafos.

## Capítulo 4

# Coloração localmente irregular de Snarks

Um *Snark* é um grafo cúbico, simples e sem pontes que não é 3-aresta colorível. Chamamos um Snark de *trivial* se possuir cintura menor do que 5, caso contrário podemos facilmente remover vértices e arestas, e obter Snarks menores. A primeira descoberta de um Snark é dada à Julius Petersen em 1898 [20]. O grafo de Petersen é o menor snark com essas propriedades. Após muitos anos, pela dificuldade de encontrar esses grafos, Martin Gardner [21] nomeou esses grafos como Snarks inspirado no poema de Lewis Carroll *The Hunting of the Snark* [22].

Neste capítulo apresentamos colorações localmente irregulares de alguns grafos Snarks. Na Seção 4.1 ilustramos uma  $2LI$ -coloração para o grafo de Petersen, Celmins-Swart 1 e 2, Zamfirescu, Estrela Dupla, Szekeres, Watkins. Na Seção 4.2 verificamos a conjectura para as famílias Snark-Flor, Snark de Golberg, Snark de Loupekine e Snark de Blanusa 1 e 2. Em particular, verificamos que todos esses grafos admitem uma  $2LI$ -coloração. As colorações obtidas na Seção 4.1 foram obtidas por inspeção e, portanto, apresentamos apenas ilustrações.

### 4.1 Grafo de Petersen, Celmins-Swart 1 e 2, Estrela Dupla, Szekeres, Watkins

O grafo de Petersen é um grafo com 10 vértices. Este nome lhe foi dado em homenagem a Julius Petersen, que em 1898 construiu o menor grafo cúbico sem pontes que não é 3-aresta colorível. A Figura 4.1 ilustra uma  $2LI$ -coloração do grafo de Petersen.

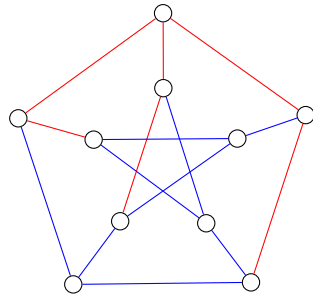


Figura 4.1:  $2LI$ -coloração grafo de Petersen

Os Snarks de Celmins-Swart são os dois Snarks com 26 vértices, encontrados por U.A. Celmins e E.R. Swart em 1979. Abaixo apresentamos uma  $2LI$ -coloração dos grafos Celmins-Swart 1 e 2.

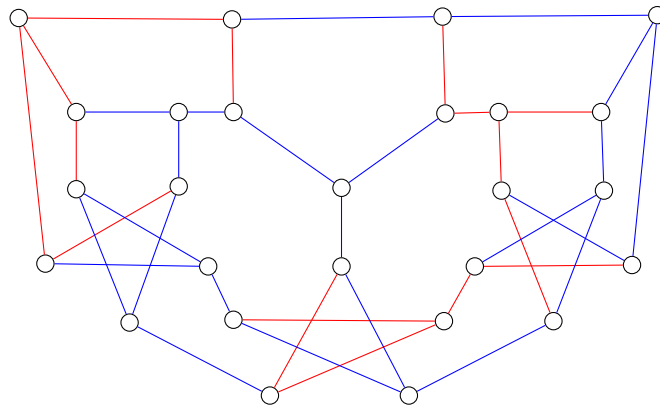


Figura 4.2:  $2LI$ -coloração do grafo Celmins-Swart 1

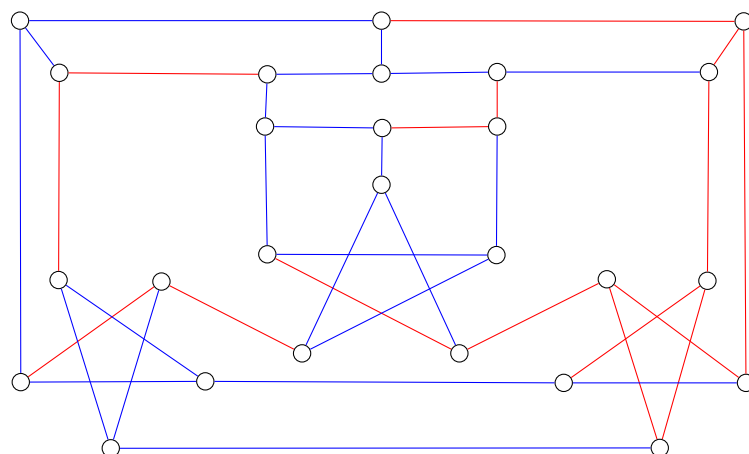


Figura 4.3:  $2LI$ -coloração do grafo Celmins-Swart 2



O grafo de Zamfirescu com 36 vértices é um Snark e foi encontrado por Zamfirescu em 1976. A Figura 4.4 ilustra uma  $2LI$ -coloração do grafo de Zamfirescu.

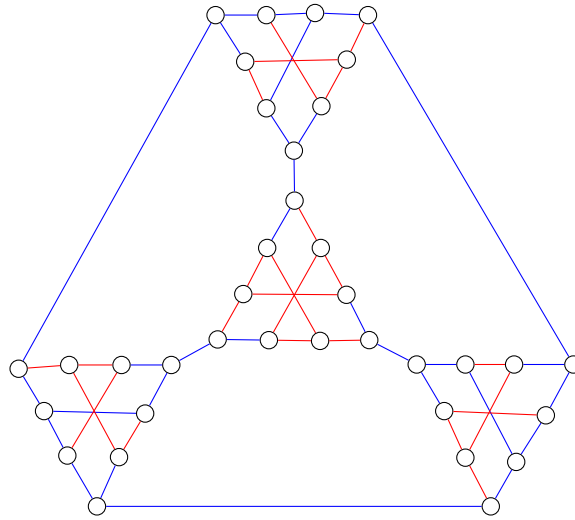


Figura 4.4:  $2LI$ -coloração do grafo de Zamfirescu com 36 vértices

O grafo estrela dupla é um Snark com 30 vértices, foi encontrado por Rufus Isaacs em 1975. A Figura 4.5 exibe uma  $2LI$ -coloração do grafo estrela dupla.

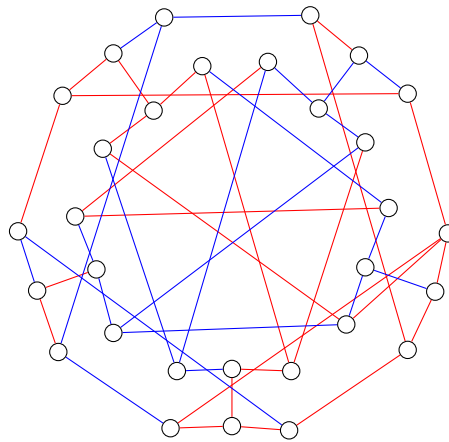


Figura 4.5:  $2LI$ -coloração do grafo Estrela Dupla

O grafo Szekeres é um Snark com 50 vértices, foi encontrado por George Szekeres em 1973. Abaixo ilustramos uma  $2LI$ -coloração do grafo de Szekeres 4.6.

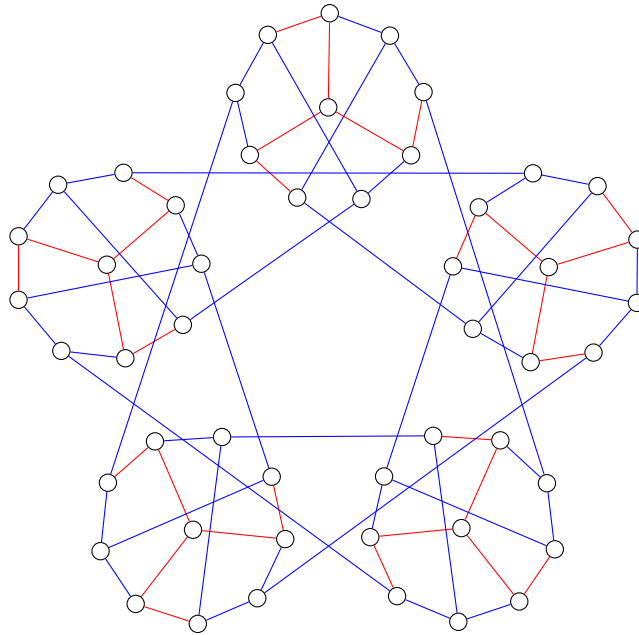


Figura 4.6:  $2LI$ -coloração do grafo Szekeres

O grafo Watkins é um Snark com 50 vértices, foi encontrado por John J. Watkins em 1989. A Figura 4.7 ilustra uma  $2LI$ -coloração do grafo de Watkins.

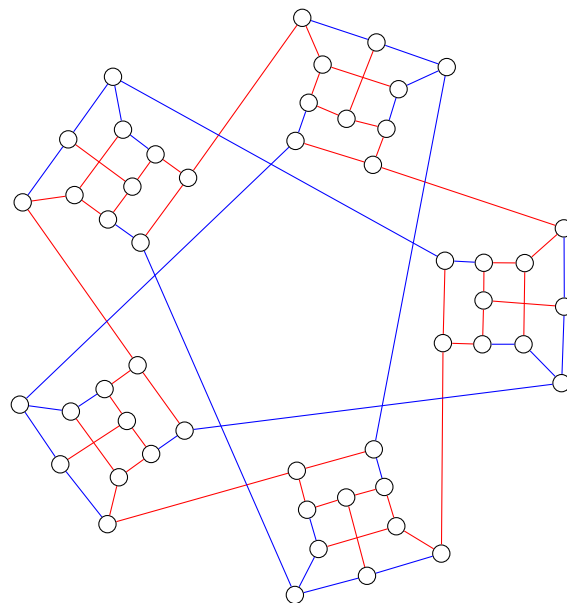


Figura 4.7:  $2LI$ -coloração do grafo Watkins

O grafo de Descartes é um Snark com 210 vértices e 315 arestas, foi encontrado por Bill Tutte em 1948. Abaixo exibimos uma  $2LI$ -coloração do grafo de Descartes 4.8.

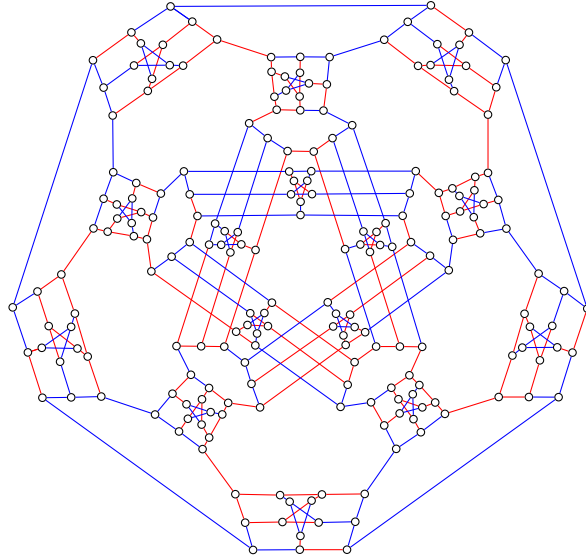


Figura 4.8: 2LI-coloração do grafo de Descartes

## 4.2 Famílias Snark-Flor, Goldberg, Loupekine e Blanusa 1 e 2

Seja  $k$  um inteiro positivo ímpar,  $k \geq 1$ . O *Snark-Flor* de ordem,  $k$  denotado por  $F_k$ , é um grafo com  $n = 4k$  vértices. O Snark-Flor foi introduzido por Rufus Isaacs em 1975 [23]. Seja  $B_i$ , com  $i = 1, \dots, k$ , o grafo com conjunto de vértices  $V(B_i) = \{u_i, v_i, x_i, y_i\}$  e conjunto de arestas  $E(B_i) = \{u_i v_i, x_i v_i, y_i v_i\}$ , que chamamos de *bloco* e seja  $E_{i-1,i} = \{u_{i-1} u_i, x_{i-1} x_i, y_{i-1} y_i\}$  o conjunto de *arestas de ligação*. A Figura 4.9 apresenta o bloco  $B_i$  e a conexão entre os blocos.

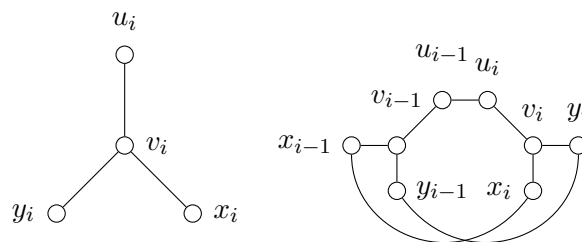


Figura 4.9: Bloco  $B_i$  e conexão entre os blocos

O Snark-Flor pode ser obtido dos blocos  $B_1, \dots, B_k$  pela adição do conjunto de arestas de ligação.

- Construa  $k$  blocos  $B_1, \dots, B_k$ .
- Adicione as arestas  $\bigcup_{2 \leq i \leq k} E_{i-1,i} \cup E_{k,1} \cup \{u_1 u_2, x_1 y_2, y_1 x_2\}$

**Teorema 4.1.** Se  $G$  é um Snark-flor, então  $\chi'_{irr}(G) = 2$ .

*Demonstração.* A coloração se dará da seguinte forma: Seja  $C_i = E(B_i) \cup \{u_i u_{i+1}\}$ . Para  $i$  em  $\{1, \dots, k\}$ . As arestas  $y_1 v_1, x_1 v_1$  colorimos com a cor 2 enquanto as arestas  $v_1 u_1, u_1 u_2$  colorimos a cor 1. Colorimos as arestas em  $G[C_i]$  com  $i \geq 2$  com a cor 2 se  $i$  for par, e com a cor 1 se  $i$  for ímpar. Seja  $S$  o ciclo  $(u_1, u_2, \dots, u_k, u_1)$ , e note que os vértices de  $S$  satisfazem a condição de irregularidade local, pois temos que  $d_1(u_1) = 3$ , enquanto  $d_1(v_1) = 1$ , assim  $d_j(u_1) < d_j(v_1)$  para  $j \in \{1, 2\}$  e,  $d_j(u_i) < d_j(v_i)$  para  $j \in \{1, 2\}$  e  $i \in \{2, \dots, k\}$ . As arestas do conjunto de arestas de ligação  $E_{2,3} \cup E_{3,4} \cup \dots \cup E_{k,1} \cup \{u_1 u_2, x_1 y_2, x_2 y_1\}$  com exceção das arestas em  $S$ , são coloridas da seguinte forma: Se  $B_{i-1}$  foi colorido com a cor 2, colorimos  $E_{i-1,i}$  com a cor 1, e colorimos  $E_{i-1,i}$  com a cor 2 caso contrário. Por fim, as arestas  $\{x_1 y_2, x_2 y_1\}$  são coloridas com a cor 2. Logo obtemos uma  $2LI$ -coloração para toda família Snark-Flor  $F_k$  com  $k \geq 1$  e  $k$  ímpar.  $\square$

A Figura 4.10 exibe a coloração localmente irregular dos grafos  $F_3, F_5$  e  $F_7$ .

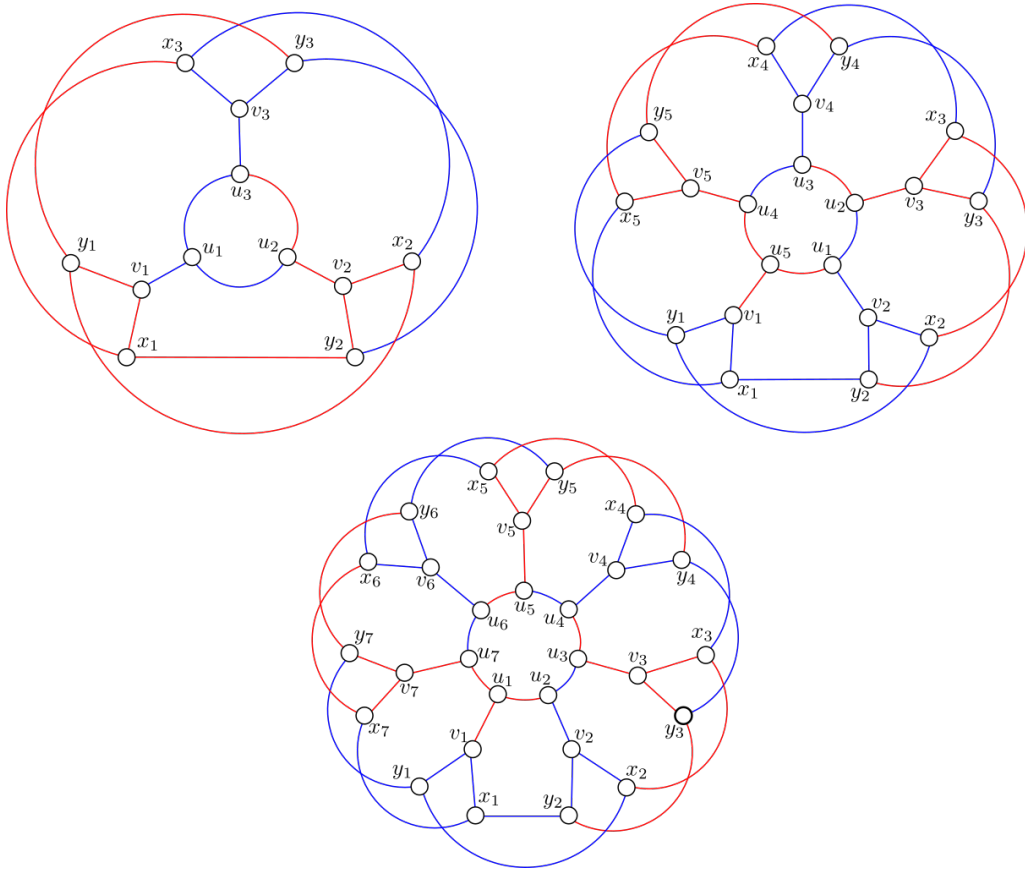


Figura 4.10:  $2LI$ -coloração dos snarks  $F_3, F_5$  e  $F_7$

Os Snarks de Goldberg foram introduzidos por M. Goldberg em 1981 [23]. Seja  $k$  um inteiro ímpar e  $k \geq 3$ . O Snark de Goldberg de ordem  $k$  denotado por  $G_k$ , é um grafo com  $n = 8k$  vértices. Neste caso, um *bloco*  $B_i$ , para  $i = 1, \dots, k$ , é o grafo cujo conjunto de vértices é  $V(B_i) = \{u_i, v_i, x_i, y_i, z_i, w_i, s_i, t_i\}$ , e o conjunto de arestas é  $E(B_i) = \{u_i v_i, x_i y_i, x_i z_i, y_i w_i, z_i v_i, z_i t_i, v_i w_i, w_i s_i, s_i t_i\}$ , e seja  $E_{i-1, i} = \{s_{i-1} t_i, x_{i-1} y_i, u_{i-1} u_i\}$  o conjunto de arestas de ligação. O Snark de Goldberg pode ser obtido dos blocos  $B_1, \dots, B_k$  pela adição do conjunto de arestas de ligação.

- Construa  $k$  blocos  $B_1, \dots, B_k$
- Adicione as arestas  $\bigcup_{2 < i \leq k} E_{i-1, i} \cup E_{k, 1}$

A Figura 4.11 apresenta o bloco  $B_i$  e a conexão entre blocos.

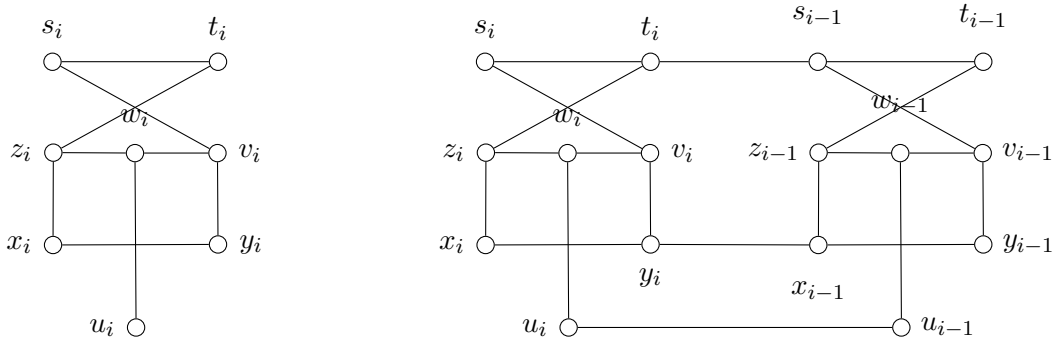


Figura 4.11: Bloco  $B_i$  e conexão entre os blocos

**Teorema 4.2.** *Se  $G$  é um Snark de Goldberg, então  $\chi'_{irr}(G) = 2$ .*

*Demonstração.* Seja  $C$  o ciclo  $(y_1, x_1, y_2, \dots, x_k, y_1)$ . Atribuímos a cor 1 a todas as arestas de  $C$ . Além disso, atribuímos a cor 1 às arestas  $y_i w_i$ . Assim, para manter a irregularidade local necessitamos que as arestas  $x_i z_i$  recebam a cor 2.

Considere o conjunto de arestas  $S_i = \{v_i u_i, v_i z_i, v_i w_i, u_i u_{i+1}\}$ . Para  $S_i$  com  $i \geq 2$  e  $i \in \{2, \dots, k\}$ , atribuímos a cor 1 às arestas de  $S_i$  se  $i$  for ímpar e a cor 2 se  $i$  for par. Atribuímos a cor 1 às arestas  $v_1 u_1$  e  $u_1 u_2$ . Dessa forma, temos  $d_1(u_2) = 3$ , enquanto  $d(N(u_2)) < 3$ , o que mantém a condição de irregularidade local. Às arestas  $v_1 w_1$  e  $v_1 z_1$  atribuímos a cor 2.

Seja  $J_i = \{s_i w_i, t_i z_i, s_i t_i\}$ . Para  $i > 2$  ímpar atribuímos a cor 2 a todas as arestas de  $J_i$ . Se  $i$  for par e  $i \geq 2$  atribuímos a cor 1 às arestas do tipo  $s_i w_i$  e  $t_i z_i$  e a cor 2 às arestas  $s_i t_i$ . Atribuímos a cor 1 às arestas  $s_1 w_1$  e  $s_1 t_1$  e atribuímos a cor 2 à aresta  $t_1 z_1$ . Note que até este ponto da coloração, a aresta  $s_i t_i$  para  $i$  par é isolada no subgrafo induzido pela cor 2, assim atribuímos a cor 2 ao conjunto de arestas de ligação do tipo  $s_i t_{i+1}$  quando  $i$  for par e, a cor 1 quando  $i$  for ímpar. Desta forma, obtemos uma  $2LI$ -coloração para a família Snark de Goldberg.  $\square$

A Figura 4.12 exibe a coloração localmente irregular do grafo  $G_3$  e  $G_5$ .

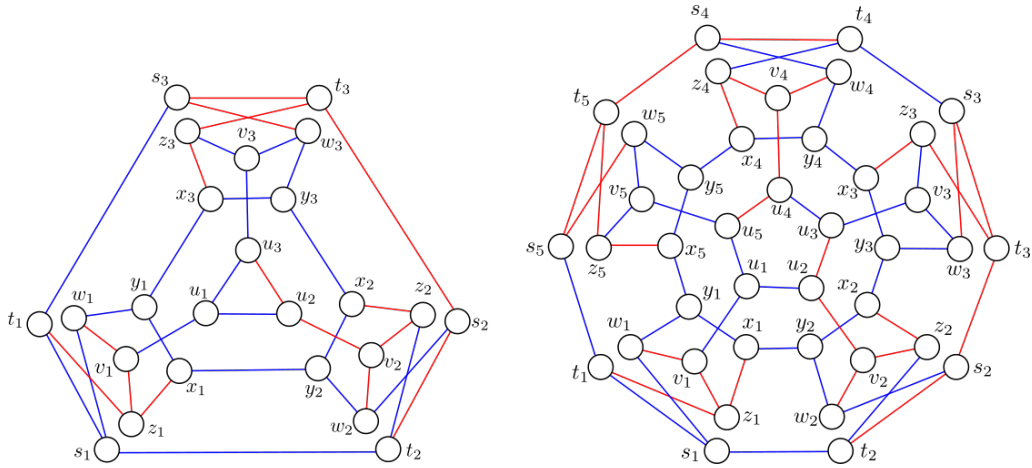


Figura 4.12:  $2LI$ -coloração dos Snarks  $G_3$  e  $G_5$

O Snark de Loupekine foi introduzido por F.Loupekine em 1976 [24]. Seja  $k$  um inteiro ímpar e  $k \geq 3$ . O Snark de Loupekine de ordem  $k$ , denotado por  $LO_k$ , é um grafo com  $n = 7k + 1$  vértices. Seja  $P$  o grafo de Petersen. Retire de  $P$  três vértices consecutivos do circuito externo, obtendo assim um grafo  $B_i$  com  $i \in \{1, \dots, k\}$ , que também chamamos de *bloco*. A Figura 4.13 apresenta o grafo de Petersen e o bloco  $B_i$ .

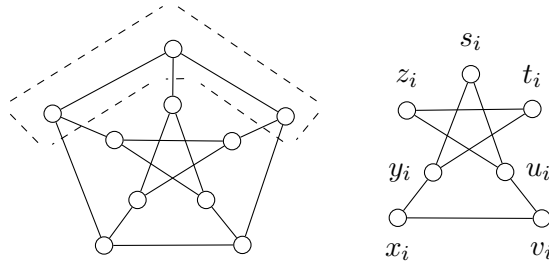


Figura 4.13: Grafo de Petersen e Bloco  $B_i$  respectivamente

O bloco  $B_i$  é formado pelo conjuntos de vértices  $V(B_i) = \{s_i, t_i, u_i, x_i, y_i, z_i\}$  e pelo conjunto de arestas  $E(B_i) = \{u_i v_i, v_i x_i, x_i y_i, y_i t_i, t_i z_i, z_i u_i, u_i s_i, s_i y_i\}$  como mostra a Figura 4.13. Seja  $E_{k,j} = \{t_{k-1} z_k, v_{k-1} x_k\}$  o conjunto de arestas de ligação e  $a$  um vértice. Os Snarks de Loupekine podem ser construídos da seguinte forma.

- Construa  $k$  blocos  $B_1, \dots, B_k$
- Adicione as arestas  $\bigcup_{2 < i \leq k} E_{i-1,i} \cup E_{k,1} \cup \{as_1, as_2, as_3\}$
- Adicione para  $2 \leq i \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  as arestas  $s_{2i} s_{2i+1}$

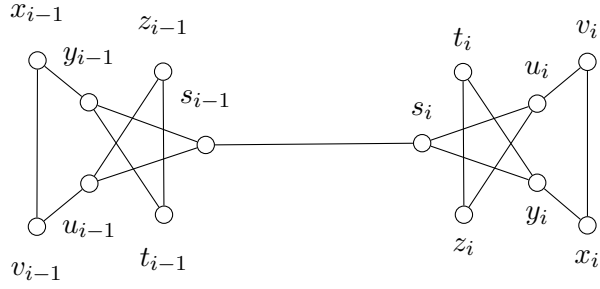


Figura 4.14: Conexão entre os blocos

A Figura 4.15 apresenta o Snark de Loupekine  $LO_3$ , que é formado pela união de  $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$ , através das arestas de ligação  $E_{1,2}$ ,  $E_{2,3}$  e  $E_{3,1}$ , juntamente com o vértice fixo  $a$  e o conjunto de arestas fixo  $s_1a$ ,  $s_2a$  e  $s_3a$ .

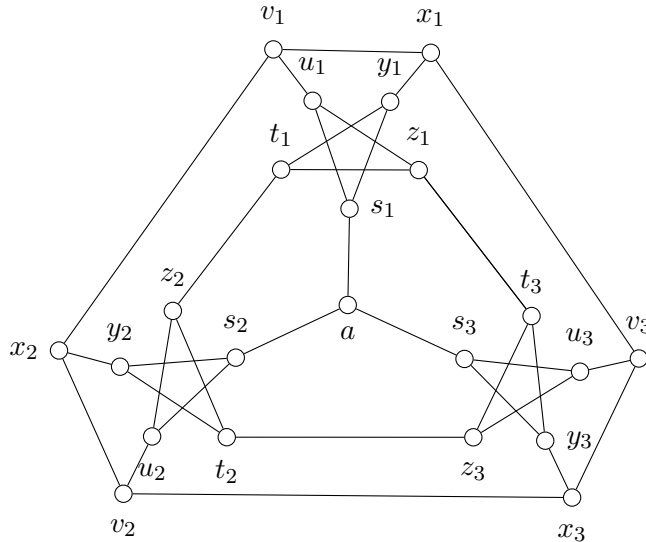


Figura 4.15: Snark de Loupekine  $LO_3$

**Teorema 4.3.** *Se  $G$  é um Snark de Loupekine, então  $\chi'_{irr}(G) = 2$ .*

*Demonstração.* Note que colorir todas as estrelas de forma idêntica não resultaria em um grafo localmente irregular pois teríamos que os vértices extremos das arestas  $s_{2i}s_{2i+1}$  possuiriam o mesmo grau nas cores 1 e 2. Assim, precisamos distinguir a coloração de algumas estrelas. Portanto, a coloração se dará da seguinte forma: Para todo  $i$  par ou  $i \in \{1, 3\}$ , atribuímos a cor 1 às arestas  $t_kz_k, t_ky_k, x_ky_k, x_kv_k$  e a cor 2 às arestas  $u_k s_k, u_k z_k, u_k v_k, s_k y_k$ . Para todo  $i$  ímpar, com  $i \neq 1$  e  $i \neq 3$ , atribuímos a cor 1 às arestas  $u_i s_i, u_i z_i, u_i v_i$  e a cor 2 às arestas  $t_i z_i, t_i y_i, x_i y_i, y_i s_i, x_i v_i, t_i z_i$ . Todas às arestas do conjunto de arestas de ligação  $t_{k-1}z_k, v_{k-1}x_k$  e as arestas  $s_{k-1}s_k, s_1a, s_2a, s_3a$  irão receber a cor 1. Dessa forma, obtemos uma  $2LI$ -coloração para a família de Snarks de Loupekine.  $\square$

A Figura 4.16 exibe a coloração localmente irregular do grafo  $LO_5$ .

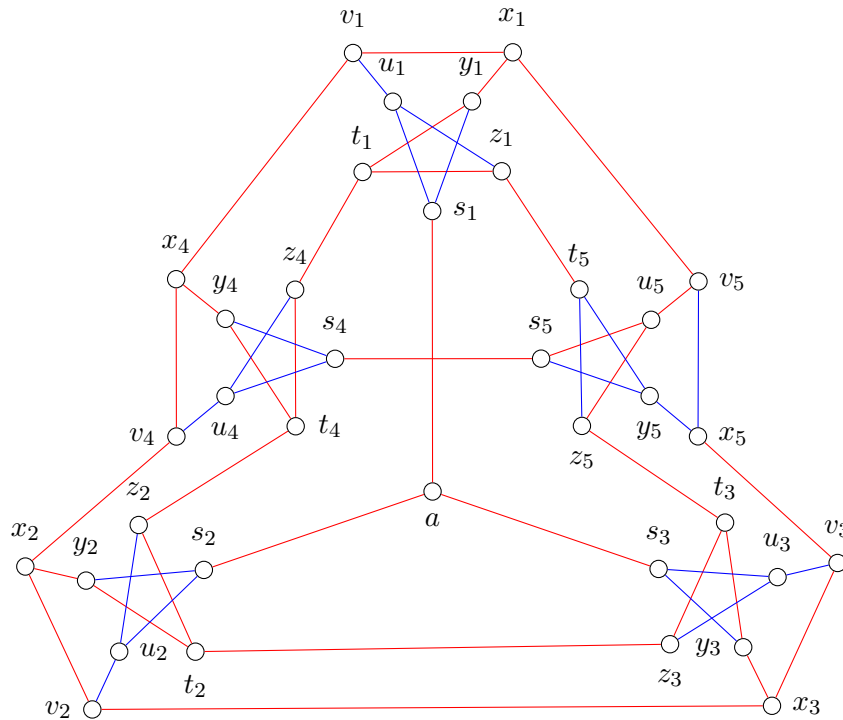


Figura 4.16:  $2LI$ -coloração do Snark  $LO_5$

J. Watkins em 1983 [25, 26] construiu duas famílias infinitas de Snarks, que denominamos *família Blanusa 1* e *família Blanusa 2*. Para a construção dos Snarks de Blanusa família 1 e 2 utilizaremos o *bloco de Petersen* que é obtido pela retirada de dois vértices adjacentes do grafo de Petersen, veja Figura 4.17.

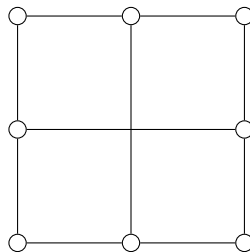


Figura 4.17: Bloco de Petersen

Seja  $k$  um inteiro positivo,  $k \geq 0$ . O Snark da família Blanusa 1 de ordem  $k$ , denotado por  $BF_k$ , é um grafo com  $n = 8k + 10$  vértices. O grafo de Petersen ilustrado na Figura 4.18 é o primeiro membro da família Blanusa 1,  $BF_0$ . Sua ilustração está rotulada na forma adequada para a construção dos Snarks da família Blanusa 1.



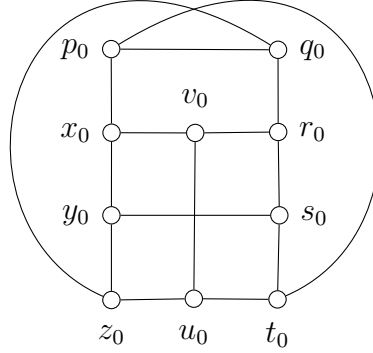
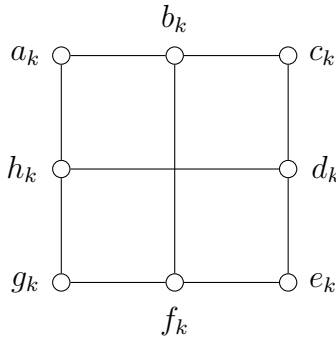


Figura 4.18: Snark  $BF_0$

Para construirmos os Snarks da família Blanusa 1. Considere o grafo de ligação  $L_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  o grafo de ligação tal que  $V(L_i) = \{a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i, h_i\}$  e  $E(L_i) = \{a_i b_i, b_i c_i, c_i d_i, e_i f_k, f_i g_i, g_i h_i, h_i a_i, b_i f_i, d_i h_i\}$ .



O Snark da família Blanusa 1 de ordem  $k$ , denotado por  $BF_k$  é o grafo tal que.

- $V(BF_k) = V(BF_{k-1}) \cup V(L_k)$ .
- $E(BF_k) = [E(BF_{i-1}) - \{q_0 g_k, p_0 e_{i-1}\}] \cup E(L_i) \cup \{q_0 g_k, p_0 e_k, g_{k-1} c_k, e_{k-1} a_i\}$ .

**Teorema 4.4.** Se  $G$  é um Snark da família Blanusa 1, então  $\chi'_{irr}(G) = 2$ .

*Demonstração.* Iremos atribuir as arestas as cores 1 e 2 da seguinte forma: Às arestas  $p_0 q_0, v_0 x_0, v_0 r_0, u_0 v_0, u_0 t_0, s_0 t_0, q_0 r_0$  atribuímos a cor 1 e às arestas  $p_0 x_0, x_0 y_0, y_0 s_0, y_0 z_0, r_0 s_0, u_0 z_0$  atribuímos a cor 2. Se  $G$  for o Snark da família Blanusa 1,  $BF_0$ , então às arestas  $p_0 t_0, q_0 z_0$  receberão a cor 1. Apresentamos tal coloração na Figura 4.19.

Para  $BF_k$ ,  $k \geq 1$ , atribuímos a cor 1 às arestas  $b_i c_i, c_i d_i, a_i h_i, d_i h_i, g_i h_i$  e a cor 2 às arestas  $a_i b_i, b_i f_i, f_i g_i, e_i f_i, d_i e_i$ . Note que os graus de  $d_1(t_0) \neq d_1(a_1), d_1(c_1) \neq d_1(z_0)$ ,

$d_1(g_{i-1}) \neq d_1(c_i)$  e  $d_1(e_{i-1}) \neq d_1(a_i)$ , são distintos. Dessa forma se atribuirmos cor 1 às arestas  $z_0c_1, t_0a_1$ , e às arestas que unem os blocos  $g_{i-1}c_i, e_{i-1}a_i$ , manteremos a irregularidade local. Por fim às arestas  $p_0e_k, q_0g_k$  atribuimos a cor 1. Logo obtemos uma  $2LI$ -coloração dos Snarks da família Blanusa 1.  $\square$

A Figura 4.19 exibe a coloração localmente irregular do grafo  $BF_0$  e  $BF_1$ .

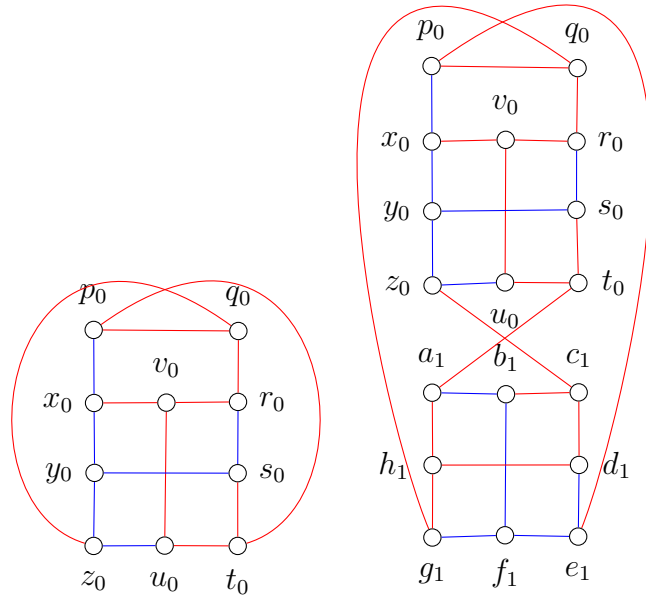


Figura 4.19:  $2LI$ -coloração dos Snarks  $BF_0$  e  $BF_1$  respectivamente.

Seja  $k$  um inteiro positivo,  $k \geq 0$ . O Snark da família Blanusa 2 de ordem  $k$  denotado por  $BS_k$ , é um grafo com  $n = 8k + 10$  vértices. O Snark  $BF_0$  também coincide com o grafo de Petersen ilustrado na Figura 4.20. Sua ilustração está rotulada na forma adequada para a construção dos Snarks da família Blanusa 2. O grafo de ligação  $L_i$  utilizado na construção dos Snarks da família Blanusa 1 também será utilizado na construção dos Snarks da família Blanusa 2.

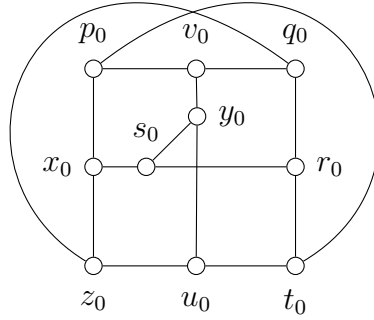


Figura 4.20: Snark  $BS_0$

O Snark  $BS_k$  é o grafo tal que.

- $V(BS_k) = V(BS_{k-1}) \cup V(L_k)$ .
- $E(BS_k) = [E(BS_{k-1}) - \{q_0g_{k-1}, p_0e_{k-1}\}] \cup E(L_k) \cup \{q_0g_k, p_0e_k, g_{k-1}c_k, e_{k-1}a_k\}$

**Teorema 4.5.** *Se  $G$  é um Snark da família Blanusa 2, então  $\chi'_{irr}(G) = 2$ .*

*Demonstração.* Atribuímos às arestas as cores 1 e 2 da seguinte forma: Às arestas  $p_0v_0, v_0q_0, p_0x_0, x_0s_0, s_0y_0, s_0r_0, q_0r_0$  atribuímos a cor 1 e às arestas  $v_0y_0, y_0u_0, x_0z_0, z_0u_0, u_0t_0, r_0t_0$  atribuímos a cor 2. Se  $G$  for o Snark da família Blanusa 2  $BS_0$ , então às arestas  $p_0c_0, q_0z_0$  atribuímos a cor 1. Apresentamos tal coloração na Figura 4.21.

Para  $BS_k$ , com  $k \geq 1$ , iremos atribuir as mesmas cores ao grafo de ligação da família Blanusa 1. Assim atribuímos a cor 1 às arestas  $b_i c_i, c_i d_i, a_i h_i, d_i h_i, g_i h_i$  e a cor 2 às arestas  $a_i b_i, b_i f_i, f_i g_i, e_i f_i, d_i e_i$ . Note que os graus de  $d_1(t_0) \neq d_1(a_1)$ ,  $d_1(c_1) \neq d_1(z_0)$ ,  $d_1(g_{i-1}) \neq d_1(c_i)$  e  $d_1(e_{i-1}) \neq d_1(a_i)$  são distintos. Dessa forma, se atribuímos a cor 1 às arestas  $z_0 c_1, t_0 a_1$  e às arestas que unem os blocos  $g_{i-1} c_i, e_{i-1} a_i$ , manteremos a irregularidade local. Por fim, às arestas  $p_0 e_k, q_0 g_k$  atribuímos a cor 1. Logo obtemos uma  $2LI$ -coloração dos Snarks da família Blanusa 2.  $\square$

A Figura 4.21 exhibe a coloração localmente irregular do grafo  $BS_0$  e  $BS_1$ .

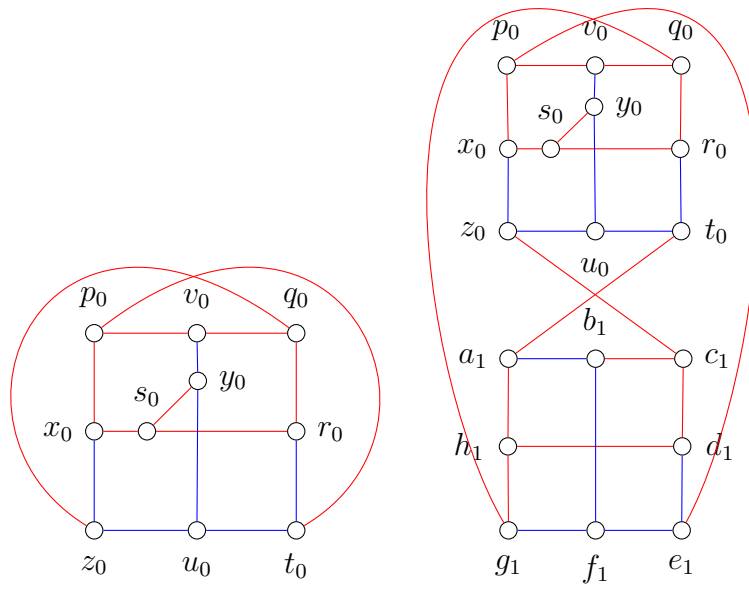


Figura 4.21: 2LI-coloração dos Snarks  $BS_0$  e  $BS_1$  respectivamente.

# Capítulo 5

## Testes computacionais

Neste capítulo apresentamos uma técnica para resolução de problemas de otimização sob restrições lineares, o problema de programação linear (PPL) e programação linear inteira (PLI). Além disso, apresentamos um modelo padrão para obter uma formulação PLI para computar o índice cromático irregular de um grafo, a qual utilizamos para computar o índice cromático irregular para algumas classes de grafos cúbicos e grafos quaisquer.

### 5.1 Programação linear e programação linear inteira

Em um *Problema de Programação Linear* (PPL) queremos maximizar ou minimizar uma função linear, chamada *função objetivo*, sujeita a uma série de restrições. Essas restrições serão inequações ou equações também lineares. Assim, o problema é dado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{min ou max} \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j && \text{(função objetivo)} \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m && \text{(restrições)} \\ & x \in \mathbb{R}^n, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n && \text{(restrição de não negatividade)} \end{aligned}$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de variáveis de decisão do problema,  $c_j$ ,  $a_{ij}$  e  $b_i$  são dados números reais. É possível reescrever o problema de forma a obter apenas desigualdades equivalentes, bastando multiplicar por -1 as restrições desejadas. Assim, um problema de programação linear poderá ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& \text{min ou max} && z = cx \\
& \text{sujeito a} && Ax \leq b, \quad i = 1, \dots, m \\
& && x \in \mathbb{R}^n, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

em que  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  o vetor que possui as variáveis de decisão do problema. Em [27] obtemos a seguinte definição. Seja  $X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ . O conjunto  $X$  é denominado *conjunto* ou *região viável* do (PPL) e, se  $x \in X$ , então  $x$  é *solução viável* do problema. Dado  $x^* \in X$ ,  $x^*$  é denominado uma *solução ótima* do (PPL), de maximização, se  $cx^* \geq cx, \forall x \in X$  e se o problema for de minimização, vale  $cx^* \leq cx, \forall x \in X$ .

Em alguns casos ao formular problemas de otimização, é comum encontrar problemas que envolvem contagem de elementos, ou problemas que envolvem decisões (sim ou não, por exemplo), em que as variáveis assumem 0 ou 1. Isto é, problemas com domínio discreto. Assim, é necessário o uso da programação linear inteira (PLI). Um problema de Programação Linear Inteira é um problema da forma:

$$\begin{aligned}
& \text{min ou max} && z = cx \\
& \text{sujeito a} && Ax \leq b, \quad i = 1, \dots, m \\
& && x \in \mathbb{Z}^n, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

em que  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  e  $x \in \mathbb{Z}^n$ . Observe que o (PLI) é um caso particular de um (PPL) onde as variáveis de decisão são inteiras, isto é, restringe-se o domínio aos números inteiros.

Apresentamos agora um modelo padrão para obter uma formulação PLI para computar o índice cromático irregular de um grafo. Dado um vértice  $u$ , denotamos por  $d_{u,i}$  o grau  $u$  na cor  $i$  e denotamos por  $\delta(u)$  o conjunto de arestas de  $G$  incidentes a  $u$ . Para cada aresta  $uv \in E(G)$  e para cada cor  $i = 1, 2, 3$ , definimos uma variável binária  $x_{uv,i}$  que assumirá valor 1 somente se  $c(uv) = i$ . Para obter um modelo padrão utilizamos as seguintes famílias de equações:

$$\sum_{i=1}^3 x_{uv,i} = 1 \quad \forall uv \in E(G) \quad (5.1)$$

$$\sum_{uv \in \delta(u)} x_{uv,i} = d_{u,i} \quad \forall u \in V(G) \text{ e } i = 1, 2, 3 \quad (5.2)$$

E para todo  $uv \in E(G)$  e  $i = 1, 2, 3$ .

$$d_{u,i} + (\Delta(G) + 1)(2 - y_{uv,i,0} - x_{uv,i}) > d_{v,i} \quad (5.3)$$

$$d_{v,i} + (\Delta(G) + 1)(2 - y_{uv,i,1} - x_{uv,i}) > d_{u,i} \quad (5.4)$$

$$y_{uv,i,0} + y_{uv,i,1} = 1 \quad (5.5)$$

A Equação (6.1) garante que cada aresta recebe exatamente uma única cor e a Equação (6.2) garante que  $d_{u,i}$  tem exatamente o valor do grau das arestas incidentes a  $u$  na cor  $i$ . Dada uma aresta  $uv \in E(G)$ , se  $c(uv) = i$  as Inequações (6.3) e (6.4) garantem que  $d_{u,i} > d_{v,i}$  ou  $d_{v,i} > d_{u,i}$ . Essas inequações garantem a desigualdade local. Note que se  $uv$  está colorida com uma cor  $j \neq i$ , então as Equações (6.3) e (6.4) são automaticamente satisfeitas. Por outro lado, se  $uv$  é colorida com a cor  $i$ , a Equação (6.5) garante que apenas uma dentre as Equações (6.3) e (6.4) seja satisfeita automaticamente, enquanto as restantes forçam o grau de um dos vértices a ser estritamente maior que o grau do outro (na cor  $i$ ). Note que as desigualdades estritas podem ser transformadas em desigualdades pela adição de  $\varepsilon > 0$ .

## 5.2 Resultados experimentais

O programa inteiro foi resolvido com Gurobi [28]. O código foi escrito SageMath [29] que é um software de matemática livre e de código aberto.

Utilizamos um programa desenvolvido por B. D. McKay chamado Nauty [30] para a criação dos grafos. Utilizando essa ferramenta nós criamos todos possíveis grafos conexos não isomórfos com até 9 vértices e grafos 3-regulares com índice cromático 4 com até 20 vértices. A Tabela 5.1 exibe os resultados computacionais utilizando nossa formulação PLI em grafos gerais.

# Vértices	$\chi'_{irr}(G) = 1$	$\chi'_{irr}(G) = 2$	$\chi'_{irr}(G) = 3$	Inviável
4	1	3	1	1
5	4	11	4	2
6	13	87	10	3
7	64	763	23	3
8	477	10594	73	3
9	5969	254862	244	5

Tabela 5.1: Grafos com índice cromático irregular 1,2 e 3 e, grafos inviáveis.

Em grafos gerais, podemos notar que o número de grafos com índice cromático irregular 2 é muito maior que o número de grafos com índice cromático irregular 3. Os grafos inviáveis com um número ímpar de vértices são precisamente os ciclo

ímpares, e os membros da família  $\mathcal{T}$ . E os grafos inviáveis com número par de vértices são precisamente os caminhos de comprimento ímpar e os membros da família  $\mathcal{T}$ . Note que estes são exatamente os grafos excepcionais (veja Seção 1.2). A Tabela 5.2 exhibe os resultados computacionais utilizando nossa formulação PLI em Snarks.

# Vértices	$\chi'_{irr}(G) = 2$	$\chi'_{irr}(G) = 3$	Inviável
10	1	1	0
12	3	2	0
14	24	10	0
16	168	44	0
18	1298	316	0
20	11658	2401	0

Tabela 5.2: Grafos cúbicos com índice cromático irregular 2 e 3 e, grafos inviáveis.

Em Snarks, podemos notar que o número de grafos com índice cromático irregular 2 é muito maior que o número de grafos com índice cromático irregular 3. Outro ponto observado é que todos os Snarks “ruins”, ou seja, com índice cromático irregular 3 possuem cintura 3.



# Capítulo 6

## Conclusão e trabalhos futuros

Nesta dissertação realizamos o levantamento dos resultados do problema de coloração de arestas localmente irregular. Além disso, nós verificamos a Conjectura 1.2 para (i) os grafos potência de ciclo; (ii) a família dos grafos cúbicos que possuem um conjunto independente maximal  $I$ , no qual o grafo  $G \setminus I$  é 2-regular; (iii) para as famílias Snark-Flor, Goldberg, Loupekine e Blanusa 1 e 2 e (iv) apresentamos um gadget que nos permite provar que o limitante da Conjectura 1.2 é justo para um número infinito de grafos em várias famílias de grafos importantes, como grafos planares, grafos com grau limitado, grafos cúbicos, entre outros. Nós apresentamos um modelo padrão para formulações PLI para computar o índice cromático irregular de um grafo, e através de testes computacionais calculamos o índice cromático irregular para grafos com até 9 vértices e para todo Snark com no máximo 20 vértices. Além disso, observamos que todo Snark com até 20 vértices e com índice cromático irregular 3 possui cintura 3.

Como trabalho futuro, pretendemos explorar se a técnica apresentada para provar o Teorema 3.2 pode ser estendida para outros grafos cúbicos. Pretendemos verificar se o fato de termos conseguido colorir todos os Snarks com 2 cores como no Capítulo 4, pode ser estendido para uma família maior de Snarks como os Snarks 3-aresta conexos, ou seja, se 2 cores é suficiente para colorir todos os Snarks 3-aresta conexos. Além disso, em [11] os autores conjecturaram que todo grafo potência de ciclo que não é isomorfo a  $C_n$  possui uma  $2NSD$ -coloração. Logo, pretendemos investigar os padrões de colorações gerados pelo programa linear descrito nesse trabalho para criar um método para obter uma 2-LIC dos grafos potência de ciclo. Assim, se conseguirmos provar que o índice cromático irregular dos grafos potência de ciclo é 2 isso provaria a Conjectura 23 em [11] usando a Proposição 1.1.

# Referências Bibliográficas

- [1] LOVÁSZ, L. “On covering of graphs”, *Theory of Graphs*, 01 1968.
- [2] BOTLER, F., MOTA, G. O., OSHIRO, M. T., et al. “Decomposing highly edge-connected graphs into paths of any given length”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 122, pp. 508–542, 2017.
- [3] BOTLER, F., MOTA, G. O., OSHIRO, M., et al. “Path decompositions of regular graphs with prescribed girth”, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 49, pp. 629–636, 2015.
- [4] BONDY, J. A., MURTY, U. S. R., OTHERS. *Graph theory with applications*, v. 290. Macmillan London, 1976.
- [5] DIESTEL, R. “Graph theory 3rd ed”, *Graduate texts in mathematics*, v. 173, 2005.
- [6] JÜNGER, M., REINELT, G., PULLEYBLANK, W. R. “On partitioning the edges of graphs into connected subgraphs”, *Journal of Graph Theory*, v. 9, n. 4, pp. 539–549, 1985.
- [7] BAUDON, O., BENSMAIL, J., PRZYBYŁO, J., et al. “On decomposing regular graphs into locally irregular subgraphs”, *European Journal of Combinatorics*, v. 49, pp. 90–104, 2015.
- [8] KAROŃSKI, M., ŁUCZAK, T., THOMASON, A. “Edge weights and vertex colours”, *Journal of Combinatorial Theory Series B*, v. 91, n. 1, pp. 151–157, 2004.
- [9] ADDARIO-BERRY, L., ALDRED, R. E., DALAL, K., et al. “Vertex colouring edge partitions”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 94, n. 2, pp. 237–244, 2005.
- [10] BENSMAIL, J., HOCQUARD, H., LAJOU, D., et al. “On a List Variant of the Multiplicative 1-2-3 Conjecture”, *arXiv preprint arXiv:2102.08052*, 2021.

- [11] LUIZ, A. G., CAMPOS, C., DANTAS, S., et al. “Neighbour-distinguishing labellings of powers of paths and powers of cycles”, *Journal of Combinatorial Optimization*, pp. 1–22, 2020.
- [12] PRZYBYŁO, J. “Asymptotically optimal neighbour sum distinguishing colourings of graphs”, *Random Structures & Algorithms*, v. 47, n. 4, pp. 776–791, 2015.
- [13] VUČKOVIĆ, B. “Multi-set neighbor distinguishing 3-edge coloring”, *Discrete Mathematics*, v. 341, n. 3, pp. 820–824, 2018.
- [14] BENSMAIL, J., MERKER, M., THOMASSEN, C. “Decomposing graphs into a constant number of locally irregular subgraphs”, *European Journal of Combinatorics*, v. 60, pp. 124–134, 2017.
- [15] LUŽAR, B., PRZYBYŁO, J., SOTÁK, R. “New bounds for locally irregular chromatic index of bipartite and subcubic graphs”, *Journal of Combinatorial Optimization*, v. 36, n. 4, pp. 1425–1438, 2018.
- [16] PRZYBYŁO, J. “On decomposing graphs of large minimum degree into locally irregular subgraphs”, *arXiv preprint arXiv:1508.01129*, 2015.
- [17] HAVET, F., PARAMAGURU, N., SAMPATHKUMAR, R. “Detection number of bipartite graphs and cubic graphs”, 2012.
- [18] LINTZMAYER, C. N., MOTA, G. O., SAMBINELLI, M. “Decomposing split graphs into locally irregular graphs”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 292, pp. 33–44, 2021.
- [19] BAUDON, O., BENSMAIL, J., SOPENA, E. “On the complexity of determining the irregular chromatic index of a graph”, *Journal of Discrete Algorithms*, v. 30, pp. 113–127, 2015.
- [20] PETERSEN, J. “Sur le théoreme de Tait”, *L’intermédiaire des Mathématiciens*, v. 5, pp. 225–227, 1898.
- [21] GARDNER, M. “Mathematical games”, *Scientific American*, v. 234, n. 6, pp. 120–125, 1976.
- [22] DODGSON, C. L., CARROLL, L. *The hunting of the Snark*. Peter Parker Press, 1975.
- [23] ISAACS, R. “Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable”, *The American Mathematical Monthly*, v. 82, n. 3, pp. 221–239, 1975.

- [24] ISAACS, R. “Loupekhine’s snarks: a bifamily of non-Tait-colorable graphs”, *J. Combin. Theory B*, 1976.
- [25] WATKINS, J. J. “Snarks”, *Annals of the New York Academy of Sciences*, v. 576, n. 1, pp. 606–622, 1989.
- [26] WATKINS, J., WILSON, R. “A survey of snarks”, *Graph theory, combinatorics, and applications*, v. 2, pp. 1129–1144, 1991.
- [27] MACULAN, N., FAMPA, M. H. C. “Otimização linear”, *Editora Universidade de Brasilia: Brasilia*, 2006.
- [28] GUROBI OPTIMIZATION, L. “Gurobi Optimizer Reference Manual”. 2021. Disponível em: <<http://www.gurobi.com>>.
- [29] THE SAGE DEVELOPERS. *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version x.y.z)*, 2021. <https://www.sagemath.org>.
- [30] MCKAY, B. D., PIPERNO, A. “Practical graph isomorphism, II”, *Journal of Symbolic Computation*, v. 60, pp. 94–112, 2014. ISSN: 0747-7171. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsc.2013.09.003>. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0747717113001193>>.
- [31] PEREIRA, D. S. D. S. *Coloração Total de Famílias de Snarks*. Dissertação (mestrado), Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ/COOPE, Rio de Janeiro, Brasil, 2010.
- [32] ESCUADRO, H., OKAMOTO, F., ZHANG, P. “Circulants and a three-color conjecture”, *Congressus Numerantium*, v. 178, pp. 33, 2006.