

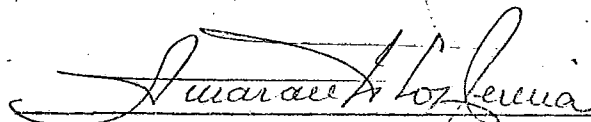
" CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO TEÓRICO DE MODELOS DE DISTRIBUIÇÃO
DE VIAGENS "

Lourdes Zmetek Granja

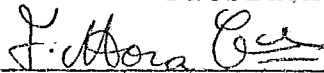
3

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.)

Aprovada por:



AMARANTO LOPES PEREIRA
Presidente



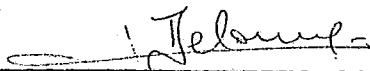
FELIX A. C. MORA-CAMINO
Orientador



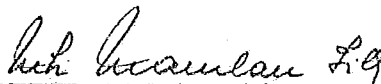
CLOVIS CAESAR GONZAGA



HENRIQUE PACCA LOUREIRO LUNA



JACQUES DELORME



NELSON MACULAN FILHO

RIO DE JANEIRO, RJ. - BRASIL

MAIO DE 1981

GRANJA, Lourdes Zmetek

"Contribuição ao Estudo Teórico de Modelos de Distribuição de Viagens"

XIII, 229 pp.

29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc. ,

Programa de Engenharia de Sistemas, ¹⁹⁸¹1973).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Faculdade de Engenharia .

1. Modelos de Distribuição de Viagens - I. COPPE/UFRJ

II. Título(série).

Ao Edson

e

Ao Luiz Fernando

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Felix Mora-Camino, pelo zelo e dedicação com que conduziu a orientação de minha tese.

Ao Professor Amaranto Lopes Pereira, presidente da Banca Examinadora, por ter despertado meu interesse pela pesquisa científica.

Aos Professores Clovis Caesar Gonzaga, Nelson Maculan Filho, Henrique Pacca Loureiro Luna (UFMG) e ao engenheiro Dr. Jacques Delorme (EBTU), pela participação na Banca Examinadora.

À todos aqueles que, de uma maneira direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

O presente estudo visa atingir duas finalidades principais:

- . uma prática, atendendo à necessidade de desenvolvimento de ferramentas adequadas para o problema da previsão da distribuição de viagens;
- . outra teórica, atendendo à necessidade de esclarecimento sobre a noção de Entropia, recentemente introduzida na Análise de Redes de Transportes.

Este trabalho de pesquisa sobre os modelos entrópicos de distribuição de viagens, abrange: a identificação das situações em que eles podem ser utilizados; a caracterização da solução através da Teoria da Dualidade da Programação Geométrica e da Análise de Convexidade; a interpretação da solução em termos de utilidade global e de acessibilidade global da rede de transportes; um estudo de existência de soluções e análise da sensibilidade da solução e a avaliação das possíveis extensões destes modelos, considerando principalmente o caso de uma análise de distribuição multimodal.

RÉSUMÉ

Le travail présenté cherche à atteindre DEUX OBJECTIFS PRINCIPAUX:

- . l'un pratique, répondant à la nécessité de développer des outils adéquats pour le problème de prévision de la distribution des voyages;
- . l'autre théorique, répondant au besoin d'éclaircissement de la notion d'Entropie récemment introduite dans l'Analyse des Réseaux de Transport.

Cette recherche, axée sur les modèles entropiques de distribution de voyages couvre les aspects suivants:

- identification des cas où ils s'appliquent;
- caractérisation de la solution à l'aide de la Théorie de la Dualité de la Programmation Géométrique et de l'Analyse de Convexité;
- interprétation de la solution à l'aide de l'utilité globale et de l'accessibilité globale du réseau;
- conditions d'existence de solutions et analyse de sensibilité des solutions;
- extensions possibles de ces modèles; principalement dans le cas de plusieurs modes de transport.

ABSTRACT

The study has two principal objectives: one practical, fulfilling a need for the development of new tools for the prediction of trip distribution; the other theoretical, contributing further understanding to the concept of entropy as used in modelling of transportation networks.

The work addresses itself to five aspects of the application of Entropy models.

- i. identifying the cases to which the models could be applied.
- ii. presentation of the Duality Theory of Geometric Programming and the Analysis of Convexity as solution methods.
- iii. interpretation of the solution in terms of global utility and global accessibility within the network.
- iv. a study of the determination of solutions and a sensitivity analysis.
- v. discussion of the possibilities of extending the models, particularly for the multi-modal applications.

Í N D I C E

	Pág.
INTRODUÇÃO GERAL	1
CAPÍTULO I - <u>CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O PLANEJAMENTO DE</u> <u>TRANSPORTES</u>	
I.1. INTRODUÇÃO.....	5
I.2. AS FASES DO PROCESSO DE PLANEJAMENTO.....	6
I.3. A PREVISÃO DA DEMANDA.....	12
I.3.1. Abordagens Mais Utilizadas.....	14
I.3.2. Estrutura Básica do Modelo Clássico de Trans- portes Urbanos.....	15
I.3.3. Geração de Viagens.....	18
I.3.4. Distribuição de Viagens.....	20
I.3.5. Repartição Modal.....	21
I.3.6. Alocação de Tráfego.....	23
I.4. ESTUDO PARTICULAR DE ALGUNS MODELOS.....	24
I.4.1. Modelo Agregado Seqüencial.....	25
I.4.2. Modelo Agregado Direto.....	38
I.4.3. Modelo Desagregado Seqüencial.....	40
I.4.4. Modelo Desagregado Direto.....	43
I.4.5. Modelo Geral de Partilha.....	44

I.5. COMENTÁRIOS GERAIS SOBRE OS MODELOS.....	46
 CAPÍTULO II - <u>MODELOS DE DISTRIBUIÇÃO DE VIAGENS</u>	
II.1. INTRODUÇÃO.....	47
II.2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA.....	49
II.3. MÉTODOS DE SIMULAÇÃO.....	51
II.3.1. Modelo Gravitacional.....	51
II.3.2. Modelos de Oportunidades.....	54
II.3.2.1. Modelo de Oportunidade Interveniente....	55
II.3.2.2. Modelo de Oportunidades Competidoras....	57
II.4. SENSIBILIDADE DA POPULAÇÃO AO CUSTO.....	58
II.5. MODELOS DE OTIMIZAÇÃO.....	62
II.5.1. Acessibilidade e Utilidade de Uma Rede de Transportes.....	63
II.5.2. Teoria da Utilidade e Redes de Transporte....	64
II.5.3. Teoria da Acessibilidade.....	72
II.5.3.1. Índices de Acessibilidade Local.....	73
II.5.3.2. Índices Globais de Acessibilidade.....	78
II.5.4. O Modelo de Hitchcock.....	80
II.5.5. Maximização da Entropia.....	82
II.6. MODELOS COMBINADOS DE DISTRIBUIÇÃO E ALOCAÇÃO DE VIAGENS.....	83

CAPÍTULO III - MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA
DE DISTRIBUIÇÃO DE VIAGENS

III.1. INTRODUÇÃO.....	86
III.1.1. Unicidade da Matriz.....	88
III.1.2. Análise da Forma Funcional Proposta.....	91
III.2. MÉTODOS DE FATORES DE CRESCIMENTO.....	94
III.2.1. Método do Fator Uniforme.....	94
III.2.2. Método do Fator Médio.....	95
III.2.3. Método de Fratar.....	96
III.3. MÉTODO DE NEWTON.....	97
III.4. MÉTODO DE FURNESS.....	99
III.5. CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE FURNESS.....	102
III.6. COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLU ÇÃO.....	109
III.7. UMA INTERPRETAÇÃO DOS MÉTODOS ITERATIVOS DE RE- SOLUÇÃO.....	110

CAPÍTULO IV - DESENVOLVIMENTO E INTERPRETAÇÃO DO MODELO EN-
TRÓPICO RESTRITO

IV.1. INTRODUÇÃO.....	115
IV.2. O MODELO ENTRÓPICO DE DISTRIBUIÇÃO.....	115

IV.3. REFORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA PELA PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA.....	121
IV.4. COMPARAÇÃO COM OUTRA ABORDAGEM.....	126
IV.5. INTERPRETAÇÃO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA.....	128
IV.6. ESTUDO DOS CASOS LIMITES DO MODELO.....	134
CAPÍTULO V - <u>MÉTODOS DE RESOLUÇÃO E ANÁLISE DA SOLUÇÃO DO MODELO ENTRÓPICO RESTRITO</u>	
V.1. INTRODUÇÃO.....	137
V.2. SOLVABILIDADE.....	137
V.3. ALGORITMOS DE RESOLUÇÃO DO MODELO ENTRÓPICO RESTRITO.....	144
V.3.1. Considerações Gerais Sobre a Resolução Numérica do Modelo.....	144
V.3.2. Aplicabilidade do Método Simplex-Convexo à Resolução do Problema Dual Geométrico.....	146
V.3.3. Proposição de Uma Estratégia de Resolução....	153
V.4. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	161
V.4.1. Transformações Invariantes.....	161
V.4.2. Modificação da Distribuição de Probabilidade a Priori	163
V.4.3. Análise de Sensibilidade em Relação aos Outros Parâmetros.....	164

CAPÍTULO VI - EXTENSÕES DO MODELO ENTRÓPICO DE DISTRIBUIÇÃO

VI.1. INTRODUÇÃO.....	169
VI.2. MODELOS ENTRÓPICOS MULTIMODAIS.....	170
VI.2.1. Caso em Que o Planejador Dispõe de Informação (P_1, C_1, S_1)	176
VI.2.2. Caso em Que o Planejador Dispõe da Informação (P_1, C_0, S_1)	179
VI.2.3. Resumo dos Modelos Entrópicos Considerados..	181
VI.3. RESOLUÇÃO DO CASO (P_1, C_0, S_1) PELAS TÉCNICAS DE DECOMPOSIÇÃO DA PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA.....	182
VI.3.1. Decomposição por Modalidade Através da Dualização do Problema de Otimização.....	183
VI.3.2. Decomposição por Modalidade Através da Alocação dos Recursos.....	189
VI.4. MODELOS ENTRÓPICOS COM VÁRIAS CLASSES DE POPULAÇÃO.....	193
VI.5. ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DE VIAGENS COM RESTRIÇÃO DE FROTA.....	195
VI.6. COMENTÁRIOS FINAIS.....	196
CONCLUSÃO GERAL.....	198

ANEXO 1 - PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA

1. INTRODUÇÃO.....	200
2. PROBLEMA BÁSICO.....	200
3. PROBLEMA DUAL.....	202
4. DEGENERACÃO.....	203
5. FORMAS REDUZIDAS.....	204
6. CORRESPONDÊNCIA ENTRE OS PROBLEMAS BÁSICO E DUAL.....	205
7. CONSIDERAÇÕES SOBRE A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DUAL.....	207
8. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO.....	208

ANEXO 2 - PROBABILIDADES A PRIORI E O PRINCÍPIO DA ENTROPIAMÁXIMA

1. INTRODUÇÃO.....	210
2. PRINCÍPIO DA ENTROPIA MÁXIMA.....	211
BIBLIOGRAFIA.....	218

INTRODUÇÃO GERAL

No presente estudo, são apresentados os resultados de um trabalho de pesquisa visando atingir duas finalidades principais:

- uma prática, atendendo à necessidade de desenvolvimento de ferramentas adequadas para o planejamento de transportes, principalmente no que concerne aos problemas da previsão de demanda;
- outra teórica, atendendo à necessidade de esclarecimento sobre a noção de entropia, recentemente introduzida na análise de redes de transportes.

Neste trabalho, foi considerado, especificamente, o problema da previsão da distribuição de viagens entre as várias zonas de uma área (urbana ou regional) em estudo.

Este problema tem sido objeto, nestes últimos anos, de numerosas pesquisas sob vários enfoques, entre os quais a abordagem entrópica tem recebido um destaque maior. O volume e a diversidade dos trabalhos publicados sobre esse tema conduzem à necessidade da elaboração de uma síntese destes resultados, a fim de possibilitar o seu relacionamento com outros conceitos da Análise de Sistemas de Transportes (acessibilidade de uma rede de transportes, sensibilidade de uma população ao custo de transportes...) o que, neste trabalho, pretende-se abordar.

Por outro lado, a "entropia" é uma dessas pala-

vras que possuem, dentro de várias disciplinas da ciência contemporânea, uma posição mítica susceptível de estimular, como foi o caso aqui, trabalhos de pesquisa teórica. SHANNON⁸⁹ mostrou, em 1949, que a noção, até então empírica de entropia dos físicos, podia ser interpretada através da Teoria da Informação, como sendo uma medida da informação. A partir daí, ela apareceu em uma série de disciplinas como a Biologia, Sociologia e Ecologia, até ser utilizada na Geografia (MEDVEDKOV⁶⁸) e na Economia (MARSCHER⁶⁶, MURPHY⁷⁷ e MORA-CAMINO⁷³).

Finalmente, nos últimos anos, o conceito de entropia passou a ter aplicação também na modelagem de sistemas espaciais urbanos e regionais, assim como na previsão da demanda em redes de transporte. Nessas últimas áreas, os modelos de maximização da entropia foram desenvolvidos a partir do trabalho pioneiro de COHEN¹⁹, de 1959, retomado e ampliado por WILSON⁹⁹. Atualmente, o enfoque dos pesquisadores tem-se voltado ao estudo da aplicabilidade da Teoria da Dualidade da Programação Geométrica para a resolução numérica deste tipo de problema, aspecto este também considerado neste trabalho de pesquisa.

No primeiro capítulo, é descrito de maneira sucinta, o "estado da arte" do Planejamento de Transportes, principalmente em relação à previsão da demanda de transportes.

Uma classificação dos modelos de distribuição de viagens é proposta no segundo capítulo, apresentando-se, ainda, as teorias de acessibilidade e utilidade de uma rede de transportes assim como a noção de sensibilidade de uma população ao cus

to de transporte .

Os métodos numéricos de resolução do problema de distribuição de viagens, analisados no capítulo III, são acompanhados de uma interpretação primal-dual em programação geométrica.

No quarto capítulo, é desenvolvida uma abordagem do problema da previsão da distribuição de viagens, levando-se em conta informação a priori sobre esta distribuição e, também, determinadas condições especificadas pelo planejador, conduzindo à formulação do chamado "Modelo Entrópico Restrito". Mostra-se ainda, aqui, a equivalência de diferentes abordagens da resolução do problema pela programação geométrica e, a solução do problema é interpretada, em termos de utilidade e de acessibilidade global da rede de transportes. Ainda nesse mesmo capítulo é introduzido um novo índice de sensibilidade da população ao custo.

Os métodos de resolução e a análise da solução do modelo entrópico restrito constituem o capítulo V. Partindo-se de alguns resultados importantes, são investigadas as condições de existência de soluções e, em seguida, é proposta uma estratégia de resolução do problema. Finalmente, é abordada uma análise de sensibilidade da solução deste problema.

Concluindo o trabalho, são avaliadas no sexto capítulo, algumas extensões do modelo entrópico, para possibilitar a consideração:

- de várias modalidades de transporte;
- de vários níveis sócio-econômicos da população, e
- da existência de limitação de frota.

As técnicas de Decomposição da Programação Matemática são introduzidas para tentar facilitar a resolução de alguns destes modelos.

CAPÍTULO I - CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O PLANEJAMENTO DE TRANSPORTES

I.1. INTRODUÇÃO:

Este capítulo tem por objetivo uma breve apresentação do "estado da arte" do planejamento de transportes urbanos, principalmente no que se refere à previsão da demanda de transportes.

Para estabelecer melhor a posição do problema, objeto deste estudo, ou seja, o problema da análise de distribuição de viagens, dentro do processo geral de planejamento de transportes, é feita inicialmente uma breve exposição de suas várias fases. Em seguida, é analisada com mais detalhes a fase da previsão de demanda, considerando as várias categorias e características dos modelos matemáticos mais conhecidos e utilizados.

O campo de estudo da Análise de Sistemas de Transportes é tão grande e variado que torna-se impossível abordar, de maneira satisfatória, cada um dos seus aspectos. Trata-se de um campo com as seguintes características:

- i) multimodal, isto é, existem vários modos de transporte (ar, terra e mar) tanto para pessoas como para cargas;
- ii) multisetorial, englobando problemas e opiniões do governo, empresa privada e população;
- iii) multiobjetivo, visando ao desenvolvimento urbano e/ou regional, à qualidade do meio ambiente, ao nível de serviço aos usuários, à viabilidade econômica, etc.;
- iv) multidisciplinar, valendo-se de teorias e métodos de en

genharia, economia, pesquisa operacional, ciências sociais e políticas, administração, etc.;

- v) multicontextual, abrangendo o planejamento de transportes urbanos, o planejamento regional de transportes de passageiros, o planejamento nacional de cargas, o transporte internacional, etc. .

Desta forma, as pesquisas mais elaboradas têm-se concentrado em determinados aspectos, considerando determinadas abordagens e utilizando determinadas técnicas.

Neste trabalho, a pesquisa foi concentrada no problema de distribuição de viagens, tendo sido utilizadas várias técnicas como a programação matemática e várias teorias como a teoria econômica e a teoria das probabilidades.

I.2. AS FASES DO PROCESSO DE PLANEJAMENTO:

No processo clássico de planejamento de transportes, podem-se distinguir as seguintes fases:

a) Identificação dos Problemas de Transportes:

Segundo Dickey (1975), os problemas de transporte podem ser classificados em três grupos: problemas dos serviços de transportes, problemas que sofrem a influência dos transportes e problemas que afetam os transportes.

No primeiro grupo, podem ser citados o congestionamento das vias e terminais, a falta de segurança e conforto e

o funcionamento inadequado dos transportes públicos.

No segundo grupo, encontram-se os impactos causados às áreas urbanas e seus habitantes pela operação, melhoramento e construção de novas "facilidades" de transportes.

No terceiro grupo, podem-se destacar o aumento populacional, o aumento do número de veículos particulares, o aumento das atividades urbanas, etc. .

b) Identificação das Metas, Objetivos e Restrições:

Normalmente, as metas para o planejamento são fixadas através do processo político. O papel do planejador será o de analisá-las e transformá-las em objetivos passíveis de serem considerados no processo de planejamento. As restrições podem ser definidas como sendo as características que limitam o alcance das soluções possíveis.

c) Escolha das Variáveis e dos Modelos:

A escolha das variáveis deve satisfazer os critérios de relevância, disponibilidade e confiabilidade. Trata-se de uma tarefa difícil, pois a inclusão de um grande número de variáveis pode tornar o modelo oneroso e demorado e, a exclusão de variáveis relevantes, pode torná-lo irreal. Nesta fase, devem ser decididas quais as variáveis endógenas e quais as exógenas (variáveis externas que, algumas vezes, podem comportar-se como entradas no modelo).

Um modelo deve representar, simplificada^{mente}, uma realidade, portanto, nesta fase de estudo, procura-se escolher aquele que possibilite uma maior percepção das características do problema a ser estudado. Na escolha do modelo deve-se considerar fundamentalmente os objetivos e as restrições do problema.

d) Levantamento de Dados:

Este levantamento deverá ser efetuado da maneira mais adequada à utilização dos modelos anteriormente escolhidos.

A execução do levantamento de dados, após a escolha das variáveis e dos modelos, proporciona economia de tempo e de recursos, pois serão coletados somente os dados julgados relevantes.

Esta fase compreende a delimitação da área de estudo, o zoneamento, a pesquisa de campo e a preparação dos dados para utilização posterior.

e) Determinação dos Padrões de Uso do Solo e de Demanda de Transportes Atuais e Futuros:

A determinação do uso do solo para o ano de projecto é de suma importância, face ao seu papel fundamental na previsão de distribuição de viagens.. O uso do solo está diretamente ligado ao número de viagens produzidas e atraídas por uma zona.

Aqui estão algumas das possibilidades para o estabelecimento do uso do solo (ROBERTS⁸⁷):

"Se o uso do solo pode ser efetivamente controlado, então decide-se qual poderá ser o seu uso no ano-projeto, e isto é estabelecido como uma meta a ser atingida....."

"Se o uso do solo é visto como uma decisão agregada de várias decisões individuais e fora do controle de qualquer autoridade de planejamento, então o seu uso para o ano-projeto deverá ser "previsto" (estimado)....."

"Poderá ser adotada uma combinação destas duas possibilidades"

Existe uma forte interdependência entre o uso do solo e o sistema de transportes. A organização espacial do uso do solo determina e, ao mesmo tempo, é determinada pelas características do sistema de transportes (BERECHMAN⁶).

Dentre os modelos que consideram esta interdependência, destacam-se os modelos integrados, cuja estrutura compreende: um modelo de alocação de atividades, um modelo de transporte e um procedimento, ligando os dois de forma que a saída de um sirva como entrada do outro. Estes modelos foram abordados por PUTMAN⁸⁵, BONZINI¹⁰ e BERECHMAN⁶, entre outros.

A previsão da demanda por transportes será enfocada posteriormente de modo mais abrangente.

f) Elaboração e Avaliação de Planos Alternativos:

As soluções encontradas através dos modelos utilizados na fase anterior deverão ser elaboradas de modo a melhorar o desempenho do sistema atual ou providenciar a construção de novas alternativas. Estas são então avaliadas, escolhendo-se, em seguida, a que proporciona os melhores resultados, de acordo com os critérios previamente estabelecidos e com as limitações financeiras.

Dentre os vários estudos desenvolvidos para a análise e avaliação do sistema de transportes, podemos destacar os seguintes (ORSKI⁸²):

- análise de custos e benefícios
- acessibilidade para oportunidades
- efeitos causados no meio ambiente
- qualidade do serviço oferecido
- análise de custos energéticos

Alguns autores simplesmente separam os critérios de avaliação de alternativas entre:

- a) análise de custos e benefícios, usada no caso das saídas poderem ser avaliadas em termos monetários;
- b) análise de custo e eficácia (ou efetividade), usada quando as saídas não podem ser medidas em termos monetários, isto é, para saídas tais como: mudança nos hábitos da população, alterações no meio ambiente, etc. .

Para WILLIAMS⁹⁶, é necessário existir uma consistência entre os modelos de demanda e os métodos de avaliação. Esta necessidade torna-se óbvia se considerarmos que a função dos modelos de demanda é relacionar as mudanças no comportamento de viagem com as modificações no custo do deslocamento, e que a medida usualmente adotada para qualificar o benefício obtido é a mudança no excedente do usuário.

g) Implementação da Alternativa Escolhida:

A fase de implementação requer um tempo, às vezes bastante longo, se são levados em conta os impactos provocados tanto em relação à população e seu meio ambiente como em relação às organizações (públicas ou privadas) ligadas a transportes.

Como qualquer sistema social complexo tende a reagir contra mudanças, tentando preservar hábitos práticos e políticas antigas, a implementação de qualquer mudança importante exige uma preparação estratégica gradual e cuidadosa.

Como o processo de decisão não está nas mãos do planejador, a este cabe apenas sugerir as formas mais eficazes para a implementação, observando os seguintes fatores:

- reconhecimento da natureza política das recomendações;
- identificação dos custos e benefícios diretos e indiretos para os vários grupos comunitários;
- interrelação entre o planejamento de transportes e o de-

envolvimento de planos e atividades em outros setores urbanos

I.3. A PREVISÃO DA DEMANDA:

O problema da previsão de fluxos em um sistema de transporte pode ser visto como uma simples aplicação da teoria econômica (MANHEIM⁶⁴): os fluxos resultantes de um sistema particular de transportes T e o padrão de atividades econômicas A podem ser determinados, encontrando-se o equilíbrio através de estabelecimento da função de oferta S e da função de demanda D e pela resolução de equilíbrio, da seguinte maneira:

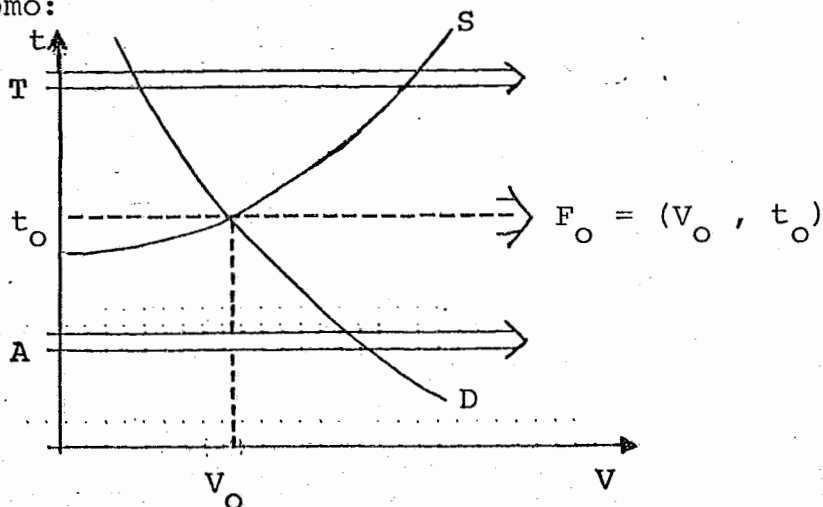
$$\begin{bmatrix} L = S(V, T) \\ V = D(L, A) \end{bmatrix} \rightarrow [F_o = (V_o, L_o)]$$

onde: V = volume de tráfego

L = nível de serviço oferecido para este volume

$F = (V, L)$ = padrão de fluxo

Considerando o tempo de viagem t como indicador do nível de serviço, pode-se representar graficamente esta teoria básica como:



Apesar de simples na teoria, a sua aplicação prática torna-se complexa por várias razões:

- a) o usuário considera vários atributos do sistema quando faz a escolha e, assim, o vetor L tem vários componentes;
- b) a dificuldade na determinação das funções de demanda;
- c) o equilíbrio ocorre em uma rede, onde os fluxos de várias origens para vários destinos interagem e competem, e estas interações são afetadas pela topologia da rede. Portanto, a visão agregada é pouco útil.

Assim, são requeridos esquemas computacionais convenientemente elaborados para determinar os fluxos de equilíbrio F_0 para um particular (T,A) .

No caso de uma rede multimodal, o símbolo V representa um arranjo de volumes

$$V = \{V_{klmp}\}$$

para cada k, l, m e p , onde V_{klmp} é o volume de fluxo da origem k para o destino l pelo modo m no caminho p .

Então, depois de estabelecidas as funções de oferta e demanda, o cálculo do equilíbrio de fluxo F_0 envolve um procedimento de resolução de dois arranjos:

$$V_0 = \{V_{klmp}\} \text{ para cada } k, l, m \text{ e } p$$

$$L_0 = \{L_{klmp}\} \text{ para cada } k, l, m \text{ e } p$$

com $F_o = (V_o, L_o)$

Infelizmente, não há um modelo operacional que possa resolver este tipo de problema de forma exata e direta, a pesar dos vários modelos de sistemas de transportes existentes até agora. Cada um dos sistemas de modelos disponíveis representa uma abordagem diferente para o cálculo do equilíbrio de fluxos na rede de transportes e as diferenças são refletidas tanto nos algoritmos computacionais como na própria estrutura dos modelos de demanda utilizados.

I.3.1. Abordagens Mais Utilizadas:

Uma classificação geral, abrangendo as várias abordagens utilizadas na previsão da demanda, pode ser a seguinte (CEMT¹⁵):

- a) Modelos Agregados: seqüenciais ou diretos, determinísticos ou probabilísticos;
- b) Modelos Desagregados: seqüenciais ou diretos, determinísticos ou probabilísticos.

Os modelos desagregados consideram o comportamento do usuário para a escolha de viagem de forma individual, enquanto que os agregados consideram o comportamento de um grupo de indivíduos.

Para a previsão da demanda de viagens, é fundamental o estudo da teoria do comportamento do usuário (DOMENCICH²⁷)

em relação às decisões de viagens. Um modelo de comportamento do usuário deve indicar quais as alternativas percebidas pelo indivíduo, que consequências ele considera importantes e como sua escolha é feita entre as alternativas percebidas. Estes modelos podem descrever o comportamento de um indivíduo ou de um grupo e, geralmente, utilizam a função utilidade ou os indicadores de acessibilidade para a descrição deste comportamento.

Tanto os modelos agregados como os desagregados podem ser do tipo seqüencial ou do tipo direto. Os modelos seqüenciais (indiretos) são também conhecidos como "modelos a quatro etapas" e neles os fluxos de equilíbrio são estimados seqüencialmente a partir de quatro submodelos: geração de viagens, distribuição, repartição modal e alocação. Nos modelos de demanda direta, as funções de geração, distribuição e repartição modal são combinadas em uma única etapa (OCDE⁸¹).

Os modelos ainda podem ser classificados como determinísticos ou probabilísticos, conforme a escolha do usuário seja feita racionalmente a partir de informação perfeita ou a partir de elementos probabilísticos.

I.3.2. Estrutura Básica do Modelo Clássico de Transportes

Urbanos:

Este modelo é do tipo agregado seqüencial e representa a primeira utilização dos métodos de análise de sistemas de grande porte em transportes (MANHEIM⁶³).

O conjunto de escolhas do usuário considerado neste modelo inclui:

- escolha da localização da residência;
- escolha do local de emprego;
- carro próprio;
- escolha de viagens para várias atividades, envolvendo: frequência das viagens (f), destino (d), modo (m), rota (r) e hora do dia (h).

Geralmente, f é considerado como o número de viagens por dia, mas algumas vezes pode ser tomado como o número de viagens por período de pico.

As escolhas de localização são supostas como feitas previamente e, freqüentemente, de forma independente dos níveis de serviço de transporte.

Dentro do nível de escolha de viagens, o modelo tem uma estrutura seqüencial do tipo onde, inicialmente, são previstas as freqüências como função principalmente da renda; depois é feita a escolha do destino, seguida pela escolha modal e pelo caminho. A hora do dia geralmente é prevista depois, aplicando um fator "hora de pico" às viagens diárias.

O modelo pode ser descrito da seguinte forma:

Os indivíduos são agrupados primeiramente com base na divisão da região estudada em zonas de tráfego (k). Em se-

guida, um grupo de indivíduos ou famílias com comportamento similar de viagem, originário da zona k é indicado por um índice (e). Então, o volume total de viagens feitas pelo indivíduo e da origem k para o destino d , pelo modo m e rota r é dado por:

$$V_{kdmr}^e = f^e(A, S)$$

onde A e S são as variáveis que descrevem os sistemas de atividades e de serviços.

A função demanda é composta de quatro componentes:

$$V_{kdmr}^e = g_1^e(A, S) g_2^e(A, S) g_3^e(A, S) g_4^e(A, S)$$

onde g_1 representa o sub-modelo de geração de viagens, g_2 o sub-modelo de distribuição, g_3 o de repartição modal e g_4 o de escolha da rota ou alocação na rede.

Decompondo a função de demanda em quatro submodelos, é possível estudar a previsão das viagens futuras em uma seqüência de quatro etapas:

1) Geração de Viagens

V_k^e = volume total de viagens geradas na zona k
pelo grupo $e = g_1^e(A, S)$.

2) Distribuição de Viagens

V_{kd}^e = volume total de viagens da zona k para a

$$\text{zona } d \text{ pelo grupo } e = g_2^e(A, S) V_k^e .$$

3) Repartição Modal

$$\begin{aligned} V_{kdm}^e &= \text{volume total de viagens pelo modo } m \text{ da zona } k \\ &\text{ para a zona } d \text{ pelo grupo } e = \\ &= g_3^e(A, S) V_{kd}^e \end{aligned}$$

4) Alocação na Rede

$$\begin{aligned} V_{kdmr}^e &= \text{volume total de viagens pela rota } r \text{ e modo } m, \\ &\text{ da zona } k \text{ para a zona } d \text{ pelo grupo } e = \\ &= g_4^e(A, S) V_{kdm}^e . \end{aligned}$$

Analisar-se-á, a seguir, cada uma das quatro etapas, de forma independente, citando os principais modelos aplicados a cada uma delas.

I.3.3. Geração de Viagens:

Nesta primeira etapa, procura-se determinar o número futuro de geração de tráfego de cada zona através das relações observadas entre as características das viagens e os dados sobre as atividades sócio-econômicas da população.

Um aspecto importante nesta etapa é a noção dos termos produção de viagens e atração de viagens. De uma maneira geral, considera-se que uma zona residencial é potencialmente produtora de viagens enquanto que as zonas com muitas escolas, oportunidades de emprego, etc. são potencialmente pólos atrativos de viagens.

O procedimento usual para estimar os níveis futuros de geração de viagens, compreende os seguintes passos:

- a) determinação do número atual de viagens geradas (produzidas e atraídas) por cada zona;
- b) identificação dos tipos de viagens importantes para a área de estudo;
- c) escolha das variáveis significativas e determinação dos modelos aceitáveis;
- d) avaliação dos modelos escolhidos;
- e) determinação dos níveis futuros de geração por zona.

Entre os modelos mais utilizados estão: os métodos de fator de crescimento, a análise de regressão linear múltipla e a análise de categorias.

Os métodos de fator de crescimento devem ser encarados com restrições porque, em locais onde são realizadas grandes modificações nos sistemas de transporte, a estrutura da demanda é profundamente alterada. Não há possibilidade de se determinar o número de viagens geradas no futuro pela simples aplicação do fator de crescimento aos dados atuais (MELLO⁶⁹).

Nos modelos de regressão, tenta-se relacionar a procura por transportes e variáveis explicativas desta demanda, que podem variar de uma zona para outra e, também, podem ser afetadas, no futuro, pelas modificações ocorridas no sistema de transportes. Estes modelos não consideram o custo de transpor-

te nem a acessibilidade das diferentes zonas.

O modelo de análise de categorias foi desenvolvido na segunda fase do "Estudo de Tráfego de Londres" (London Traffic Survey) , partindo da técnica de análise de classificação cruzada que foi originalmente desenvolvida no "Puget Sound Regional Transportation Study" (1964). O modelo foi baseado na suposição de que as taxas de geração de viagens para diferentes categorias familiares permanecem constantes no futuro (BRUTON¹²).

Um modelo mais elaborado foi proposto por Kanafani, supondo implicitamente que um grupo de pessoas com características sócio-econômicas análogas tem o mesmo comportamento em relação à geração de deslocamentos (CEMT¹⁵).

Os modelos de Kanafani e de análises de categorias serão mais detalhados no ítem referente ao estudo de alguns modelos.

I.3.4. Distribuição de Viagens:

O problema da previsão de distribuição de viagens consiste em determinar o número de viagens inter ou intrazonais, a partir da estimativa do número de viagens produzidas e atraídas por cada zona (POTTS⁸³).

Os métodos utilizados para esta etapa estão em constante evolução e podem ser encontrados na literatura, desde os modelos mais simples usando os fatores multiplicativos, até

modelos de grande elaboração matemática.

De uma maneira geral, podem-se agrupar os modelos em dois grandes grupos:

- a) modelos de simulação que compreendem os métodos de fatores de crescimento (método do fator uniforme, método do fator médio, método de Detroit, método de Fratar, método de Furness, etc.) e os métodos explicativos (modelo gravitacional, modelo de oportunidades intervenientes, modelos de oportunidades competitivas, etc.) ;
- b) modelos de otimização tais como: modelo de Hitchcock, modelo entrópico, maximização da utilidade, etc. .

O estudo do problema da distribuição de viagens com uma análise detalhada de seus principais modelos matemáticos será desenvolvido em capítulos específicos neste trabalho.

I.3.5. Repartição Modal:

Nesta etapa, estuda-se a divisão do total de viagens realizadas entre os diferentes modos de transportes.

Existem basicamente dois grupos de modelos utilizados nesta repartição por modos:

- a) modelos anteriores à distribuição de viagens (modelos de pré-distribuição);
- b) modelos posteriores à distribuição de viagens (modelos

de pós-distribuição).

Os modelos anteriores à distribuição alocam o total de deslocamento de pessoas antes da etapa de distribuição de viagens. Estes modelos são também chamados de modelos de repartição modal de extremos de viagens.

No processo de geração de viagens, são previstos os totais de produção e atração de viagens. Certas proporções do número previsto de viagens produzidas são alocadas aos modos de transporte considerados e, em seguida, são utilizados os modelos de distribuição e de alocação de viagens, separadamente, para cada modo de deslocamento.

A suposição básica destes modelos é de que o usuário é relativamente insensível às características de serviço das modalidades de transporte, e a determinação do modo de viagem está relacionada às características sócio-econômicas dos usuários.

As técnicas mais utilizadas nestes modelos são a análise de regressão linear múltipla e a análise de categorias.

Considerando-se apenas dois modos: "transporte coletivo" e "transporte particular", inicialmente, as viagens são alocadas para transporte público e, em seguida, o número de viagens produzidas por transporte particular é obtido pela subtração do número total de viagens produzidas.

Os modelos posteriores à distribuição, também chamados de modelos de repartição modal de intercâmbio de viagens, alocam o total de deslocamentos das pessoas aos modos, após a distribuição destes deslocamentos entre as zonas de origem e de destino.

Nestes modelos supõe-se que a proporção de viagens absorvida por um modo depende do nível de serviço oferecido por cada modo.

Para modelos deste segundo tipo, são utilizadas freqüentemente as curvas de repartição que permitem ligar a porcentagem de deslocamentos efetuados por transporte público à relação do tempo de percurso por transporte público e por transporte particular.

Ambos os modelos são criticáveis por não refletirem adequadamente a reação dos usuários à mudança nas características dos sistemas de transportes e por possuírem uma tendência pró-automóvel.

I.3.6. Alocação de Tráfego:

Os vários métodos usados na alocação do tráfego estabelecem, inicialmente, um critério de seleção de rotas, em seguida, constrói-se um algoritmo que seleciona as rotas nas malhas dadas como entrada e, finalmente, as viagens interzonais são alocadas nas malhas selecionadas (ARRUDA²).

Na resolução do problema, os critérios mais utilizados para a escolha dos caminhos usados são o tempo e o custo de viagem.

Wardrop propôs, em 1952, dois critérios para a seleção de rotas, tomando o tempo de viagem como medida de impedância (POTTS⁸³):

- a) os tempos de viagem em todas as rotas utilizadas entre um determinado par de origem-destino são iguais entre si e menores do que o tempo de viagem, que seria experimentado por um único veículo tomando qualquer rota não utilizada;
- b) o tempo médio de viagem por todos os motoristas é mínimo.

Entre os vários métodos de alocação, os mais simples são os métodos que alocam as viagens à rota que representa o caminho mínimo entre a origem e o destino, como por exemplo, os métodos "tudo ou nada" e "com restrição de capacidade". No método "tudo ou nada" os fluxos são alocados à rota de caminho mínimo, sem se considerar se ela terá, ou não, capacidade de absorvê-los; enquanto que nos métodos "com restrição de capacidade", procura-se obter uma compatibilidade entre o volume de veículos que utilizam uma rota e o tempo ou custo de viagem. Os modelos de alocação mais elaborados utilizam a possibilidade de itinerários múltiplos.

I.4. ESTUDO PARTICULAR DE ALGUNS MODELOS:

Neste ítem, serão apresentados alguns tipos de

modelos, tomando por base as abordagens citadas anteriormente.

Inicialmente, será estudado o modelo agregado seqüencial, considerando cada uma das suas etapas separadamente. Para a geração de viagens, será apresentada a técnica de análise de categoria e o modelo de Kanafani. A etapa correspondente à distribuição de viagens não será cogitada neste ítem, por constituir um capítulo à parte. Alguns modelos probabilísticos e o modelo de Adams, exemplificarão a repartição modal enquanto que, para a alocação, será apresentada a técnica de obtenção do caminho mínimo através dos algoritmos de Dijkstra e de Floyd.

Como exemplo de modelo agregado direto, serão dadas as fórmulas gerais utilizadas nos modelos com escolha de modo específico, com escolha de modo abstrato e com repartição modal.

Para os modelos do tipo desagregado seqüencial, foi tomada, como exemplo, a cadeia de modelos do CRA (Charles River Associates).

O modelo de Ben Akiva será apresentado como exemplo do tipo desagregado direto.

Finalmente, será apresentado o modelo de Manheim, que pode ser utilizado tanto na forma direta como na seqüencial.

I.4.1. Modelo Agregado Seqüencial:

i) Geração de Viagens

i.1. Análise de Categorias (WILSON⁹⁹)

A produção de viagens é estimada em função das características da família e a atração em função da atividade econômica.

Considerando:

n = índice indicativo do tipo de pessoa;

h = índice indicativo do tipo de família;

$T(h)$ = número médio de viagens feitas por determinado motivo, em determinado período de tempo, pela família do tipo h ;

$a_i(h)$ = número de famílias do tipo h , na zona i ;

$H(n)$ = conjunto de famílias h , contendo pessoas do tipo n ;

O_i^n = número de viagens produzidas na zona i , por pessoas do tipo n ;

temos

$$O_i^n = \sum_{h \in H(n)} a_i(h) T(h)$$

No modelo apresentado por Wootton e Pick, foram utilizadas 108 categorias empregando três tipos de pessoas (sem carro próprio, com um carro próprio e com mais de um carro próprio), seis níveis de estrutura familiar (tamanho da família e número de trabalhadores) e seis grupos de renda familiar.

As famílias foram alocadas nas respectivas categorias através da definição de um certo número de distribuições probabilísticas.

A probabilidade de que uma família tenha a renda x é dada por:

$$\phi(x) = \frac{\alpha^{n+1}}{\Gamma(n+1)} x^n e^{-\alpha x}$$

onde os parâmetros α e n são dados por:

$$\alpha = \bar{x}/\sigma^2$$

$$n = \alpha\bar{x} - 1$$

e ainda:

Γ é a função gama

\bar{x} é a média de distribuição

σ^2 é a variância

Considerando g como sendo a taxa de crescimento anual de renda, depois de y anos, \bar{x} é dado por:

$$\bar{x}_{\text{novo}} = \bar{x}(1+g)^y$$

e assumindo que n permanece inalterado, obtém-se o novo valor de α .

Para a estimativa do uso do carro próprio, define-se $P(n/x)$ como sendo a probabilidade de uma família ter n carros, dado que sua renda é x . Então $P(n)$ representa a probabilidade de uma família possuir n carros:

$$P(n) = \int_0^{\infty} P(n/x) \phi(x) dx$$

Considerando i como o aumento anual no preço dos carros, tem-se:

$$\bar{x}_{\text{novo}} = \bar{x}(1+g-i)^Y$$

A distribuição de Poisson é utilizada para a distribuição relativa ao tamanho da família:

$$p(1), p(2), p(>2) = 1 - p(1) - p(2)$$

A distribuição de trabalhadores por família é suposta binominal, com

$$E(0) = \left(1 - \frac{R}{N}\right)^N \quad e$$

$$E(1) = R \left(1 - \frac{R}{N}\right)^{N-1}$$

representando a probabilidade de 0 ou 1 trabalhador por família, onde R é um valor médio e N um parâmetro. Então:

$$E(>1) = 1 - E(0) - E(1)$$

A probabilidade de uma família pertencer ao nível de estrutura ρ é dada por $f(\rho)$, sendo:

$$f(1) = p(1) \cdot E(0) \quad (1 \text{ membro não trabalhador})$$

$$f(2) = [1 - p(1)] E(0) \quad (2 \text{ membros não trabalhadores})$$

$$f(3) = [p(1) + p(2)] E(1) \quad (3 \text{ membros, 1 trabalhador})$$

⋮
⋮
⋮

A distribuição de probabilidade conjunta $\Phi(I, n, \rho)$, considerando os limites superiores e inferiores a_{I+1} e a_I para o grupo de renda I, fica sendo:

$$\Phi(I, n, \rho) = f(\rho) \int_{a_I}^{a_{I+1}} [\bar{P}(n/x)] \phi(x) dx$$

Com esta equação, obtém-se $a_i(h)$, ou seja, o número de famílias da categoria h na zona i .

Pode-se obter o número de viagens atraídas, através de um procedimento similar e chega-se a:

$$D_j = \sum_1 b_j(1) t(1)$$

onde: D_j é o número de viagens atraídas para j ;

$b_j(1)$ é o nível de atividade 1 na zona j; e

$t(1)$ é a taxa de atração de viagens por unidade.

i.2. Modelo de Kanafani (CEMT¹⁵)

A relação, entre a geração de deslocamentos de u ma família e as características desta família, pode ser escrita sob a forma de uma densidade de probabilidade, função do número médio de deslocamentos diários gerados pela família S:

$$P(\bar{y}/x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi(\bar{y}, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

onde P é a probabilidade condicional de se fazer \bar{y} deslocamentos

por dia, sendo dadas as n variáveis explicativas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ que descrevem a família.

A função ϕ é constante no tempo, mas pode ter uma forma diferente segundo os motivos. A probabilidade condicional P pode ser estendida a um grupo de famílias que possuem características similares.

Define-se uma função de densidade combinada destas variáveis: $b(x_1, x_2, \dots, x_n)$, exprimindo a relação de dependência entre elas.

Integrando, para cada uma das variáveis, chega-se a:

$$P(y) = \int_{x_1} \int_{x_2} \dots \int_{x_n} \phi(y, x_1, x_2, \dots, x_n) b(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1, dx_2, \dots, dx_n$$

O número T de deslocamentos em uma zona é tal que sua esperança matemática é:

$$E(T) = N E(y)$$

onde N é o número total de famílias da zona.

A variância de T é:

$$\text{Var}(T) = N^2 \left[\sum_Y y^2 P(y) - \left(\sum_Y y P(y) \right)^2 \right]$$

A função de distribuição de uma variável aleatória é descrita por alguns parâmetros. O modelo de geração torna-se uma função destes parâmetros e dos coeficientes de correlação entre as variáveis x_1, x_2, \dots, x_n .

ii) Repartição Modal

Um modelo simples de repartição modal é o baseado na atratividade do modo de transporte (MELLO⁶⁹).

A probabilidade (P_i) do usuário escolher determinado meio de transporte, é dada por:

$$P_i = \frac{A_i}{\sum_{x=1}^n A_x}, \text{ com } A_i = K \cdot f(u)$$

onde: A_i = atratividade do modo i ;

A_x = atratividade do modo x ;

n = número de maneiras alternativas de realizar uma viagem;

K = coeficiente numérico ajustado em função dos padrões do modo i : conforto, segurança, qualidade do serviço, etc. ;

$f(u)$ = função do custo ou tempo de viagem pelo modo i .

Um modelo mais elaborado é o de Adams (MARTIN⁶⁷), que foi desenvolvido com dados de 16 cidades norte-americanas

com o objetivo de repartir o tráfego entre automóveis e transportes coletivos, conduzindo à relação:

$$y = A + b_1 \log P + b_2 \log E + b_3 \log T + b_4 \log U + b_5 \log M$$

onde A, b_1, b_2, b_3, b_4 e b_5 são constantes empíricas ;

y = percentual total de viagens realizadas por transportes coletivos;

P = população com idade acima de 5 anos na área estudada;

T = fator de serviço do transporte coletivo;

E = fator econômico;

U = fator de distribuição do uso do solo;

M = área urbanizada, em milhas quadradas.

Cada fator é obtido a partir de um conjunto de variáveis adicionais, como está resumido a seguir:

Fator de serviço de transporte coletivo

$$T = \frac{V}{P^{1,5} M^{0,25}}$$

onde V = rendimentos obtidos por veículo-milha por dia

P e M como definidos anteriormente

Fator econômico

$$E = \left(\frac{P}{e}\right)^{3.5} \left(\frac{h}{e}\right)^{1.5} \left(\frac{h}{a}\right)^{1.5} \left(\frac{P}{a}\right)$$

onde h = unidades residenciais;

e = viagens para o trabalho por dia;

a = carros particulares;

P = população definida anteriormente.

Fator de distribuição do uso do solo

$$U = (r_1) (r_4) (r_s)$$

onde

$$r_1 = 1 - \frac{R_p}{R_u}, \text{ sendo}$$

R_p = distância média da população ao centro da cidade;

R_u = distância média da área urbanizada ao centro da cidade;

$$r_4 = \frac{1}{R_{tc}}, \text{ sendo}$$

R_{tc} = distância média das áreas industriais e comerciais ao centro da cidade;

$$r_s = \frac{A_{lc} R_{lc}}{A_{tc} R_{tc}}, \text{ sendo}$$

A_{tc} = área comercial e industrial total, em milhas quadradas;

A_{1c} = idem, dentro do raio de uma milha do centro;

R_{1c} = idem ao R_{tc} , porém dentro de um raio de uma milha do centro.

Dentre os modelos probabilísticos de repartição modal, os mais utilizados são os baseados em análise discriminante, análise "logit" e análise "probit" (TALVITIE⁹²).

O modelo "logit", para o caso de uma situação de escolha binária (a escolha do automóvel = 1 e a do transporte coletivo = 0) tem a seguinte expressão:

$$\Pr(M = 1/ij) = \frac{e^y}{1 + e^y}$$

e analogamente

$$\Pr(M = 0/ij) = 1 - \Pr(M = 1/ij) = \frac{1}{1 + e^y}$$

onde $\Pr(M/ij)$ = a probabilidade de um indivíduo usar o modo M, dado que ele realiza uma viagem entre as zonas i e j ; e

y = índice que determina a que grupo (automóvel ou transporte coletivo) um indivíduo provavelmente pertence. Este índice é determinado através da equação:

$$y = a + b (L_{ij}^{M1} - L_{ij}^{M2}) + c (SE)$$

com a , b e c = coeficientes que deverão ser estimados;

L_{ij}^M = nível de serviço oferecido entre as zonas i e j pelo modo M ;

SE = características do usuário.

Para o modelo "probit", a mesma função y é utilizada, sendo que, se para um certo indivíduo $y \geq y_{crit}$, então $M = 1$ e se $y \leq y_{crit}$, então $M = 0$, com a hipótese de que y_{crit} é distribuído normalmente pela população. A probabilidade de que M será igual a 1 é dada por:

$$\Pr(M = 1/ij) = \Pr(y_{crit} \geq y/ij) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{\infty} e^{-(t^2)/2} dt$$

e analogamente

$$\Pr(M = 0/ij) = 1 - \Pr(M = 1/ij) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-(t^2)/2} dt$$

Na análise discriminante, não existem variáveis dependentes. O objetivo é encontrar uma combinação linear de variáveis explicativas de forma que as suas distribuições, para os dois grupos de viajantes, possuam muito pouca superposição. Aqui também é feita a hipótese de distribuição normal para y e a expressão para estimar a probabilidade de escolha modal (situação binária) é:

$$\Pr(M = 1/ij) = \frac{e^{y + \ln.(p/q)}}{1 + e^{y + \ln.(p/q)}}$$

e analogamente

$$\Pr(M = 0/ij) = \frac{1}{1 + e^y + \ln.(p/q)}$$

onde p e q são as probabilidades "a priori" de pertencer ao grupo 1 e 0, respectivamente.

iii) Alocação de Tráfego

A maior parte dos modelos de alocação são baseados na teoria dos grafos e seus diferentes algoritmos (CEMT¹⁵).

Uma rede de transportes é composta de nós correspondentes ao centro de cada zona e de arcos representando cada um dos itinerários possíveis. Cada arco é ponderado de acordo com a impedância oferecida. Aplica-se, em seguida, um algoritmo de determinação do caminho mais curto, para determinar o caminho ótimo entre dois nós.

Existe um grande número de algoritmos desenvolvidos para a determinação de caminhos mínimos em redes.

Entre estes algoritmos destacam-se o algoritmo de Dijkstra e o algoritmo de Floyd (BOAVENTURA⁹).

iii.1. Algoritmo de Dijkstra

O algoritmo de Dijkstra fixa, a cada iteração, o caminho mínimo que termina em um vértice.

Um vértice x_i é considerado "fechado" se já foi obtido um caminho $u(x_1, x_i)$ de custo mínimo e, "aberto", em caso contrário. Em cada iteração, o último vértice fechado é usado como base para a busca de novos caminhos.

Etapas:

- a) inicialização: atribui-se ao custo zero à raiz e infinito aos demais vértices;
- b) fecha-se o vértice (ainda aberto) que tiver menor custo;
- c) compara-se o custo de cada vértice aberto com a soma do custo do último vértice fechado e do custo do arco que une estes vértices. Se o custo obtido pela soma for menor, faz-se a substituição (se o arco não existir, o custo será infinito);
- d) repetem-se os passos b e c até que o passo b tenha sido executado n vezes.

Se x_1 é a raiz e o vértice x_j foi fechada na $(k-1)$ ésima iteração teremos:

$$d_{li}^k = \min_{x_i \in A_k} \left[d_{li}^{k-1}, (d_{lj} + d_{ji}) \right]$$

onde os d_{li}^0 são os custos iniciais atribuídos aos vértices e A_k é o conjunto de vértices ainda abertos na k -ésima iteração.

A eficiência deste algoritmo é bastante elevada para o caso de arcos com valores positivos.

iii.2. Algoritmo de Floyd

Trata-se de um algoritmo matricial, que aceita valores negativos para os arcos, mas a possibilidade da presença de circuitos absorventes exige precaução na avaliação dos resultados.

O algoritmo consistê em, partindo-se de uma matriz D^0 de custos dos arcos (na qual são indicados custos infinitos para os arcos não existentes e custos nulos para os laços), construir sucessivamente n matrizes, através de modificações efetuadas de acordo com a seguinte expressão:

$$d_{ij}^k = \min \left[d_{ij}^{k-1}, (d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}) \right]$$

onde são varridos nesta ordem, i , j e k .

I.4.2. Modelo Agregado Direto:

i). Modelos com escolha de modo específico: São os que consideram os modos de transporte existentes e necessitam de um bom levantamento de dados. O modelo de Kraft (Sarc Northeast Corridor) foi o primeiro exemplo deste tipo de modelo, datando de 1963 (DOMENCICH²⁷).

A fórmula geral é dada por:

$$T_{ijk}^n = f_n^k(L_{ijk}, S_i, S_j, A_i, A_j)$$

onde:

a forma da equação f_n^k depende do modo k ,

T_{ijk}^n representa o volume de tráfego entre i e j pelo modo k e motivo n ;

L_{ijk} representa o nível de serviço de cada um dos k modos existentes entre i e j ;

S_i, S_j são variáveis sócio-econômicas;

A_i, A_j são as variáveis de atividade.

ii) Modelos com escolha de modo "abstrato" (CEMT¹⁵, WILSON⁹⁹) :

São modelos que facilitam a introdução de novas modalidades de transporte, por considerarem modos definidos unicamente em termos de característica de serviço. O primeiro destes modelos foi apresentado por Quandt e Baumol, em 1966, e tem a seguinte formulação:

$$T_{ijk} = \alpha_0 (P_i P_j)^{\alpha_1} (y_i y_j)^{\alpha_2} (c_{ij}^*)^{\alpha_3} (t_{ij}^*)^{\alpha_4} (f_{ij}^*)^{\alpha_5} \cdot \left(\frac{c_{ijk}}{c_{ij}^*} \right)^{\alpha_6} \left(\frac{t_{ijk}}{t_{ij}^*} \right)^{\alpha_7} \left(\frac{f_{ijk}}{f_{ij}^*} \right)^{\alpha_8}$$

onde:

T_{ijk} representa o volume de tráfego entre i e j , nos dois sentidos, pelo modo k ;

P_i, P_j as populações em i e j ;

y_i, y_j as rendas médias nas zonas i e j ;

c_{ijk} custo generalizado do deslocamento pelo modo k ;

c_{ij}^* idem, pelo melhor modo;

t_{ijk} tempo generalizado do deslocamento pelo modo k ;

t_{ij}^* idem, pelo melhor modo;

f_{ijk} frequência de serviço pelo modo k ;

f_{ij}^* melhor frequência.

iii) Modelos com repartição modal: Consideram duas funções distintas, com uma prevendo a massa global dos deslocamentos entre i e j , e a outra com interesse na repartição destes deslocamentos. A expressão geral é dada por:

$$T_{ijk}^n = f^n(A_i, A_j, Y_i, Y_j, L_{ijk}) \frac{g_k(L_{ijk})}{\sum_k g_k(L_{ijk})}$$

I.4.3. Modelo Desagregado Sequencial (WILSON⁹⁹):

O modelo consta de quatro submodelos estabelecidos em ordem inversa à usual.

1º) Escolha Modal

$$\frac{P_{ija}^M}{1-P_{ija}^M} = \exp \left[a + \sum_l b_l (L_{ijal} - L_{ijtl}) + \sum_l c_l S_{il} \right]$$

onde:

P_{ija}^M = probabilidade de deslocamento da família i ao destino j , pelo motivo M e por automóvel;

L_{ijal} , L_{ijtl} = variáveis de nível de serviço por automóvel e por transporte coletivo;

S_{il} = variáveis sócio-econômicas .

2º) Escolha de Horário

$$\frac{P_{ij}^0}{1-P_{ij}^0} = \exp \left[a' + b' (IP_{ij}^0 - IP_{ij}^P) + \sum_l c'_l S'_{il} \right]$$

onde:

P_{ij}^0 = percentual de viagens feitas pela família i ao destino j durante os horários normais (não pico);

S'_{il} = variáveis sócio-econômicas

IP_{ij}^0 , IP_{ij}^P = preços incluídos para viagens em horários normais e de pico, sendo:

$$IP_{ij}^0 = \sum_l b_l L_{ijkl}^0, \quad \text{onde}$$

L_{ijkl} são os níveis de serviço em horário normal pelo modo k ;

b_l é o mesmo parâmetro que aparece na equação de escolha do modo; e

a' , b' e c'_l são parâmetros que devem ser estimados.

39) Escolha do Destino

$$\frac{P_{ij}^D}{P_{im}^D} = \exp \left[a_1'' (IP_{ij} - IP_{im}) + a_2'' (A_j - A_m) + a_3'' (IP_{ij} S_j - IP_{im} S_m) \right]$$

onde:

P_{ij}^D = probabilidade da família i ir ao destino j ;

IP_{ij} = custo do deslocamento da família i ao destino j ;

A_j = variáveis do sistema de atividades no destino j ;

S_i = variáveis sócio-econômicas para a família i ;

a_1'' , a_2'' e a_3'' são novos parâmetros que devem ser estimados.

40) Escolha da Frequência das Viagens

$$\frac{P_i^F}{1-P_i^F} = \exp \left[a_1''' IP_i + a_2''' IE_i + a_3''' y_i \right]$$

onde:

P_i^F = probabilidade de que a família i faça a viagem;

IP_i = índice dos custos de viagem para a família i ;

IE_i = acesso às compras pela família i ;

y_i = renda da família i , sendo:

$$IP_i = \sum_j IP_{ij} P_{ij}^D \quad ; \quad e \quad ; \quad IE_i = \sum_j A_j P_{ij}^D$$

Estes submodelos podem ser agrupados como $P_{ijk}^t = P_i^I P_{ij}^D P_{ij}^t P_{ijk}^M$, dando a probabilidade da família i viajar para j no período t (pico ou não) pelo modo k .

I.4.4. Modelo Desagregado Direto (CEMT¹⁵ e WILSON⁹⁹):

O modelo dado por Ben-Akiva, em 1972, ilustra o problema da modelagem conjunta de distribuição de viagens e repartição modal.

A estrutura matemática é análoga à dos modelos de desagregados sequenciais.

As variáveis de atividade incluem o número de empregos nos estabelecimentos comerciais de atacado e varejo na zona de destino j . As variáveis modais consideram, como indicadores para o uso do automóvel, aqueles que são associados ou não com as taxas de rendimento.

As variáveis de nível de serviço consideram os custos diretamente pagos pelo usuário e os custos indiretos como o tempo de viagem passado dentro e fora do veículo.

Este modelo permite comparar as frações de deslocamento P_{ijk} e $P_{ij'k'}$ da família i para dois destinos concorrentes (j e j') por dois modos k e k' .

A fórmula geral é dada por:

$$\frac{P_{ijk}}{P_{ij'k'}} = \exp \left[\sum_1 a_1 (A_{j1} - A_{j'1}) + \sum_1 b_1 (M_{kl}^1 - M_{k'1}^1) + \sum_1 c_1 y_i (M_{kl}^2 - M_{k'1}^2) + \sum_1 d_1 (L_{ijkl}^1 - L_{ij'k'1}^1) + \sum_1 \frac{e_1}{y_i} (L_{ijkl}^2 - L_{ij'k'1}^2) \right]$$

onde:

P_{ijk} = fração do total de viagens da família i para o destino j pelo modo k ;

A_{j1} = variáveis do sistema de atividades em j ;

M_{kl}^1, M_{kl}^2 = variáveis modais;

L_{ijkl}^1, L_{ijkl}^2 = variáveis de nível de serviço;

y_i = renda familiar.

I.4.5. Modelo Geral de Partilha:

O modelo geral de partilha (General Share Model) proposto por MANHEIM⁶⁴ tem a seguinte forma:

$$t_{ij}^{mp} = \alpha(y) \beta_i(y) \gamma_{ij}(y) \delta_{ij}^m(y) \omega_{ij}^{mp}(y)$$

onde:

y é uma função do sistema de atividades e do nível de serviço de transporte na região;

$\alpha(y)$ é a quantidade total de viagens na região $\alpha(y) \geq 0$;

$\beta_i(y)$ é a proporção das viagens que tem origem na zona i ,
 $0 \leq \beta_i(y) \leq 1$, $\sum_i \beta_i(y) = 1$;

$\gamma_{ij}(y)$ é a proporção das viagens que tem origem na zona i
 e se destinam à zona j , $0 \leq \gamma_{ij}(y) \leq 1$, $\sum_j \gamma_{ij}(y) = 1$
 para cada i ;

$\delta_{ij}^m(y)$ é a proporção das viagens de i para j que usam a
 modalidade m , $0 \leq \delta_{ij}^m(y) \leq 1$, $\sum_m \delta_{ij}^m(y) = 1$ para cada i ,
 j ;

$\omega_{ij}^{mp}(y)$ é a proporção das viagens de i para j pela modali-
 dade m que usam o caminho p , $0 \leq \omega_{ij}^{mp}(y) \leq 1$.

Este modelo pode ser apresentado na forma sequen-
 cial:

$$t = \alpha(y)$$

$$t_i = t(y) \beta_i(y)$$

$$t_{ij} = t_i(y) \gamma_{ij}(y)$$

$$t_{ij}^m = t_{ij}(y) \delta_{ij}^m(y)$$

$$t_{ij}^{mp} = t_{ij}^m(y) \omega_{ij}^{mp}(y),$$

e comparado com o modelo clássico a quatro etapas:

$$t_i = \beta_i \cdot \alpha \quad - \quad \text{geração de viagens};$$

$$t_{ij} = \gamma_{ij} \cdot t_i \quad - \quad \text{distribuição};$$

$$t_{ij}^m = \delta_{ij}^m \cdot t_{ij} \quad - \quad \text{repartição modal};$$

$$t_{ij}^{mp} = \omega_{ij}^{mp} \cdot t_{ij}^m \quad - \quad \text{alocação de viagens}.$$

I.5. COMENTÁRIOS GERAIS SOBRE OS MODELOS:

As principais críticas sobre os vários modelos aqui apresentados, são as seguintes:

- dificuldade na utilização, motivada pelos vários programas computacionais necessários, para cada etapa ou fase dos modelos;
- os modelos não são desenvolvidos com base rigorosamente científica, dando lugar, em grande parte, ao empirismo;
- os modelos tratam somente de fluxos de transporte sem considerar outros impactos significativos.

Tais críticas podem, entretanto, ser contornadas através de procedimentos como os abaixo indicados:

- desenvolvimento de novos fundamentos teóricos para estes modelos;
- refinamento nos modelos e nos processos de calibração;
- projetos mais efetivos de "software" (simulação e otimização);
- utilização de métodos estatísticos ou econométricos mais modernos na calibração dos modelos e mesmo nas próprias abordagens.

CAPÍTULO II - MODELOS DE DISTRIBUIÇÃO DE VIAGENS

II.1. INTRODUÇÃO:

Como já foi visto no capítulo anterior, no planejamento de um sistema de transportes de uma área onde é possível um grande número de conexões entre as suas zonas, é fundamental a estimativa do número de viagens que podem ocorrer entre tais zonas durante um determinado período.

O comportamento dos usuários pode ser descrito em duas etapas:

- Na primeira, eles escolhem o destino da viagem que pretendem fazer;
- na segunda, escolhem a modalidade.

Pode-se estudar a previsão da distribuição de viagens de forma independente da modalidade escolhida.

O problema da previsão da distribuição de viagens consiste em encontrar uma matriz (T_{ij}) de viagem que seja compatível com:

- as informações sobre o potencial da geração e atração de viagens para cada área, centro ou cidade;
- o comportamento dos vários agentes do sistema de transporte.

Os métodos para obtenção desta matriz são inúmeros e estão em constante evolução. Uma classificação geral des

tes métodos pode ser a seguinte:

- modelos de simulação, abrangendo os métodos explicativos e os métodos paramétricos;
- modelos de otimização, nos quais se procura determinar (T_{ij}) através de um processo de otimização como, por exemplo, a minimização do custo total de viagem, a maximização da entropia, a maximização da função utilidade, etc..

Nos modelos de simulação procura-se imitar uma situação real através de modelos matemáticos que possuam características senão as mesmas, mas pelo menos semelhantes àquelas do sistema original.

Os modelos de otimização procuram encontrar uma melhor solução dentro de um conjunto de soluções possíveis. Uma das grandes dificuldades deste tipo de modelos é o estabelecimento do critério de otimalidade (REIF⁸⁶). Este problema será abordado neste capítulo.

Deve-se ressaltar que estes dois grupos de modelos diferem, não apenas quanto ao tipo de técnicas matemáticas utilizadas, mas também no que se refere à natureza do equilíbrio dos fluxos de transporte proposto como solução. Enquanto os modelos de simulação correspondem a uma abordagem local, conduzindo a um equilíbrio de fluxos resultante da justaposição do comportamento dos indivíduos, os modelos de otimização propõem distribuições correspondentes a um equilíbrio geral que satisfaçam a sociedade como um todo.

Esta distinção aparece, também, no caso do problema de alocação de viagens numa rede de transportes, conduzindo aos modelos descritivos e normativos (STEENBRINK⁹⁰).

II.2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA:

O modelo matemático do problema de distribuição de viagens consiste, em essência, na dependência funcional de T_{ij} em relação a O_i , D_j e C_{ij} , onde

T_{ij} é o número de viagens da zona i para a zona j ;

O_i é o número de viagens produzidas na zona i ;

D_j é o número de viagens atraídas para a zona j ;

C_{ij} é um custo unitário de transporte de i para j .

Este modelo deve satisfazer as seguintes restrições:

- Positividade:

$$T_{ij} \geq 0 \quad (II.1)$$

- Conservação:

$$\sum_{i=1}^N T_{ij} = D_j \quad j = 1, \dots, N \quad (II.2)$$

$$\sum_{j=1}^N T_{ij} = O_i \quad i = 1, \dots, N$$

- Consistência:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij} = \sum_{i=1}^N O_i = \sum_{j=1}^N D_j \triangleq T \quad (\text{II.3})$$

onde T é o volume total de viagens.

Ou seja, devem ser definidas $N \times N$ variáveis para satisfazer $N + N - 1$ restrições de igualdade independentes. Se não for especificada uma forma funcional $T_{ij}(O_i, D_j, C_{ij}, \dots)$ para a solução procurada, obtém-se geralmente um conjunto infinito (e convexo) de soluções possíveis.

Além dessas restrições podem ser requeridas ainda as restrições de compressibilidade e separabilidade:

- Compressibilidade:

Se os centróides $n - 1$ e n , de uma rede de n centróides, são combinados, a compressibilidade requer que o novo número de viagens T'_{ij} , as produções de viagens O'_i , as atrações D'_j e o total de viagens T' estejam relacionados com os valores antigos pelas equações:

$$\begin{aligned} T'_{ij} &= T_{ij} & O'_i &= O_i & D'_j &= D_j \\ T'_{n-1,j} &= T_{n-1,j} + T_{nj} & O'_{n-1} &= O_{n-1} + O_n \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

$$T'_{i,n-1} = T_{i,n-1} + T_{in} \quad D'_{n-1} = D_{n-1} + D_n$$

$$T'_{n-1,n-1} = T_{n-1,n-1} + T_{n-1,n} + T_{n,n-1} + T_{nn}$$

para $i, j = 1, 2, \dots, n-2$.

- Separabilidade:

Se o centróide n for removido da rede, o novo número de viagens, as produções, as atrações e o total de viagens deverão ser:

$$T'_{ij} = T_{ij}$$

$$O'_i = O_i - T_{in} \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{II.5})$$

$$D'_j = D_j - T_{nj}$$

$$T' = T - O_n - D_n$$

A compressibilidade e a separabilidade são propriedades importantes do modelo de distribuição de viagens porque estão relacionadas com a independência da maneira pela qual a área de estudo é subdividida em zonas.

II.3. MÉTODOS DE SIMULAÇÃO:

Entre os métodos clássicos de simulação destacam-se o modelo gravitacional e os modelos de oportunidades competitivas e de oportunidades intervenientes.

II.3.1. Modelo Gravitacional:

Neste modelo, de natureza inicialmente empírica, o número de viagens produzidas entre duas zonas i e j é diretamente proporcional ao número de viagens produzidas na zona i , ao

número de viagens atraídas para a zona j e inversamente proporcional a alguma função de separação espacial das duas zonas (por exemplo: distância ou tempo de viagem) .

A equação geral deste modelo pode ser expressa sob a forma:

$$T_{ij} = \frac{D_j / d_{ij}^\beta}{\sum_k D_k / d_{ik}^\beta} O_i \quad (\text{II.6})$$

onde

d_{ij} é uma medida de separação espacial;

β é um expoente que depende do motivo de viagem.

A forma geralmente utilizada é a seguinte:

$$T_{ij} = \frac{O_i D_j F_{ij} K_{ij}}{\sum_{k=1}^N D_k F_{ik} K_{ik}} \quad (\text{II.7})$$

onde

F_{ij} é o fator de tempo de viagem, representando a separação média espacial entre i e j ;

K_{ij} é um fator de ajustamento zona a zona, permitindo considerar outros fatores sócio-econômicos que influenciam a distribuição.

Para a determinação dos F_{ij} é utilizado o seguinte processo:

a) Considera-se $F_{ij}^0 = 1$ ou utilizam-se dados de um sistema de transporte de tamanho parecido;

b) Sendo dados os K_{ij} , O_i e D_j , podem ser calculados os T_{ij}^{n+1} ;

$$c) F_{ij}^{n+1} = F_{ij}^n \cdot \frac{T_{ij}^n}{T_{ij}^{n+1}} \quad (\text{II.8})$$

onde T_{ij}^0 representa a distribuição atual.

Para a determinação dos K_{ij} , podem ser utilizados vários processos empíricos como o proposto pelo BUREAU OF PUBLIC ROADS¹³:

a) se a população é menor que 100.000, usa-se $K_{ij} = 1$ (para transporte urbano);

b) para os outros casos, é usada a fórmula:

$$K_{ij} = R_{ij} \cdot \frac{1 - x_i}{1 + R_{ij}x_i} \quad (\text{II.9})$$

onde:

$$R_{ij} = T_{ij}^0 / T_{ij}$$

$$x_i = T_{ij} / O_i$$

Introduzindo a noção de custo generalizado (WILSON⁹⁹):

$$c_{ij} = \alpha_1 t_{ij} + \alpha_2 e_{ij} + \alpha_3 d_{ij} + P_j + \delta \quad (\text{II.10})$$

onde:

t_{ij} = tempo de viagem entre i e j ;

e_{ij} = tempo de acesso e espera;

d_{ij} = distância entre i e j ;

P_j = custo terminal em j ;

δ = fator de ajustamento;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ = coeficientes representando valores atribuídos pelos usuários ao tempo, distância, etc. (em unidades monetárias).

obtêm-se outra forma do modelo gravitacional:

$$T_{ij} = A_i B_j O_i D_j e^{-\beta c_{ij}} \quad (\text{II.11})$$

onde

$$A_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^N B_j D_j e^{-\beta c_{ij}}} \quad (\text{II.12})$$

$$B_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^N A_i O_i e^{-\beta c_{ij}}} \quad (\text{II.13})$$

satisfazendo as restrições de conservação.

Este modelo é o mais utilizado na prática, tanto no planejamento de transporte urbano, como no regional.

II.3.2. Modelos de Oportunidades:

São modelos de previsão, baseados nas probabilidades de oportunidades oferecidas pelos deslocamentos. O modelo genérico pode ser escrito como se segue:

$$T_{ij} = O_i \cdot P_j \quad (\text{II.14})$$

onde

T_{ij} = número de viagens entre i e j ;

O_i = número de viagens com origem na zona i ;

P_j = probabilidade de uma viagem terminar em j .

Existem duas classes de modelos de oportunidades:

a) modelos de oportunidades intervenientes;

b) modelos de oportunidades competidoras.

II.3.2.1. Modelo de Oportunidades Intervenientes:

A hipótese básica deste modelo é que as viagens, a partir de uma zona-origem, devem ser tão curtas quanto possível, sendo alongadas na medida em que faltam oportunidades nas possíveis áreas de destino já pesquisadas (HUTCHINSON⁴⁹). A versão original deste modelo foi proposta por Stouffer (1940):

$$T_{ij} = K \frac{a_j}{V_j} \quad (\text{II.15})$$

onde

a_j = número total de oportunidades de destino na zona j ;

V_j = número de oportunidades intervenientes entre as zonas i e j ;

K = uma constante de proporcionalidade para assegurar que todas as viagens com origem na zona i sejam distribuídas a oportunidades de destino.

Este modelo agregado revelou-se muito sensível à repartição do espaço urbano em zonas e outros modelos foram desenvolvidos visando a superar esta deficiência.

Em 1960, Schneider propôs a seguinte modificação da hipótese de Stouffer:

- a probabilidade de que uma viagem terminará quando V destinos forem considerados, $P(V)$, é dada por:

$$\frac{dP}{dV} = (1-P)L \longrightarrow P(V) = 1 - e^{-LV} \quad (\text{II.16})$$

onde

L = probabilidade (suposta constante) de um destino considerado ser aceite;

V = número de destinos considerados.

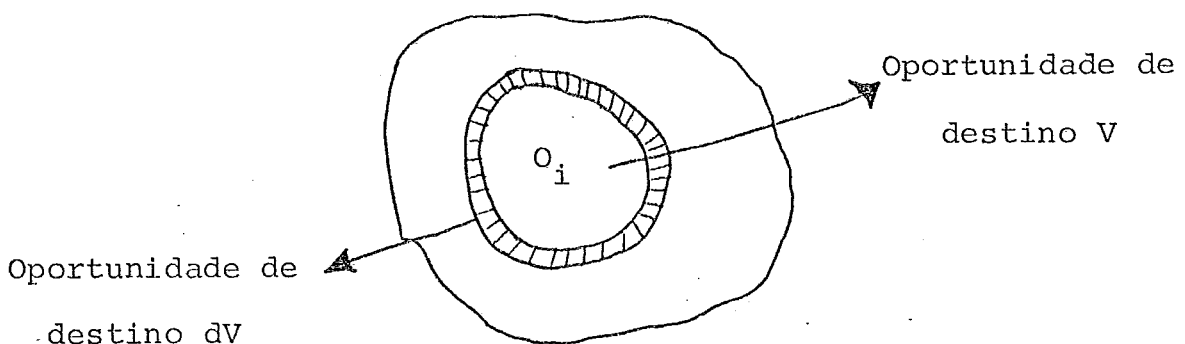


FIGURA II.1.

O intercâmbio de viagens entre um par(i-j) é dado por:

$$T_{ij} = O_i \left[P(V_{j+1}) - P(V_j) \right] \quad (\text{II.17})$$

sendo

$P(V_j)$ = a probabilidade de que uma viagem terá estabelecido um destino adequado nas oportunidades já consideradas até a zona j;

$P(V_{j+1})$ = a probabilidade de que uma viagem terá estabelecido um destino adequado nas oportunidades acumuladas consideradas até e inclusive a zona j.

II.3.2.2. Modelo de Oportunidades Competidoras:

A hipótese utilizada neste modelo é de que a probabilidade de que uma viagem, originada em i, acabe em uma determinada zona j, incluída dentro de um certo limite, depende da proporção de oportunidades de viagens nesta zona e de suas oportunidades competidoras dentro desse mesmo limite. A zona de chegada compete com as outras zonas de igual probabilidade.

$$P_j = \frac{a_j}{\sum_{k \in S} a_k} \left(1 - \frac{\sum_{k \in S} a_k}{\sum_{k \in S} a_k} \right) \quad (\text{II.18})$$

com

$$\frac{a_j}{\sum_{k \in S} a_k} = \text{atração da zona j em s ;}$$

$$\left(1 - \frac{\sum_{k \in S} a_k}{\sum_{k \in S} a_k}\right) = \text{probabilidade de uma viagem originada em } i \text{ acabar em } s.$$

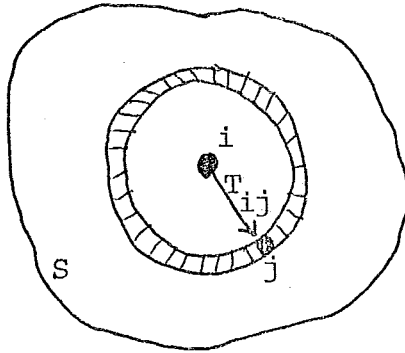


FIGURA II.2.

Este modelo também se revelou sensível à definição das zonas e, além de ser de difícil calibragem, os resultados obtidos são piores do que os obtidos nos modelos gravitacional e de oportunidades intervenientes.

II.4. SENSIBILIDADE DA POPULAÇÃO AO CUSTO:

O conhecimento da sensibilidade da população ao custo do transporte é importante para que os modelos de previsão de distribuição de viagens correspondam ao comportamento efetivo dos usuários.

Considerando as situações extremas: - uma onde \bar{C}_{\min} é o valor do custo médio mínimo de deslocamento, obtido através da resolução do problema clássico de transporte (problema de Hitchcock)

- e outra onde $C^* = \frac{1}{T} \cdot \sum_{ij} \frac{O_i D_j}{T} C_{ij}$ é o custo médio de deslocamento no ca

so de uma insensibilidade dos usuários aos custos das viagens ; pode-se definir um indicador s , caracterizando a atitude dos habitantes de uma área face aos custos de transporte.

A partir de uma matriz atual de viagens $T \begin{bmatrix} T_{ij} \end{bmatrix}$, pode-se calcular o custo médio observado das viagens (FAGES³³):

$$\bar{C} = \frac{1}{T} \sum_i \sum_j C_{ij} T_{ij} \quad (\text{II.19})$$

sendo que $\bar{C} \geq \bar{C}_{\min}$, por definição. Geralmente $\bar{C} \leq C^*$, porque em caso contrário obter-se-ia um custo médio superior ao custo obtido quando os usuários não levam em conta os custos na escolha de suas viagens.

Definindo:

$$s = \frac{C^* - \bar{C}}{C^* - \bar{C}_{\min}} \quad (\text{II.20})$$

onde s é um número real, $0 \leq s \leq 1$, chamado "sensibilidade ao custo" do conjunto de habitantes da área.

Se $s = 0$, a população é insensível ao custo e, se $s = 1$ tem-se uma distribuição de viagens que minimiza as perdas econômicas em relação ao transporte. No caso real, s está compreendido entre os dois extremos.

Escolhendo como modelo global de comportamento do usuário:

$$\sum_i \sum_j T_{ij} C_{ij} = T \bar{C} \quad (\text{II.21})$$

obter-se-á uma solução somente se $\bar{C}_{\min} \leq \bar{C} \leq \bar{C}_{\max}$ (onde \bar{C}_{\max} é o custo médio máximo de viagem) e, a sensibilidade da população, ao custo, será redefinida como:

$$s = \frac{C^* - \bar{C}}{C^* - \bar{C}_{\max}}, \quad -1 \leq s \leq 0 \quad \text{se } \bar{C}_{\max} > \bar{C} > C^* \quad (\text{II.22})$$

e

$$s = \frac{C^* - \bar{C}}{C^* - \bar{C}_{\min}}, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad \text{se } C^* > \bar{C} > \bar{C}_{\min} \quad (\text{II.23})$$

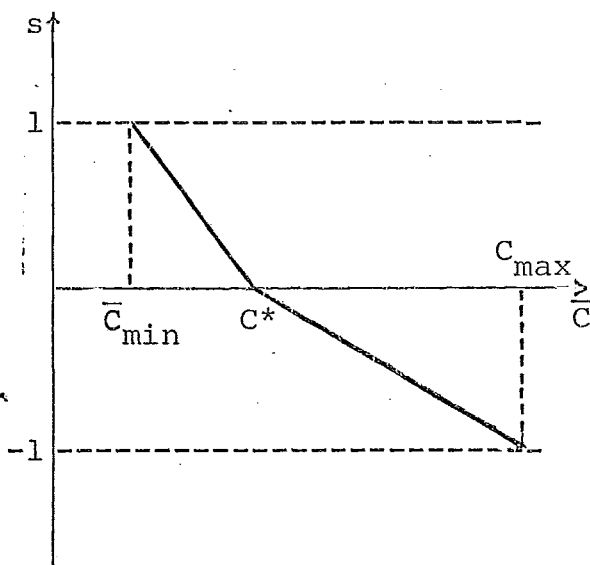


FIGURA II.3

A sensibilidade s é uma quantidade mensurável que pode ser calculada diretamente a partir de observações independentes do modelo. Com os valores observados de T_{ij} calcula-se O_i e D_j e, conhecendo-se a matriz de custo C_{ij} , pode-se calcular o valor de \bar{C}_{\min} , resolvendo o problema de transporte de Hitchcock. Calcula-se, a seguir, os valores de:

$$C^* = \frac{1}{T} \sum_{ij} \frac{O_i D_j}{T} C_{ij} \quad (\text{II.24})$$

e

$$\bar{C} = \frac{1}{T} \sum_{ij} T_{ij} C_{ij} \quad (\text{II.25})$$

e chega-se a uma estimativa de

$$s = \frac{C^* - \bar{C}}{C^* - \bar{C}_{\min}} \quad (\text{II.26})$$

A noção de sensibilidade tende a ser independente da estrutura da cidade e a caracterizar unicamente o comportamento de seus moradores, face aos custos de transportes e à necessidade de deslocamento dentro dela. Por exemplo, a criação de uma nova zona longe do centro, deslocando dele possibilidades de empregos, vai aumentar conjuntamente os três parâmetros \bar{C} , \bar{C}^* e \bar{C}_{\min} , e portanto, pode-se esperar que, depois dessa modificação, a sensibilidade varie pouco.

No planejamento de transportes urbanos, o problema de previsão das modificações do tráfego, a partir de modificações nos custos, poderá então ser resolvido com o conhecimento da sensibilidade s , da seguinte maneira:

Conhecendo-se C_{ij} e s , procura-se a matriz T , sendo dados O_i e D_j e obtendo-se o valor de \bar{C}_{\min} . Com este valor de \bar{C}_{\min} , calcula-se o valor de \bar{C} :

$$\bar{C} = (1 - s)C^* + s\bar{C}_{\min} \quad (\text{II.27})$$

com C^* dado por (II.24).

Resolver-se-á o problema, então, se for especificada uma forma funcional $T_{ij}(O_i, D_j, C_{ij})$:

$$T_{ij} = T_{ij}(O_i, D_j, C_{ij}) \quad (\text{II.28})$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_j T_{ij} &= O_i \\ \sum_i T_{ij} &= D_j \\ T_{ij} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.29})$$

$$\sum_i \sum_j C_{ij} T_{ij} = T \bar{C} \quad (\text{II.30})$$

Por exemplo, se a forma funcional escolhida é a do modelo gravitacional, resolver-se-á o sistema de equações:

$$T_{ij} = A_i B_j e^{-\beta C_{ij}}$$

com (II.29) e (II.30).

II.5. MODELOS DE OTIMIZAÇÃO:

Estes modelos empregam um processo de otimização,

isto é, procuram maximizar (ou minimizar) uma função objetivo, observando as limitações impostas ao problema (restrições).

Existe um vasto elenco de modelos, desde o modelo clássico de programação linear (conhecido também por modelo de Hitchcock) até os modelos de distribuição entrópicos.

Entre os modelos que consideram explicitamente o comportamento do usuário, temos os de maximização da acessibilidade e os de maximização da utilidade.

Antes de apresentar os modelos, será feita uma rápida análise da teoria da acessibilidade e da teoria da utilidade para redes de transportes.

II.5.1. Acessibilidade e Utilidade de Uma Rede de Transportes:

As noções de acessibilidade e de utilidade são importantes para a descrição do comportamento do usuário do sistema de transportes.

Durante muito tempo, a satisfação obtida pelos usuários em seus deslocamentos foi considerada apenas como função do nível de serviço oferecido pelo serviço de transporte, que era avaliado por indicadores de "consumo" em transportes, tais como: custo ou tempo gasto pelos usuários, ou seja, indicadores que consideram apenas o aspecto negativo dos deslocamentos e não levam em conta o interesse do usuário.

Nos últimos anos, vários trabalhos teóricos foram dedicados ao tema da distribuição de viagens, partindo de análises do comportamento do usuário na escolha de seus deslocamentos, ou então, partindo da teoria econômica do excedente do consumidor.

A função utilidade tem um papel importante na medida de benefícios aos usuários e conseqüentemente, aqui, no equilíbrio da rede de transporte (WILLIAMS⁹⁶).

Também os indicadores de acessibilidade desempenham um papel fundamental na previsão da demanda, traduzindo com precisão duas idéias fundamentais na concepção atual de planejamento de transportes urbanos (KOENIG⁵⁵):

- a ligação entre as características de urbanização e as da rede de transporte;
- a avaliação do nível de serviço para diferentes categorias de usuários (diferenciados pela idade, classe sócio-econômica, etc.).

II.5.2. Teoria da Utilidade e Redes de Transporte:

Muitos modelos de demanda por transportes são baseados no modelo de demanda da teoria clássica da microeconomia (ver por exemplo, HENDERSON e QUANDT⁴⁸).

No caso de uma viagem, à qual associamos certos custos e benefícios aos usuários, supomos que cada indivíduo pro

cura maximizar a diferença entre seus benefícios e seus custos:

$$\max (u^{ij} - C^{mkij}) \quad (\text{II.31})$$

com

u^{ij} = benefícios obtidos na viagem de i para j ;

C^{mkij} = custo de viagem de i para j pelo modo m e caminho k .

Face à natureza individual dos custos e benefícios, pode acontecer que, sob as mesmas condições e ao mesmo tempo, algumas pessoas preferem um certo destino, por certo modo e caminho, enquanto outras pessoas preferem outros destinos, modos ou caminhos.

A teoria econômica da escolha do consumidor associa a noção de utilidade à satisfação do indivíduo.

No caso de uma viagem, a utilidade está ligada à obtenção dos bens e serviços na chegada ao destino.

O termo "consumidor" ou "usuário" é utilizado aqui para designar uma unidade de tomada de decisão, mesmo que esta unidade seja constituída por um grupo de pessoas.

Um modelo de comportamento do consumidor (MANHEIM⁶³) deve indicar:

- 1) que alternativas o consumidor percebe;

- 2) quais as conseqüências dessas alternativas consideradas importantes;
- 3) como é feita a escolha entre as alternativas percebidas.

As decisões básicas para o consumidor, sob o ponto de vista do transporte são:

- 1) fazer a viagem;
- 2) o destino da viagem;
- 3) hora de viagem;
- 4) modo e rota da viagem.

Os atributos do serviço de transporte são considerados pelo consumidor para escolha entre as alternativas para a tomada de decisão.

O uso da noção de utilidade conduz geralmente a utilizar as curvas de indiferença que indicam quais as combinações de fatores, igualmente preferidas pelo consumidor.

O conjunto dessas curvas pode ser expresso na forma funcional como:

$$U = f(\underline{S}, \underline{\theta}) = \text{constante}$$

onde \underline{S} é um vetor que representa as variáveis de serviço e $\underline{\theta}$ é um vetor de parâmetros.

As formas mais utilizadas são:

$$U = \alpha t^\beta c^\gamma \quad (\text{II.32})$$

e

$$U = \alpha t + \beta c \quad (\text{II.33})$$

onde

$$S = (t, c) \text{ e } \theta = (\alpha, \beta, \gamma) \text{ ou } (\alpha, \beta);$$

t - é o tempo de viagem;

c - é o custo de viagem.

Um modelo geral de maximização da utilidade foi desenvolvido por GOLOB e BECKMANN⁴⁶ a partir de hipóteses básicas similares sobre os custos e benefícios atribuídos às viagens.

O modelo proposto por GOLOB e BECKMANN⁴⁶ utiliza, como variável básica de decisão, o número de viagens que uma unidade de decisão (indivíduo ou grupo) produz no local i para atingir vários destinos j , por vários modos k durante um período específico de tempo.

Estas viagens geram utilidade quando atingem seus objetivos no destino e desutilidade devido aos fatores: tempo de viagem, custo, desconforto, etc. .

Chamando de Z^p , o grau de atendimento do objetivo p , e de Y^r , a despesa em termos de fator r , a utilidade lí-

guida da viagem é uma função do tipo:

$$U = U(z^1, z^2, \dots, z^p, \dots, Y^1, Y^2, \dots, Y^r) \quad (\text{II.34})$$

que deverá ser maximizada de forma direta, ou então, considerando restrições de custo ou tempo de viagem.

CHOUKROUN¹⁸ modelizou o comportamento em termos de viagens de um consumidor k como solução do problema:

$$\text{Max } U_k$$

s. a.

$$\sum_i \sum_j T_{ij}^k = T$$

$$\sum_i \sum_j C_{ij}^k T_{ij}^k \leq C^k \quad (\text{II.35})$$

$$T_{ij}^k \geq 0$$

onde

T_{ij}^k é o número de viagens do consumidor k de i para j ;

C^k é o orçamento destinado pelo consumidor k para viagens;

C_{ij}^k é o custo de uma viagem do consumidor k de i para j .

Escolhendo como função de utilidade a função:

$$U_k = - \sum_{ij} T_{ij}^k (\log T_{ij}^k - \log \hat{T}_{ij}) \quad (\text{II.36})$$

onde $[\hat{T}_{ij}]$ é uma matriz de viagens desejada pelo consumidor, e

utilizando a Teoria da Dualidade da Programação Não-Linear, ele mostrou que a escolha do consumidor será da forma:

$$T_{ij}^* = K \cdot \hat{T}_{ij} e^{-\beta C_{ij}}$$

onde β é uma variável dual associada à restrição de custo de (II.35). Ou seja, a escolha do consumidor em termos de viagens seguirá o modelo gravitacional de distribuição de viagens.

Por outro lado, NIJKAMP⁷⁹ demonstrou que existe uma relação entre o modelo de maximização da utilidade e o modelo gravitacional em relação às viagens geradas por uma zona.

Considerando o problema da maximização da utilidade local com restrições locais de custo de viagem:

$$\text{Max } U_i = f_i(T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{ij}) \quad , \quad i = 1, \dots, N$$

s.a.

$$\sum_j C_{ij} T_{ij} = C_i \quad \text{(II.37)}$$

Assume-se que C_i é proporcional ao número total de viagens originadas em i :

$$C_i = \eta O_i \quad \text{(II.38)}$$

e, portanto, a restrição local fica sendo:

$$\sum_j C_{ij} T_{ij} = \eta O_i \quad \text{(II.39)}$$

Pelas condições de otimização de primeira ordem, temos:

$$U'_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial T_{ij}} = \lambda_i C_{ij} \quad \text{para todo } j \quad (\text{II.40})$$

onde λ_i é o multiplicador de Lagrange associado à condição orçamentária.

As variáveis T_{ij} podem ser encontradas através do seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} U'_{i,1}/C_{i1} = U'_{iN}/C_{iN} \\ \vdots \\ U'_{i,N-1}/C_{i,N-1} = U'_{iN}/C_{iN} \\ \vdots \\ \sum_j C_{ij} T_{ij} = \eta O_i \end{array} \right. \quad (\text{II.41})$$

Por outro lado, o modelo gravitacional (II.11) pode ser escrito:

$$T_{ij} = O_i D_j K_{ij} e^{-\beta C_{ij}}$$

do qual se deduz uma nova expressão para a restrição de custo i :

$$\eta T_{iJ} K_{iJ}^{-1} D_J^{-1} e^{\beta C_{iJ}} = \sum_{j=1}^N C_{ij} T_{ij} \quad (\text{II.42})$$

com $J = 1, \dots, N$, ou ainda:

$$\eta T_{iJ} K_{iJ}^{-1} D_J^{-1} e^{\beta C_{iJ}} E_i^{-1} \left(\sum_{j=1}^N K_{ij} D_j e^{-\beta C_{ij}} \right) = \sum_{j=1}^N C_{ij} T_{ij}$$

com

$$E_i = \sum_{j=1}^N K_{ij} D_j e^{-\beta C_{ij}}$$

Uma condição suficiente para satisfazer esta última equação é de escolher os T_{ij} , satisfazendo o sistema:

$$T_{iJ} K_{iJ}^{-1} D_J^{-1} e^{\beta C_{iJ}} \{E_i^{-1} K_{ij} D_j e^{-\beta C_{ij}}\} = C_{ij} T_{ij} \quad (\text{II.43})$$

para

$$i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, N \text{ e } J = 1, \dots, N$$

ou ainda eliminando η e E_i

$$D_j K_{ij} e^{-\beta C_{ij}/C_{ij} T_{ij}} = D_J K_{iJ} e^{\beta C_{ij}/C_{iJ} T_{iJ}}$$

com

$$i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, N \text{ e } J = 1, \dots, N .$$

Estas últimas condições suficientes, podem ser consideradas como uma especificação das condições (II.41), de maximização de la. ordem, quando a função de utilidade relativa às viagens iniciadas em i , é da forma:

$$U_i = K_{i1} D_1 e^{-\beta C_{i1}} \log T_{i1} + \dots + \\ + K_{iN} D_N e^{-\beta C_{iN}} \log T_{iN} \quad (\text{II.44})$$

Esta função inclui o elemento $l_{ij} = K_{ij} D_j e^{-\beta C_{ij}}$, para $j = 1, \dots, N$, como elasticidade de preferência com rela-

ção às decisões de viagens.

Outra função utilidade equivalente seria:

$$V_i = \prod_{j=1}^N T_{ij}^{k_{ij}}$$

sendo que

D_j representa o efeito de atração do destino j ;

e $e^{-\beta C_{ij}}$ representa o efeito de resistência causado pela distância entre i e j ;

K_{ij} é um parâmetro de ponderação.

Este resultado pode ser encarado como uma interpretação razoável do modelo gravitacional em termos de utilidade.

II.5.3. Teoria da Acessibilidade:

Existem várias formas de definição de acessibilidade e de seus indicadores. As primeiras definições e formulações matemáticas, podem ser encontradas nos trabalhos de planejamento do uso do solo, feitos por HANSEN⁴⁷ (1959). A fórmula geral da medida de acessibilidade dada por Hansen é a seguinte:

$$A_i = \sum_{j=1}^N S_j \cdot f(T_{ij}) \quad (\text{II.45})$$

onde

A_i = medida de acessibilidade da zona i para atividades l_0

calizadas dentro das demais zonas de área de estudo;

S_j = tamanho da atividade na zona j , tais como: número de empregos, população, etc. ;

$f(T_{ij})$ = função de resistência à viagem, descrevendo o efeito do tempo de viagem ou distância entre as zonas;

N = número de zonas na área.

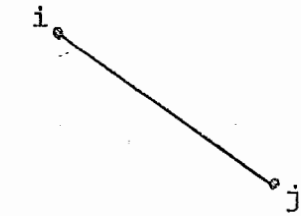
Outras definições e formulações podem ser encontradas nos trabalhos de KOENIG⁵⁵; LEAKE e HUZAYYIN⁶⁰; POULIT⁸⁴; INGRAM⁵⁰; BRIGGS e JONES¹¹; DAVIDSON²²; MORRIS et al⁷⁵; etc. .

II.5.3.1. Índices de Acessibilidade Local:

Os índices de acessibilidade permitem caracterizar cada zona da área em estudo em relação às demais zonas, avaliando o interesse dos habitantes de uma zona para sair dela, ou ao contrário, o interesse do conjunto da população da área para se dirigir a esta zona. Deve-se distinguir a acessibilidade para uma zona e a acessibilidade de uma zona para o exterior (DU BOIS²⁸).

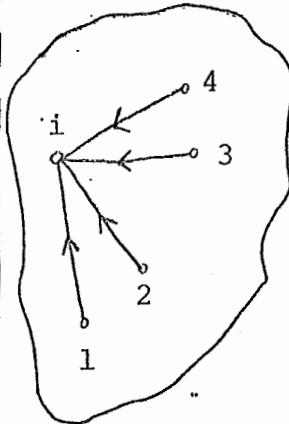
INGRAM⁵⁰ define a "acessibilidade relativa" como sendo a relação ou o grau de conexão entre dois pontos enquanto que a "acessibilidade integral" descreve a relação ou grau de interconexão entre um dado ponto e todos os outros dentro de um conjunto espacial de pontos.

acessibilidade relativa

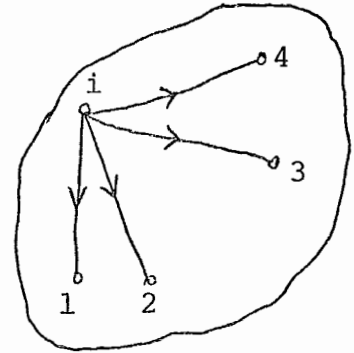


$$A_{ij} = D_{ij}$$

acessibilidade integral



$$A^i = \frac{\sum_j D_{ji}}{N}$$



$$A_i = \frac{\sum_{i=1}^N D_{ij}}{N}$$

FIGURA II.4

onde

D_{ij} representa a separação espacial entre as zonas i e j ;

A_{ij} = acessibilidade da zona i em relação à zona j ;

A^i = acessibilidade total à zona i ;

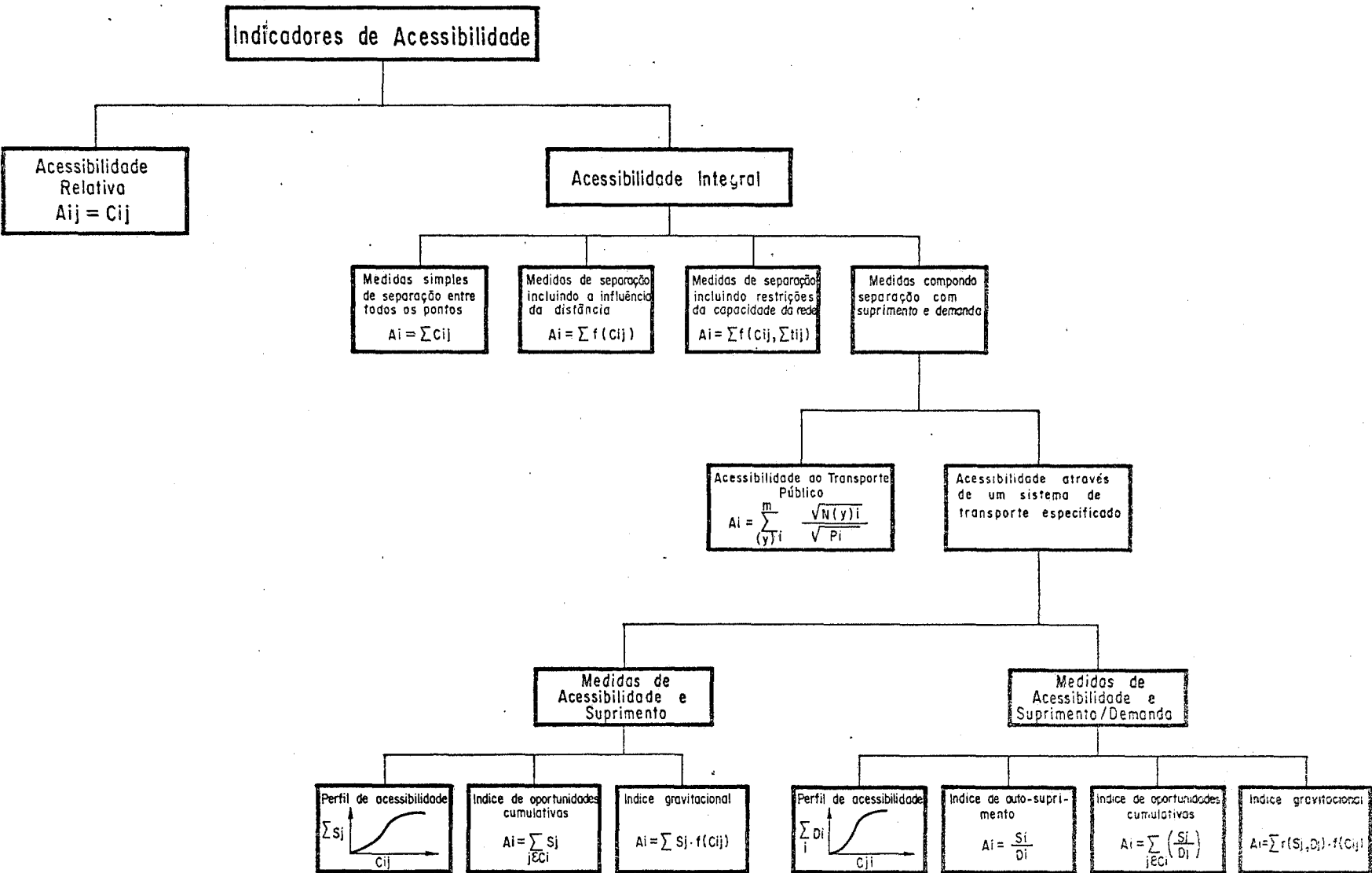
A_i = acessibilidade total da zona i ;

N = número de zonas.

MORRIS et al⁷⁵ apresentam uma classificação geral dos indicadores de acessibilidade combinando várias definições e formulações encontradas na literatura (ver Quadro II.1).

Os indicadores de acessibilidade mais utilizados são de dois tipos:

- Ponderação de oportunidades por uma impedância (que pode ser, por exemplo, uma função decrescente do custo ou tempo de viagem para atingir estas oportunidades). Por ex.:



LEGENDAS

- i, j - zonas: $1, \dots, n$
- A_{ij} - acessibilidade da zona i com relação à zona j
- A_i - acessibilidade total da zona i
- C_{ij} - separação espacial entre as zonas i e j (tempo, distância, custo, etc.)
- $f(C_{ij})$ - função que representa a impedância entre as zonas i e j . Esta é uma função cuja forma (polinomial, exponencial, Gausseana, etc.) é empiricamente ajustada de modo a refletir o efeito da separação espacial nas viagens entre as zonas.
- $f(C_{ij}, \Sigma t_{ij})$ - função que representa o efeito combinado da: - separação espacial sobre os padrões de viagens, e - dos padrões de viagem sobre a separação espacial.
- t_{ij} - viagens entre as zonas i e j
- $N(y)_i$ - frequência dos serviços de transporte y que atendem à zona i
- m - quantidade de serviços de transporte y servindo à zona i
- P_i - área física da zona i (em m^2 , etc.)
- S_i - atração exercida pela zona j (quantidade de empregos, etc.)
- $j \in C_i$ - conjunto das zonas j , abrangidas pela faixa de separação de viagens ao redor da zona i , tais que $0 \leq C_{ij} \leq C_{\max}$
- D_j - nível de demanda da zona j (quantidade de pessoas, etc.)
- $r(S_j, D_j)$ - Função que representa a atividade da zona j combinada às demandas de acesso a essa zona
- T_j - quantidade de viagens atraídas pela zona j
- K_{ij} - fator de ajustamento específico para cada ligação. Representa a influência de aspectos sociais ou econômicos nos padrões de viagem e que não são considerados no modelo gravitacional.

$$A_i = \sum_j O_j f(C_{ij}) \quad (\text{II.46})$$

onde

A_i := acessibilidade da zona i para o tipo relevante de oportunidades;

O_j = oportunidades daquele tipo existentes na zona j (locais de emprego, comércio, escolas,);

C_{ij} = custo ou tempo generalizado de uma viagem de i para j ;

$f(C_{ij})$ = função de impedância; geralmente é usada a função exponencial;

b) Definição isócrona (número de oportunidades que podem ser alcançadas dentro de um dado tempo de viagem " x "). Este indicador pode ser considerado como uma solução particular da equação (II.46), com uma função de impedância igual a 1 (para $C_{ij} < x$) ou zero (para $C_{ij} > x$).

Entre os vários índices de acessibilidade, destacamos também a "acessibilidade gravitacional" de POULIT²⁸.

Este índice supõe que o usuário se define a partir dos custos de viagens e de logaritmos da utilidade em potencial (bens oferecidos, volume de emprego, etc.) da zona de destino.

A satisfação de um usuário da zona i , obtida por uma viagem à área j , é dada por:

$$S_{ij} = \lambda \log Q_j - C_{ij} = \lambda \log(Q_j e^{-\frac{C_{ij}}{\lambda}}) \quad (\text{II.47})$$

com Q_j = coeficiente de atração da zona j .

A satisfação média dos usuários oriundos da zona i será:

$$S_i = \lambda \log \sum_j Q_j e^{-\frac{C_{ij}}{\lambda}} \quad (\text{II.48})$$

Definindo a "acessibilidade gravitacional" do sistema, a partir da zona i , como:

$$G_i = \sum_j Q_j e^{-\frac{C_{ij}}{\lambda}} \quad (\text{II.49})$$

temos então uma relação ($S_i = \lambda \log G_i$), ligando a acessibilidade de uma zona e a satisfação dos usuários dessa zona em relação à rede de transportes.

II.5.3.2. Índices Globais de Acessibilidade:

Definindo um índice global A de acessibilidade da rede de transporte, a previsão da distribuição de viagens pode ser considerada também como resultado do seguinte problema de otimização:

$$\text{MAX } A(C_{ij}) \quad (\text{II.50})$$

sob as restrições de conservação, positividade e consistência dos fluxos de viagens.

Existem várias alternativas para a definição dos índices de acessibilidade global.

A partir dos índices A_i de acessibilidade local podem ser definidos os seguintes índices globais:

$$1) A = \sum_{i=1}^N A_i$$

$$2) A = \pi \sum_{i=1}^N A_i$$

$$3) A = \frac{\sum_i P_i A_i}{\sum_i P_i}$$

onde P_i é a população da zona i .

O critério 3) dá mais importância às áreas mais povoadas enquanto que os outros dois, por não fazerem uma ponderação com a população das zonas, dão mais vantagens a algumas zonas em relação às outras.

Outros índices podem ser definidos quando se deseja manter uma igualdade em relação às zonas quanto à acessibilidade relativa, para não prejudicar nenhuma delas, por exemplo:

$$A = \min_i \frac{1}{P_i} \sum_{j=1}^N \left[Q_j e^{-O_{ij}/\lambda} \right] = \min \frac{A_i}{P_i}$$

Também poder-se-iam definir índices globais de acessibilidade, considerando as acessibilidades às zonas (A^j), a partir do restante da área.

II.5.4. O Modelo de Hitchcock:

O problema clássico de transporte, também conhecido por modelo de Hitchcock (POTTS⁸³), pode ser interpretado como um problema de distribuição de viagens. A sua formulação como um problema de programação linear é a seguinte:

Primal:

$$\min \sum_i^M \sum_j^N C_{ij} T_{ij} = C \quad (\text{II.51})$$

s.a.

$$\sum_j^N T_{ij} = O_i, \quad i = 1, \dots, M$$

$$\sum_i^M T_{ij} = D_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{II.52})$$

$$T_{ij} \geq 0$$

Os algoritmos para a solução deste problema especial de programação linear já são bem conhecidos e documentados. Eles diferem principalmente nas técnicas de procura de uma solução básica inicial. A unicidade da solução deste problema é analisada, considerando-se o seu problema dual:

$$\text{Max } \sum_i O_i u_i + \sum_j D_j v_j$$

s.a.

(II.53)

$$u_i + v_j \leq C_{ij}$$

onde u_i e v_j são as variáveis duais.

As restrições do problema definem um conjunto de soluções compatíveis S (convexo). Uma solução básica viável (no sentido de programação linear), deve pertencer a esse conjunto, e as condições necessárias e suficientes para isto podem ser expressas em termos das variáveis duais:

$$u_i + v_j = C_{ij}$$

para todo (i, j) tal que T_{ij} é uma variável básica.

Como existem $M + N$ incógnitas para $M + N - 1$ equações, atribui-se um valor arbitrário para qualquer uma das incógnitas.

Uma solução básica viável é a solução ótima se :

$$u_i + v_j \leq C_{ij}$$

para todo (i, j) tal que T_{ij} é não básico.

A solução ótima é única se:

$$u_i + v_j < C_{ij}$$

para todo (i, j) tal que T_{ij} é não básico.

Uma condição suficiente para que a solução não seja única é que:

$$u_i + v_j = C_{ij}$$

para algum (i, j) tal que T_{ij} é não básico.

Qualquer outra solução ótima pode ser obtida fazendo T_{ij} diferente de zero com $u_i + v_j = C_{ij}$. Como se sabe, se existe mais de uma solução, qualquer combinação convexa das soluções encontradas também será solução do problema.

II.5.5. Maximização da Entropia:

Os modelos entrópicos supõem que uma distribuição equilibrada do sistema de transporte maximiza a entropia da rede.

Um dos modelos entrópicos bem conhecidos é o proposto por WILSON⁹⁸, inicialmente de modo intuitivo:

$$\text{MAX } H = - \sum_i \sum_j \frac{T_{ij}}{T} \log \frac{T_{ij}}{T} \quad (\text{II.54})$$

s.a.

$$T_{ij} \geq 0$$

$$\sum_j T_{ij} = O_i, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\sum_i T_{ij} = D_j, \quad j = 1, \dots, N$$

$$\sum_i \sum_j \frac{T_{ij}}{T} C_{ij} = \bar{C}$$

(II.55)

Pode-se mostrar facilmente que a função objetivo é estritamente côncava sobre \mathbb{R}^{N^2+} . Sendo o conjunto admissí-

vel convexo, quando existir uma solução, esta será única. A solução deste problema será da forma:

$$T_{ij} = A_i B_j O_i D_j e^{-\beta C_{ij}} \quad (\text{II.56})$$

onde:

$$A_i = e^{-\lambda_i} / O_i = 1 / \sum_j B_j D_j e^{-\beta C_{ij}} \quad (\text{II.57})$$

e

$$B_j = e^{-\lambda_j} / D_j = 1 / \sum_i A_i O_i e^{-\beta C_{ij}} \quad (\text{II.58})$$

com λ_i , λ_j e β sendo os multiplicadores de Lagrange, associados às equações de compatibilidade e de custos.

Existem várias discussões e aplicações da teoria entrópica na modelização de interações espaciais, que podem ser encontradas, entre outros, nos estudos propostos por CESÁRIO¹⁶; NIJKAMP⁷⁹; ERLANDER³⁰; WILLIAMS⁹⁶ e WILSON⁹⁹.

No capítulo IV, o fundamento teórico deste modelo será analisado, colocando em relevo sua conexão com vários outros modelos de otimização para previsão de distribuição de viagens.

II.6. MODELOS COMBINADOS DE DISTRIBUIÇÃO E ALOCAÇÃO DE VIAGENS:

Quando não é possível supor que os custos de deslocamentos são independentes dos volumes de viagens e do tama-

nho dos fluxos nos arcos da rede (fenômenos de saturação, etc.), é necessário resolver simultaneamente os problemas de distribuição e alocação de viagens.

O problema da distribuição e alocação combinadas pode ser formulado da seguinte maneira (ERLANDER³⁰):

$$\min C = \frac{1}{T} \sum_a S_a (v_a) v_a \quad (\text{II.59})$$

s.a.

$$\sum_j T_{ij} = O_i \quad (\text{II.60})$$

$$\sum_i T_{ij} = D_j$$

$$H = - \sum_i \sum_j \frac{T_{ij}}{T} \log \frac{T_{ij}}{T} \geq H_0 \quad (\text{II.61})$$

$$\sum_k x_k^{ij} = T_{ij} \quad (\text{II.62})$$

$$v_a = \sum_i \sum_j \sum_k \delta_{ak}^{ij} x_k^{ij} \quad (\text{II.63})$$

$$x_k^{ij}, T_{ij}, v_a \geq 0$$

onde

k é um caminho de i para j ;

$\delta_{ak}^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o arco } a \text{ pertence ao caminho } k \text{ de } i \text{ para } j; \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$

$$T_{ij} = \sum_k x_k^{ij}$$

$$c_{ij} T_{ij} = \sum_k c_k^{ij} x_k^{ij}$$

v_a = fluxo sobre o arco a ;

$S_a(v_a)$ = custo generalizado no arco a .

A restrição (II.61) impõe um nível mínimo à "entropia" da rede de transportes e pode ser substituída por uma restrição da forma:

$$P \left(\left[T_{ij} \right] \right) \geq P_0$$

onde $P \left(\left[T_{ij} \right] \right)$ é uma probabilidade de se ter uma distribuição de viagens $\left(\left[T_{ij} \right] \right)$ e P_0 é um nível mínimo esperado para esta probabilidade.

Uma solução para este problema, foi proposta por TOMLIN⁹⁴, baseada no princípio de decomposição de DANTZIG²¹. Na abordagem de FLORIAN, NGUYEN e FERLAND³⁵ é utilizado o algoritmo de FRANK, WOLFE³⁷ enquanto que na dissertação de doutorado de EVANS³² é proposto um método que consiste em resolver alternadamente um problema de distribuição e de alocação em caminhos mínimos.

CAPÍTULO III - MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE
DISTRIBUIÇÃO DE VIAGENS:

III.1. INTRODUÇÃO:

O interesse e a aplicação de técnicas iterativas de otimização têm sido consideráveis nas últimas décadas, em virtude, principalmente, do desenvolvimento ocorrido na tecnologia dos computadores.

Para resolver o problema de distribuição de viagens, têm sido utilizados vários métodos numéricos, desde os bem conhecidos métodos de fatores de crescimento até os métodos mais atuais que consideram as causas das viagens e mesmo o equilíbrio da rede de transportes, através da aplicação de processos iterativos na resolução dos modelos de otimização.

Os métodos de fatores de crescimento são baseados numa extrapolação da distribuição existente, através da utilização de um fator de crescimento correspondente às mudanças sócio-econômicas do sistema.

O objetivo geral dos métodos numéricos de resolução do problema de distribuição de viagens é o de encontrar multiplicadores que, a partir de uma matriz inicial $[T_{ij}^0]$ forneçam os elementos da matriz de previsão de viagens $[T_{ij}]$. Estes multiplicadores são obtidos por meio de um processo iterativo.

Uma matriz intermediária $[T_{ij}^{(n)}]$ é obtida a partir de uma matriz anterior $[T_{ij}^{(n-1)}]$, multiplicando-se cada um dos seus elementos por uma constante apropriada $x_{ij}^{(n)}$:

$$T_{ij}^{(n)} = \prod_{k=1}^n x_{ij}^{(k)} T_{ij}^0$$

Entre estes métodos podemos citar: método do fator uniforme, método do fator médio, método de Detroit, método de Fratar e método de Furness.

Os métodos diferem entre si na maneira de encontrar $x_{ij}^{(n)}$ e têm, como resultado, diferentes sequências de matrizes.

Considerando-se a matriz original $[T_{ij}^0]$:

T_{11}^0	T_{12}^0	\dots	T_{1J}^0	O_1
T_{21}^0	T_{22}^0	\dots	T_{2J}^0	O_2
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
T_{I1}^0	T_{I2}^0		T_{IJ}^0	O_I
D_1	D_2	\dots	D_J	T

onde:

T_{ij}^0 é o número de viagens da zona i para a zona j ;

O_i é o número de viagens produzidas na zona i ;

D_j é o número de viagens atraídas para a zona j ; e

T é o número total de viagens.

Os métodos citados acima têm sido usados na prã

tica e mostraram que, geralmente, as matrizes $(\begin{bmatrix} T_{ij}^{(0)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_{ij}^{(1)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_{ij}^{(2)} \end{bmatrix}, \dots)$ convergem, e que a soma das linhas e das colunas da matriz limite são iguais aos O's e D's requeridos, (neste capítulo será apresentado o estudo da convergência do método de Furness). A matriz limite é então tomada como sendo a matriz de previsão $\begin{bmatrix} T_{ij} \end{bmatrix}$ e o $\lim_{n \rightarrow \infty} (\prod_{k=1}^n x_{ij}^{(k)})$ como sendo o fator de multiplicação para $\begin{bmatrix} T_{ij}^0 \end{bmatrix}$, (EVANS³¹).

Este fator de multiplicação para T_{ij}^0 é tomado, muitas vezes, na forma $r_i s_j$ (por referência ao modelo gravitacional) e então:

$$T_{ij} = r_i s_j T_{ij}^0 \quad (\text{III.1})$$

O problema transforma-se então em encontrar os r's e s's, fatores de balanceamento, devendo satisfazer as condições de conservação:

$$r_i \sum_j s_j T_{ij} = O_i, \text{ para cada } i \quad (\text{III.2})$$

$$s_j \sum_i r_i T_{ij} = D_j, \text{ para cada } j \quad (\text{III.3})$$

Estas equações não podem ser resolvidas explicitamente, mas a existência e a unicidade das soluções foram provadas por MURCHLAND⁷⁶ e EVANS³¹.

III.1.1.1. Unicidade da Matriz $\begin{bmatrix} T_{ij} \end{bmatrix}$:

Sendo dados:

- uma matriz $\left[T_{ij}^O \right]$, (MxN), cujos elementos são todos não negativos;

- um conjunto de números O_1, O_2, \dots, O_M , todos positivos, e cuja soma é

$$\sum_{i=1}^M O_i = T ;$$

- um conjunto de números D_1, D_2, \dots, D_N , todos positivos, tais que:

$$\sum_{j=1}^N D_j = T$$

Então, pode-se provar que, existindo uma matriz $\left[T_{ij} \right]$, ela é única, com os T_{ij} satisfazendo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N T_{ij} &= O_i & , i = 1, \dots, M \\ \sum_{i=1}^M T_{ij} &= D_j & , j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad \text{(III.4)}$$

e

$$T_{ij} = r_i s_j T_{ij}^O \quad \text{(III.5)}$$

onde r_i e s_j são números positivos, se T_{ij}^O é positivo.

PROVA:

Qualquer dos r_i 's e s_j 's da equação (III.1) pode ser multiplicado por uma constante arbitrária, sem alterar os T_{ij} 's, desde que todos os outros r 's e s 's sejam modificados para compensar. Pode-se assumir que $s_1 = 1$, se os T_{ij}^O não são nulos.

Supondo que existam duas matrizes na forma de (III.1), satisfazendo (III.2) e (III.3), mas diferindo em pelo menos um elemento, mostra-se que isto leva a uma contradição.

Considerando os ij -ésimos elementos supostos estritamente positivos das duas matrizes como $r_i s_j T_{ij}^0$ e $R_i S_j T_{ij}^0$, e supondo que :

- o elemento em que elas diferem é o do canto esquerdo superior;
- $s_1 = S_1 = 1$;
- $r_1 > R_1$ e $N \geq M$;

então, a diferença entre estas duas matrizes é uma matriz $M \times N$, cujas somas de linhas e de colunas são nulas (por (III.4) e (III.5)):

$$\begin{array}{cccc|c}
 (r_1 - R_1)T_{11} & (r_1 s_2 - R_1 S_2)T_{12} & \dots & (r_1 s_N - R_1 S_N)T_{1N} & 0 \\
 (r_2 - R_2)T_{21} & (r_2 s_2 - R_2 S_2)T_{22} & \dots & (r_2 s_N - R_2 S_N)T_{2N} & 0 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 (r_M - R_M)T_{M1} & (r_M s_2 - R_M S_2)T_{M2} & \dots & (r_M s_N - R_M S_N)T_{MN} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & & 0 & 0
 \end{array}$$

Para todo $T_{ij} > 0$.

Desde que $r_1 > R_1$ e a soma da primeira linha é zero, então existe algum j para o qual $r_1 s_j < R_1 S_j$. Seja, por

exemplo, $j = 2$. Então:

$$1 < \frac{r_1}{R_1} < \frac{s_2}{s_2}$$

Como a soma da segunda coluna é zero, então deve haver algum r_i para o qual $r_i s_2 > R_i s_2$, por exemplo r_2 :

$$1 < \frac{r_1}{R_1} < \frac{s_2}{s_2} < \frac{r_2}{R_2}$$

Mas os dois primeiros termos da segunda linha são agora positivos, então deve existir um s_3 tal, que:

$$\frac{s_3}{s_3} > \frac{r_2}{R_2}$$

Este raciocínio pode continuar até que todos os r 's sejam incluídos na desigualdade:

$$1 < \frac{r_1}{R_1} < \frac{s_2}{s_2} < \dots < \frac{s_M}{s_M} < \frac{r_M}{R_M}$$

Portanto $r_i > R_i$, para todo i , e então:

$$\sum_{i=1}^M (r_i - R_i) T_{i1} > 0,$$

o que contradiz o fato de que a soma da primeira coluna é zero. Conseqüentemente não existe mais do que uma matriz $[T_{ij}]$.

III.1.2. Análise da Forma Funcional Proposta:

Qualquer solução $T = [T_{ij}]$ que tem a forma

$$T_{ij} = r_i s_j T_{ij}^0$$

para todo i e j é chamada "solução interior". As soluções não expressas nessa forma são chamadas "soluções de contorno".

Pode se mostrar que, se \mathbb{T} é uma solução do problema:

$$T_{ij} \geq 0 \quad \text{para todo } i \text{ e } j$$

$$\sum_{j=1}^N T_{ij} = O_i \quad \text{para todo } i$$

$$\sum_{i=1}^M T_{ij} = D_j \quad \text{para todo } j$$

então existe uma solução de contorno se, e somente se, para algum (k, l)

$$T_{kl}^0 > 0 \quad \text{e} \quad T_{kl} = 0$$

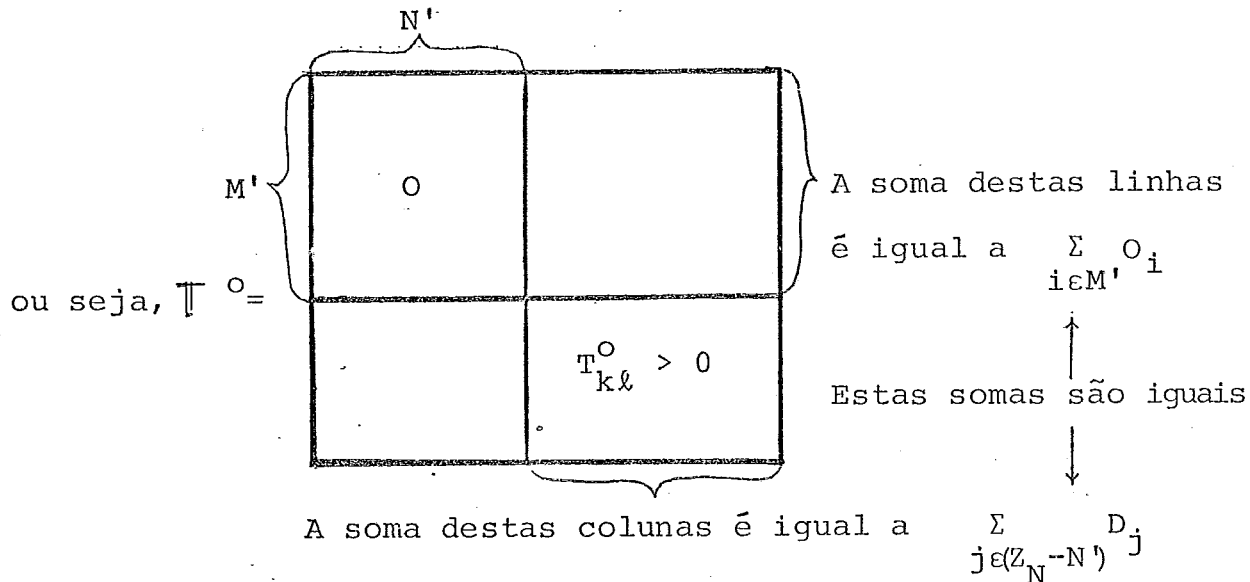
Se existe uma solução \mathbb{T} e se $T_{kl}^0 > 0$, então uma condição necessária e suficiente para que T_{kl} seja zero é que existam conjuntos M' e N' de inteiros positivos tais que M' esteja contido no conjunto $Z_M = \{1, 2, \dots, M\}$ e N' esteja contido no conjunto $Z_N = \{1, 2, \dots, N\}$ e tais que:

a) $T_{ij}^0 = 0$ para todo (i, j) contido em $M' \times N'$

b) $\sum_{i \in M'} O_i = \sum_{j \in (Z_N - N')} D_j$

c) $\sum_{i \in (Z_M - M')} O_i = \sum_{j \in N'} D_j$

(k, l) pertence a $(Z_m - M') \times (Z_N - N')$



Qualquer solução \mathbb{T} pode ser expressa sob a forma

$$T_{ij} = r_i s_j \tilde{T}_{ij} \quad \text{para todo } i \text{ e } j$$

onde

$$\tilde{\mathbb{T}} = [\tilde{T}_{ij}] \quad \text{é a matriz } M \times N \text{ obtida fazendo:}$$

$$\tilde{T}_{ij} = 0 \quad \text{para todo } (i, j) \text{ tal que } T_{ij} = 0$$

e

$$\tilde{T}_{ij} = T_{ij} \quad \text{para todo } (i, j) \text{ tal que } T_{ij} > 0$$

\mathbb{T} é uma solução interior se, e somente se, $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}^0$. Este resultado permitirá eliminar imediatamente, da análise de distribuição, as ligações (i, j) tais que:

1) $i \in M'$ e $j \in N'$

2) ou $i \in (Z_m - M')$ e $j \in (Z_n - N')$

para as quais a solução será $T_{ij} = 0$

Se a distribuição $[T_{ij}^0]$ é o resultado da utilização prévia de um modelo gravitacional exponencial, esta situação não poderá ocorrer, a não ser que algum dos Θ_i ou D_j seja nulo. Neste caso, excluir-se-ia, da análise de distribuição, as ligações originadas na zona i ou destinadas para a zona j .

III.2. MÉTODOS DE FATORES DE CRESCIMENTO

III.2.1. Método do Fator Uniforme:

O fator de crescimento F_c é suposto uniforme para toda a área de estudo.

Matematicamente, este método pode ser formulado por:

$$T_{ij} = F_c T_{ij}^0 \quad (\text{III.6})$$

onde:

$$F_c = \frac{T}{T^0} = \text{fator de crescimento};$$

$$T_{ij} = \text{número futuro de viagens de } i \text{ para } j;$$

$$T_{ij}^0 = \text{número atual de viagens de } i \text{ para } j;$$

T = número total no futuro de viagens na área em estudo;

T^0 = número total atual de viagens na área em estudo.

Trata-se de um método bastante simples mas que não pode ser aplicado em regiões em fase de desenvolvimento rápido, onde o crescimento não tem comportamento uniforme.

III.2.2. Método do Fator Médio:

Este método utiliza um fator de crescimento para cada zona da área em estudo e a sua formulação matemática é a seguinte:

$$T_{ij} = T_{ij}^0 \frac{r_i + s_j}{2} \quad (\text{III.7})$$

onde

$$r_i = \frac{O_i}{O_i^0} \quad \text{e} \quad s_j = \frac{D_j}{D_j^0}$$

r_i e s_j são os fatores de crescimento das zonas i e j ;

O_i e D_j representam as viagens futuras com origem em i ou destino em j ;

O_i^0 e D_j^0 representam as viagens atuais com origem em i ou destino em j .

Este método determina um novo fator de crescimento, por um processo iterativo, sempre que o total de viagens calculadas for diferente do valor estimado:

$$r_i^{(n+1)} = \frac{r_i^{(n)} \sum_j T_{ij}^0}{\sum_j T_{ij,n}} \quad (\text{III.8})$$

onde n é o número da iteração.

Este processo continua até que os novos valores dos fatores de correção se aproximem de 1 .

III.2.3. Método de Fratar:

Este método foi desenvolvido por FRATAR³⁸ (1954) e é considerado como o mais desenvolvido entre os métodos de fatores de crescimento mas não é usado, normalmente, para estimar intercâmbios de viagens intra-urbanas, exceto para pequenas cidades, porque ele não é sensível a mudanças nas propriedades da rede de transporte. A sua utilização é grande, no entanto, para estimar a distribuição de viagens inter-urbanas.

O modelo pode ser formulado como:

$$T_{ij} = r_i s_j \frac{1}{2} \left(\frac{O_i^o}{\sum_j T_{ij}^o s_j} + \frac{D_j^o}{\sum_i T_{ij}^o r_i} \right) T_{ij}^o \quad (\text{III.9})$$

onde

$$r_i = \frac{O_i}{O_i^o} \quad e \quad s_j = \frac{D_j}{D_j^o}$$

Se a matriz calculada por (III.9) contrariar as condições :

$$\sum_j T_{ij} = O_i \quad e \quad \sum_i T_{ij} = D_j$$

o cálculo deve ser feito empregando-se a seguinte expressão:

$$T_{ij}^{(n+1)} = r_i^{(n+1)} s_j^{(n+1)} \frac{1}{2} \left(\sum_j \frac{\sum T_{ij}^o}{\sum_j T_{ij}^o s_j^{(n+1)}} + \sum_i \frac{\sum T_{ij}^o}{\sum_i T_{ij}^o r_i^{(n+1)}} \right) T_{ij}^o \quad (\text{III.10})$$

onde

$$r_i^{(n+1)} = \frac{O_i^0}{\sum_j T_{ij}^{(n)}} \quad e \quad s_j^{(n+1)} = \frac{D_j^0}{\sum_i T_{ij}^{(n)}}$$

Este procedimento deve continuar até que os valores dos fatores de correção se aproximem de 1.

III.3. MÉTODO DE NEWTON:

O problema de distribuição de viagens pode ser considerado equivalente à resolução do sistema de equações (III.1, III.2 e III.3) e então podem ser utilizados os métodos gerais de resolução de um sistema de equações.

O método de Newton, que é quadraticamente convergente na vizinhança da solução (isto é, se o método é iniciado com valores com um erro de 10^{-1} , a primeira iteração produzirá valores com um erro de 10^{-2} , a segunda de 10^{-4} e a terceira de 10^{-8}) é um dos mais utilizados.

Sendo f uma função vetorial, de dimensão $(n+1)$, da variável y também de dimensão $(n+1)$, e supondo que:

$$f(y) = \begin{bmatrix} f_1(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) \\ f_2(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) \\ \vdots \\ f_{n+1}(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{III.11})$$

o método de Newton, para resolver o problema, considera a iteração:

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + \Delta y^{(n)} \quad (\text{III.12})$$

onde Δy^n é definido por:

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \left[y^{(n)} \right] \right\} \Delta y^{(n)} = - f \left[y^{(n)} \right] \quad (\text{III.13})$$

e n representa os índices indicativos das iterações do método.

Colocando as equações (III.2) e (III.3) na forma (III.14) e considerando $(n+1) = (M+N)$, tem-se:

$$\begin{aligned} f_1 &= s_1 \sum_{i=1}^M r_i^T i_1 - D_1 \\ f_2 &= s_2 \sum_{i=1}^M r_i^T i_2 - D_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ f_N &= s_N \sum_{i=1}^M r_i^T i_N - D_N \\ f_{N+1} &= r_1 \sum_{j=1}^N s_j^T 1_j - O_1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ f_{N+M} &= r_M \sum_{j=1}^N s_j^T M_j - O_M \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

O problema consiste em encontrar os valores positivos $r_1, r_2, \dots, r_M, s_1, \dots, s_N$ tais que f_k seja zero, $k = 1, \dots, M + N$.

A matriz $\left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]$ correspondente ao conjunto de equações (III.14) é singular, o que significa que elas não estão na forma desejável para a aplicação do método de Newton.

Desde que $\sum_{j=1}^N f_j = \sum_{i=1}^M f_{N+1}$ é claro que uma raiz de qualquer das $M + N - 1$ equações de (III.14) é também raiz da equação restante. Conseqüentemente, pode-se retirar uma das equações de (III.14) para achar $\left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]$.

A escolha da equação a ser removida obedece a determinados critérios. Uma regra para esta escolha é dada por ROBILLARD e STEWART⁸⁸.

O método de Newton é localmente convergente mas não é necessariamente globalmente convergente, isto é, ele pode divergir se for iniciado muito longe da solução. Este fato conduziu à pesquisa de métodos de resolução numérica especializados para este problema.

III.4. MÉTODO DE FURNESS:

Este algoritmo é empregado para resolver o sistema de equações (III.1), (III.2) e (III.3), computando uma sequência de matrizes $T_{ij}^{(1)}$, $T_{ij}^{(2)}$, ..., $T_{ij}^{(n)}$, da seguinte forma:

$$T_{ij}^{(1)} = \frac{O_i}{\sum_k T_{ik}^0} T_{ij}^0 \quad (\text{III.15})$$

$$T_{ij}^{(2n)} = \frac{D_j}{\sum_k T_{kj}^{(2n-1)}} T_{ij}^{(2n-1)}, \quad n \geq 1 \quad (\text{III.15})$$

$$T_{ij}^{(2n+1)} = \frac{O_i}{\sum_k T_{ik}^{(2n)}} T_{ij}^{(2n)}, \quad n \geq 1 \quad (\text{III.15})$$

com $T_{ij}^{(m)}$ tendendo a um limite quando $m \rightarrow \infty$.

O princípio deste processo iterativo é que, a cada estágio alternado, as somas das linhas devem ser iguais aos O's e as somas das colunas iguais aos D's.

Portanto, a soma das linhas de $T_{ij}^{(m)}$ serão iguais aos O's se m é ímpar e as somas das colunas serão iguais aos D's se m é par:

$$\sum_j T_{ij}^{(2n+1)} = O_i \quad \forall i \quad \text{e} \quad n \geq 0 \quad (\text{III.16})$$

$$\sum_i T_{ij}^{(2n)} = D_j \quad \forall j \quad \text{e} \quad n \geq 1 \quad (\text{III.17})$$

Depois de cada iteração, exceto a primeira, a soma de todos os elementos permanece inalterável:

$$\sum_i \sum_j T_{ij}^{(m)} = \sum_i O_i = \sum_j D_j = T, \quad \forall m \geq 1 \quad (\text{III.18})$$

Nas iterações ímpares a concordância entre a soma de qualquer linha i e o correspondente O_i é obtida pela multiplicação de cada elemento da linha por O_i dividido pela soma

da linha.

Designando estes fatores de multiplicação por r ,
define-se:

$$r_i^{(1)} = \frac{O_i}{\sum_j T_{ij}^0}, \quad \forall i \quad (III.19)$$

$$r_i^{(n+1)} = \frac{O_i}{\sum_j T_{ij}^{(2n)}}, \quad \forall i \text{ e } n \geq 1$$

de forma que:

$$T_{ij}^{(1)} = r_i^{(1)} T_{ij}^0, \quad \forall i, j \quad (III.20)$$

$$T_{ij}^{(2n+1)} = r_i^{(n+1)} T_{ij}^{(2n)}, \quad \forall i, j \text{ e } n \geq 1$$

Os fatores de multiplicação correspondentes nas
iterações pares são designados por s , e define-se:

$$s_j^{(n)} = \frac{D_j}{\sum_i T_{ij}^{(2n-1)}}, \quad \forall j \text{ e } n \geq 1 \quad (III.21)$$

tal que

$$T_{ij}^{(2n)} = s_j^{(n)} T_{ij}^{(2n-1)} \quad (III.22)$$

Por (III.20) e (III.22), chega-se a:

$$T_{ij}^{(2n)} = \left(\prod_{k=1}^n r_i^{(k)} \right) \left(\prod_{\ell=1}^n s_j^{(\ell)} \right) T_{ij}^0, \quad \forall i, j \text{ e } n \geq 1$$

(III.23)

$$T_{ij}^{(2n+1)} = \left(\prod_{k=1}^{n+1} r_i^{(k)} \right) \left(\prod_{\ell=1}^n s_j^{(\ell)} \right) T_{ij}^0, \quad \forall i, j \text{ e } n \geq 1$$

Outra tentativa de introdução de processos iterativos surgiu como resultado do estudo "Detroit Area Traffic Study", em 1956 (CATANESE¹⁴).

Este método, no entanto, parece ser menos eficiente que o método de Furness, além de requerer o dobro de trabalho a cada iteração, sendo a sua formulação matemática:

$$T_{ij}^{(n+1)} = \frac{\sum_{k\ell} T_{k\ell}^{(n)}}{T} \cdot \frac{O_i}{\sum_k T_{ik}^{(n)}} \cdot \frac{D_j}{\sum_k T_{kj}^{(n)}} \cdot T_{ij}^{(n)}, \quad n \geq 1 \quad \text{(III.24)}$$

III.5. CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE FURNESS:

Como este método tem sido amplamente utilizado na prática, torna-se interessante considerar tanto as questões de convergência teórica como prática.

A questão de convergência prática do método (levando em conta os erros de arredondamento do computador) foi amplamente pesquisada por EVANS³¹ e ROBILLARD-STEWART⁸⁸ e deve ser considerada em relação ao grau de precisão requerido para a solução.

Em relação à convergência teórica, EVANS³¹ utilizou três lemas (considerando o caso de $[T_{ij}]$ positiva) da seguinte maneira: o primeiro provando que existe um limite inferior para $T_{ij}^{(m)}$, o segundo que $T_{ij}^{(m)}$ tende para um limite quando $m \rightarrow \infty$, e o terceiro mostrando que a matriz limite é a matriz $[T_{ij}^*]$ procurada.

LEMA 1 - Existe um número $\gamma > 0$, tal que $T_{ij}^{(m)} \geq \gamma$ para todo i, j e m .

Seja:

$$R_i^{(n)} = \prod_{k=1}^n r_i^{(k)} \quad \text{para cada } i \text{ e } n \geq 1 \quad (\text{III.25})$$

$$S_j^{(n)} = \prod_{\ell=1}^n s_j^{(\ell)} \quad \text{para cada } j \text{ e } n \geq 1 \quad (\text{III.26})$$

$$S_j^{(0)} = 1 \quad \text{para cada } j.$$

Então de (III.23):

$$T_{ij}^{(2n)} = R_i^{(n)} S_j^{(n)} T_{ij}^0, \quad \forall i, j \text{ e } n \geq 1 \quad (\text{III.27})$$

$$T_{ij}^{(2n+1)} = R_i^{(n+1)} S_j^{(n)} T_{ij}^0, \quad \forall i, j \text{ e } n \geq 0 \quad (\text{III.28})$$

Para provar este lema, é suficiente mostrar que existe um número $\gamma > 0$ tal que:

$$R_i^{(n)} S_j^{(n)} \geq \gamma' \quad \forall i, j \text{ e } n \geq 1 \quad (\text{III.29})$$

e

$$R_i^{(n+1)} S_j^{(n)} \geq \gamma' \quad \forall i, j \text{ e } n \geq 1 \quad (\text{III.30})$$

Pode-se fazer então:

$$\gamma = \min_{i,j,k,l} \{\gamma, T_{ij}^0, T_{kl}^{(1)}\}$$

Como por (III.16) e por (III.28):

$$\sum_j R_i^{(n+1)} S_j^{(n)} T_{ij}^0 = O_i \quad \forall i \text{ e } n \geq 0$$

então

$$R_i^{(n+1)} \sum_j S_j^{(n)} T_{ij}^0 = O_i$$

ou

$$R_i^{(n+1)} \max_j \{S_j^{(n)}\} \sum_j T_{ij}^0 \geq O_i$$

e, conseqüentemente:

$$R_i^{(n+1)} \geq \frac{O_i}{\max_j \{S_j^{(n)}\} \sum_j T_{ij}^0} \quad \forall i \text{ e } n \geq 0 \quad (\text{III.31})$$

Substituindo n por $(n-1)$ pode se reescrever (III.31) como:

$$R_i^{(n)} \geq \frac{O_i}{\max_j \{S_j^{(n-1)}\} \sum_j T_{ij}^0} \quad \forall i \text{ e } n \geq 1 \quad (\text{III.32})$$

Analogamente, por (III.17) e (III.27), tem-se:

$$\sum_i R_i^{(n)} S_j^{(n)} T_{ij}^0 = D_j \quad \forall j \text{ e } n \geq 1$$

e portanto:

$$S_j^{(n)} \geq \frac{D_j}{\max_i \{R_i^{(n)}\} \sum_i T_{ij}^0} \quad \forall j \text{ e } n \geq 1 \quad (\text{III.33})$$

O produto de (III.32) por (III.33), é:

$$R_i^{(n)} S_j^{(n)} \geq \frac{O_{ij}^{D_j}}{\max_i \{R_i^{(n)}\} \max_j \{S_j^{(n-1)}\} (\sum_i T_{ij}^O) (\sum_j T_{ij}^O)}, \quad \forall i, j \text{ e } n \geq 1 \quad (\text{III.34})$$

e o de (III.31) por (III.33) é :

$$R_i^{(n+1)} S_j^{(n)} \geq \frac{O_{ij}^{D_j}}{\max_i \{R_i^{(n)}\} \max_j \{S_j^{(n)}\} (\sum_i T_{ij}^O) (\sum_j T_{ij}^O)}, \quad \forall i, j \text{ e } n \geq 1 \quad (\text{III.35})$$

Pela equação (III.18):

$$\sum_i \sum_j T_{ij}^{(2n)} = T \quad \text{para } n \geq 1$$

portanto

$$T_{ij}^{(2n)} \leq T, \quad \forall i, j \text{ e } n \geq 1$$

e por (III.27) :

$$R_i^{(n)} S_j^{(n)} T_{ij}^O \leq T$$

então,

$$\max_i \{R_i^{(n)}\} \max_j \{S_j^{(n)}\} \min_{ij} \{T_{ij}^O\} \leq T$$

consequentemente:

$$\frac{1}{\max_i \{R_i^{(n)}\} \max_j \{S_j^{(n)}\}} \geq \frac{1}{T} \min_{ij} \{T_{ij}^O\} \quad \text{para } n \geq 1 \quad (\text{III.36})$$

Da mesma forma, pela equação (III.18):

$$\sum_i \sum_j T_{ij}^{(2n-1)} = T \quad \text{para } n \geq 1$$

e com raciocínio análogo ao de (III.36):

$$\frac{1}{\max_i \{R_i^{(n)}\} \max_j \{S_j^{(n-1)}\}} \geq \frac{1}{T} \min_{ij} \{T_{ij}^0\} \quad \text{para } n \geq 1 \quad (\text{III.37})$$

Substituindo (III.37) em (III.34), obtêm-se:

$$R_i^{(n)} S_j^{(n)} \geq \frac{O_{ij} D_j \min_{ij} \{T_{ij}^0\}}{(\sum_i T_{ij}^0) (\sum_j T_{ij}^0) T} \quad \text{para cada } i, j \text{ e } n \geq 1 \quad (\text{III.38})$$

e por (III.36) e (III.35) :

$$R_i^{(n+1)} S_j^{(n)} \geq \frac{O_{ij} D_j \min_{ij} \{T_{ij}^0\}}{(\sum_i T_{ij}^0) (\sum_j T_{ij}^0) T} \quad \text{para cada } i, j \text{ e } n \geq 1 \quad (\text{III.39})$$

Escrevendo:

$$\gamma'_{ij} = \frac{O_{ij} D_j \min_{ij} \{T_{ij}^0\}}{(\sum_i T_{ij}^0) (\sum_j T_{ij}^0) T} > 0, \quad \forall i, j$$

e sendo

$$\gamma' = \min_{ij} \{ \gamma'_{ij} \}$$

então (III.38) e (III.39) levam imediatamente a (III.29) e (III.30), e como ,

$$\gamma = \min_{i,j,k,l} \{ \gamma'_{ij} T_{ij}^0, T_{kl}^{(1)} \}$$

então:

$$T_{ij}^{(m)} \geq \gamma, \quad \forall i, j \text{ e } m \geq 1$$

LEMA 2 - $T_{ij}^{(m)}$ tende ao limite T'_{ij} quando $m \rightarrow \infty$.

As equações (III.27) e (III.28) do Lema 1 mostram que, se existem os limites $\lim_{n \rightarrow \infty} R_i^{(n)}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} S_j^{(n)}$ para todo i e j , então:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T_{ij}^{(m)} = (\lim_{n \rightarrow \infty} R_i^{(n)}) (\lim_{n \rightarrow \infty} S_j^{(n)}) T_{ij}^0, \quad \forall i, j.$$

Seja

$$r_i^{(n)} = 1 + \xi_i^{(n)} \quad \text{para cada } i \text{ e } n \geq 1 \quad (\text{III.40})$$

$$s_j^{(n)} = 1 + \eta_j^{(n)} \quad \text{para cada } j \text{ e } n \geq 1 \quad (\text{III.41})$$

Sabe-se que $R_i^{(n)} = \prod_{k=1}^n r_i^{(k)}$ converge para $n \rightarrow \infty$, se $\sum_{k=1}^n |\xi_i^{(k)}|$ converge e analogamente, $S_j^{(n)} = \prod_{\ell=1}^n s_j^{(\ell)}$ converge se $\sum_{\ell=1}^n |\eta_j^{(\ell)}|$ converge.

Demonstra-se (EVANS³¹) que as somas dos ξ 's e η 's são absolutamente convergentes e, portanto:

$$r_i^{(n)} = \prod_{k=1}^n r_i^{(k)} = \prod_{k=1}^n (1 + \xi_i^{(k)})$$

é convergente para cada i , quando $n \rightarrow \infty$.

Seja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_i^{(n)} = R_i \quad \text{para todo } i \quad (\text{III.42})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_j^{(n)} = S_j \quad \text{para todo } j \quad (\text{III.43})$$

então por (III.27) e (III.28) chega-se a:

$$T'_{ij} = \lim_{m \rightarrow \infty} T_{ij}^{(m)} = R_i S_j T_{ij}^O \quad \text{para todo } i \text{ e } j .$$

LEMA 3 - $\left[T'_{ij} \right] = \left[\lim_{m \rightarrow \infty} T_{ij}^{(m)} \right]$ satisfaz as condições (III.4) e (III.5) que definem uma única matriz $\left[T^*_{ij} \right]$. Portanto $\left[T^*_{ij} \right]$ sempre existe.

Pelo Lema 2, tem-se que $\left[T'_{ij} \right] = \left[r_i s_j T_{ij}^O \right]$ e, portanto, falta apenas mostrar que as somas das linhas de T'_{ij} são iguais aos O_i 's e das colunas iguais aos D_j 's .

$$\sum_j T'_{ij} = \sum_j \lim_{m \rightarrow \infty} T_{ij}^{(m)} = \sum_j \lim_{n \rightarrow \infty} T_{ij}^{(2n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_j T_{ij}^{(2n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} O_i \quad \text{para}$$

todo i .

De maneira análoga, chega-se a

$$\sum_i T'_{ij} = D_j$$

e portanto $\left[T'_{ij} \right]$ satisfaz as condições (III.4) e então

$$\left[T'_{ij} \right] = \left[T^*_{ij} \right] \quad \text{para todo } i \text{ e } j .$$

III.6. COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUÇÃO

MÉTODO	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	CONVERGÊNCIA	UTILIZAÇÃO
Fator Uniforme	$T_{ij} = F_c T_{ij}^0$ com $F_c = \frac{T}{T^0}$	imediate	abandonado
Fator Médio	$T_{ij}^{n+1} = \frac{x_i^{n+1} + s_j^{n+1}}{2}$ com $r_i^1 = 1$ e $s_j^1 = 1$ $x_i^{(n+1)} = \frac{x_i^{(n)} \sum_j T_{ij}^0}{\sum_j T_{ij}^{(n)}}$ e $s_j^{(n+1)} = \frac{s_j^{(n)} \sum_i T_{ij}^0}{\sum_i T_{ij}^{(n)}}$	não garantida para satisfazer as condições de conservação.	Pouco utilizado
Fratar	$T_{ij}^{n+1} = r_i^{n+1} s_j^{n+1} \frac{1}{2} (\sum_j \frac{0_i}{\sum_j T_{ij}^0 s_j^{n+1}} + \sum_i \frac{D_i}{\sum_i T_{ij}^0 r_i^{n+1}}) T_{ij}^0$ com $r_i^{n+1} = \frac{0_i}{\sum_j T_{ij}^0} e s_j^{n+1} = \frac{D_j}{\sum_i T_{ij}^0}$ e $r_i^1 = s_j^1 = 1$	garantida mas lenta	Transporte regional (viagens urbanas por autoestradas).
Detroit	$T_{ij}^{n+1} = r_i^{n+1} \cdot s_j^{n+1} \cdot (\sum_h \sum_l \frac{T_{ih}^0 T_{hl}^0}{T_{ij}^0}) \cdot T_{ij}^0$ com $r_i^{n+1} = \frac{0_i}{\sum_h T_{ih}^0} e s_j^{n+1} = \frac{D_j}{\sum_h T_{hj}^0}$ e $r_i^1 = s_j^1 = 1$	garantida	Transporte urbano
Kruithof	$T_{ij}^{(n+1)} = r_i^{(n+1)} s_j^{(n+1)} T_{ij}^0$ $r_i^{(n+1)} = \frac{0_i}{\sum_j T_{ij}^0 s_j^{(n)}}$ $s_j^{(n+1)} = \frac{D_j}{\sum_i T_{ij}^0 r_i^{(n+1)}}$ ($r_i^0 = s_j^0 = 1$)	garantida para $ T_{ij}^0 > 0$	Telecomunicações
Furness	$T_{ij}^{(1)} = r_i^{(1)} T_{ij}^0$ com $r_i^1 = s_j^1 = 1$ $T_{ij}^{(2n)} = s_j^{(n)} T_{ij}^{(2n-1)}$ com $s_j^{(n)} = \frac{D_j}{\sum_i T_{ij}^{(2n-1)}}$ $T_{ij}^{(2n+1)} = r_i^{(n+1)} T_{ij}^{(2n)}$ com $r_i^{(n+1)} = \frac{0_i}{\sum_j T_{ij}^{(2n)}}$	garantida para $ T_{ij}^0 > 0$	Transportes Urbanos e Regionais.

III.7. UMA INTERPRETAÇÃO DOS MÉTODOS ITERATIVOS DE RESOLUÇÃO:

Como o problema de alocação de tráfego em uma rede pode ser resolvido por meio do algoritmo de "out-of-kilter", que é um algoritmo primal-dual da programação linear, pergunta-se se o problema da distribuição pode ser resolvido por meio de métodos primais-duais de programação não linear ou até de programação geométrica.

Um problema qualquer da programação linear pode ser formulado em sua forma primal, ou então, na sua forma dual correspondente:

$$\begin{array}{l} \text{PRIMAL} \left\{ \begin{array}{l} \min \quad cx \\ \text{s.a.} \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{DUAL} \left\{ \begin{array}{l} \max \quad yb \\ \text{s.a.} \\ yA \leq c \\ y \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Na teoria da dualidade, utiliza-se frequentemente a noção de restrições duais, que são os pares :

$$a_i x \geq b_i \quad \text{e} \quad y_i \geq 0$$

ou

$$y a_j \leq c_j \quad \text{e} \quad x_j \geq 0$$

ou seja, pode-se dizer que y_i é a variável dual da restrição de índice i e que x_j é a variável dual da restrição de índice j .

Se são encontrados x^* e y^* viáveis para os problemas primal e dual, respectivamente, e além disso $cx^* = y^*b$, então x^* e y^* são soluções ótimas dos seus respectivos proble-

mas e:

$$a_i x_i^* > b_i \implies y_i^* = 0$$

$$y_i^* > 0 \implies a_i x_i^* = b_i$$

A solução do problema é caracterizada simultaneamente através de condições sobre as variáveis primais e duais do mesmo.

O problema de distribuição de viagens com a formulação entrópica:

$$\text{Max}_{T_{ij}} \left(-\sum_{ij} T_{ij} \log T_{ij} \right) \longrightarrow \text{Max}_{T_{ij}} H_0 \quad (\text{III.44})$$

sujeito a

$$\sum_i T_{ij} = D_j$$

$$\sum_j T_{ij} = \Theta_i \quad (\text{III.45})$$

$$T_{ij} \geq 0$$

pode ser modificado para

$$H_0 = \mathcal{H}_0 - T \log T \quad (\text{III.46})$$

com

$$\mathcal{H}_0 = -T \left(\sum_i \sum_j t_{ij} \log t_{ij} \right) \quad (\text{III.47})$$

e

$$t_{ij} = T_{ij}/T \quad (\text{III.48})$$

O problema pode então ser reescrito como:

$$\text{Max}_{t_{ij}} \mathcal{F}_0 \quad (\text{III.49})$$

sujeito a

$$t_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N t_{ij} = 1$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (\delta_{i\ell} - \bar{D}_\ell) t_{ki} = 0, \quad \ell = 1, 2, \dots, N \quad (\text{III.50})$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^N (\delta_{ki} - \bar{O}_k) t_{i\ell} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

onde

$$\bar{O}_i = O_i/T, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\bar{D}_j = D_j/T, \quad j = 1, \dots, N$$

e $\delta_{k\ell}$ é o operador de Kronecker .

Esta formulação corresponde ao problema dual da programação geométrica do problema primal (ver capítulo IV e Anexo 1):

$$\min_{\underline{u}, \underline{v}} K_0(\underline{u}, \underline{v})$$

sujeito a:

$$u_i > 0, \quad i = 1, \dots, N$$

(III.51)

$$v_j > 0, \quad j = 1, \dots, N$$

onde

$$K_0(\underline{u}, \underline{v}) = T \log \left(\sum_i^N \sum_j^N u_i v_j \right) \Phi \quad (\text{III.52})$$

e

$$\Phi = \prod_{h=1}^N (u_h)^{-\bar{O}_h} \prod_{k=1}^N (v_k)^{-\bar{D}_k} \quad (\text{III.53})$$

As relações de dualidade da programação geométrica entre as soluções dos dois problemas são:

$$\mathcal{K}_0(t_{ij}^*) = K_0(\underline{u}^*, \underline{v}^*) \quad (\text{III.54})$$

e

$$t_{ij}^* = u_i^* v_j^* \Phi^* / \mathcal{K}_0^* \quad (\text{III.55})$$

Estas relações de dualidade mostram que a solução dual do problema é da forma:

$$t_{ij} = r_i s_j t_{ij}^0 \quad (\text{III.56})$$

onde r_i , s_j , t_{ij}^0 são dados pelas expressões:

$$r_i = u_i^* \sqrt{\Phi^* / \mathcal{K}_0^*} / \bar{O}_i \quad (\text{III.57})$$

$$s_j = v_j^* \sqrt{\Phi^* / \mathcal{K}_0^*} / \bar{D}_j \quad (\text{III.58})$$

com

$$t_{ij}^0 = \bar{O}_i \bar{D}_j$$

Ou seja, a solução dual geométrica do problema tem que ser (condição necessária) da forma (III.56) para satisfazer as condi-

ções de dualidade.

Agora, os métodos iterativos de resolução (Furness, Kruithof, etc.) podem ser interpretados como métodos de resolução "duais-primais" em programação geométrica. Estes métodos tentam fornecer uma solução viável do problema (dual) inicial compatível com as condições de otimalidade do problema primal geométrico. Seria interessante reavaliar a convergência destes métodos à luz desta consideração.

CAPÍTULO IV - DESENVOLVIMENTO E INTERPRETAÇÃO DO MODELO ENTRÓ-

PICO RESTRITO:

IV.1. INTRODUÇÃO:

Neste capítulo, é apresentada uma abordagem do problema de previsão da distribuição de viagens considerando, além das previsões de produção e atração de viagens, tanto informações a priori sobre esta distribuição, como também determinadas condições impostas pelo planejador.

As informações sobre as atividades sócio-econômicas das áreas interligadas pelo sistema de transporte e sobre as condições de deslocamento conduzem à formulação de probabilidades a priori para a distribuição de viagens.

O modelo aqui proposto conduzirá à determinação, em termos destas probabilidades, da distribuição de viagens mais provável que satisfaça as condições impostas. Mostrar-se-á, então, como a distribuição proposta pode levar em consideração, de forma implícita, a eficiência do sistema de transporte.

IV.2. O MODELO ENTRÓPICO DE DISTRIBUIÇÃO

A abordagem probabilística do problema da distribuição, já apresentada em várias publicações (NIJKAMP⁷⁹, CHOUKROUN¹⁸ e MORA-CAMINO⁷²), é baseada na procura da distribuição de viagens mais provável, onde as probabilidades a priori de viagens são determinadas a partir de indicadores sócio-econômicos das áreas interligadas pelo sistema de transporte.

O modelo é caracterizado pelos seguintes parâme-

tros:

T_{ij} = número de viagens previstas entre as zonas i e j

P_i = coeficiente de geração da zona i

Q_i = coeficiente de atração da zona i

O_i = número previsto de viagens saindo de i durante o período considerado

D_i = número previsto de chegadas na zona i durante o período considerado

Estes parâmetros são ligados por relações de compatibilidade:

$$\sum_{j=1}^N T_{ij} = O_i \quad , \quad i = 1, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^N T_{ij} = D_j \quad , \quad j = 1, \dots, N \quad (IV.1)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij} = T$$

Tomando por exemplo (ver anexo II):

$P_i = P_i / \sum_{k=1}^N P_k$, como a probabilidade a priori de se ter uma viagem partindo do nó i .

e

$q_i = Q_i / \sum_{k=1}^N Q_k$, como a probabilidade a priori de se ter uma viagem chegando em i .

Pode-se considerar que a quantidade $P_{ij} \cdot q_j (=F_{ij})$, é a probabilidade a priori de se ter uma viagem entre as zonas i e j . A probabilidade de ter a distribuição $\{T_{ij}\}$ é dada por (CHOUKROUN¹⁸):

$$P(\{T_{ij}\}) = \left(\prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N (F_{ij})^{T_{ij}} \right) \left(T! / \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N T_{ij}! \right) \quad (V.2)$$

(Obter-se-ia a mesma relação partindo de uma distribuição de probabilidade a priori $[F_{ij}]$ qualquer)

A distribuição mais provável poderá ser, portanto, solução do problema (P):

$$\text{Max}_{T_{ij}} P(\{T_{ij}\})$$

sujeito a:

$$T_{ij} \geq 0 \quad (IV.3)$$

$$\sum_{j=1}^N T_{ij} = O_i, \quad i = 1, \dots, N$$

(IV.4)

$$\sum_{i=1}^N T_{ij} = D_j, \quad j = 1, \dots, N$$

$$\text{com } \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij} = T = \sum_{i=1}^N \cdot O = \sum_{j=1}^N D_j$$

Tomando o logaritmo da probabilidade da distribuição temos:

$$\log P(\{T_{ij}\}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij} \log F_{ij} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij} \log T_{ij} + \log(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij})! \quad (\text{V.5})$$

Supondo que o volume de transporte entre cada centro ou é nulo ou bastante elevado, pode-se utilizar com uma boa aproximação a fórmula de STIRLING⁷⁰:

$$\log x! \sim (x \log x) - x$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \log P(\{T_{ij}\}) &\approx \sum_{i,j} T_{ij} \log F_{ij} - \sum_{i,j} T_{ij} \log T_{ij} + \sum_{i,j} T_{ij} \log \sum_{i,j} T_{ij} = \\ &= - \sum_{i,j} T_{ij} \log T_{ij} / f_{ij} + T \log T \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

com

$$f_{ij} \stackrel{\Delta}{=} T_{ij} F_{ij}$$

sendo tomado $x \log x = 0$ para $x=0$.

Chega-se finalmente ao problema (P_2):

$$\max_{T_{ij}} H = - \sum_{i,j} T_{ij} \log T_{ij} / f_{ij} \quad (\text{IV.7})$$

obedecendo as relações (IV.3) e (IV.4), para o qual se pode fazer várias observações:

- se existe uma repartição equiprovável das probabilidades a priori F_{ij} , ou seja, se elas são iguais a $1/T_{ij}$ tem-se $f_{ij} = 1, \forall ij$:

$$-\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (T_{ij}/T) (\log T_{ij}/T) = (H-T \log T)/T \quad (IV.8)$$

O problema (P_2) é então equivalente ao da maximização da entropia do sistema, utilizado de forma clássica em planejamento urbano (ERLANDER³⁰) (ver capítulo II).

Neste tipo de modelo, só puderam ser consideradas as ligações para as quais as probabilidades a priori de viagem não são nulas.

A forma de estabelecer estas probabilidades será muito importante para a determinação da distribuição solução do problema. Seria também desejável que estas probabilidades a priori levassem em conta os custos de deslocamento C_{ij} entre cada par. Geralmente é difícil juntar este fator com os demais fatores sócio-econômicos de cada área (população, nível de emprego, etc.).

Numa situação de planejamento a curto prazo, poder-se-á tomar como distribuição a priori a distribuição atual, resultante atual destes fatores e custos. A solução aceita para uma situação de mais longo prazo, e que resolva esta dificuldade

de, é a de considerar que estas probabilidades a priori F_{ij} são fundamentadas exclusivamente nos fatores sócio-econômicos característicos de cada área (uma distribuição a priori considerando estes fatores sócio-econômicos previstos para cada zona poderá ser simplesmente $\left[\begin{matrix} \tilde{T} \\ ij \end{matrix} \right]$ com $\tilde{T}_{ij} = 0 \cdot D_i / T_j$), e que os custos de deslocamento são levados em consideração de forma explícita através da formulação, pelo planejador, de restrições para cada tipo de custo (cujo nível poderá ser indicado por ele). Considerando-se unicamente um custo generalizado de viagem C_{ij} entre i e j ter-se-á a restrição global:

$$\sum_{ij}^N C_{ij} T_{ij} = C \quad (\text{IV.9})$$

O nível de custo total C poderá ser estabelecido pelo planejador, utilizando-se por exemplo, da noção de sensibilidade da população urbana ao custo de transporte, ou seja, esse nível C poderá ser determinado pela equação (II.27).

Finalmente, a distribuição mais provável, dentro do quadro de hipóteses consideradas pelo planejador, será solução do problema (P_3) (modelo entrópico restrito)

$$\max_T H_{ij}$$

sob as restrições IV.3, IV.4 e IV.9.

IV.3. REFORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA PELA PROGRAMAÇÃO GEO-
MÉTRICA

Definindo as variáveis normalizadas

$$t_{ij} = \frac{T_{ij}}{T}$$

H pode ser escrito como:

$$H = H - T \log T$$

com

$$H = -T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N t_{ij} \log \left(\frac{t_{ij}}{f_{ij}} \right) \quad (\text{IV.10})$$

e o problema (P₃) será equivalente ao problema (P₄):

$$\max \left[\begin{array}{c} T \\ ij \end{array} \right]$$

sujeito a

$$t_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N t_{ij} = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (\delta_{il} - \bar{D}_l) t_{ki} &= 0, \quad l = 1, \dots, N \\ \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^N (\delta_{ki} - \bar{O}_k) t_{i\ell} &= 0, \quad k = 1, \dots, N \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\bar{C} - c_{ij}) t_{ij} &= 0 \end{aligned} \right\} (\text{IV.11})$$

$$\text{onde: } \bar{O}_i = O_i/T, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\bar{D}_j = D_j/T, \quad j = 1, \dots, N$$

$$\bar{C} = C/T$$

e δ_{kl} é o operador de Kronecker.

A versão contínua do problema (P_4) constitui o problema dual da programação geométrica (DUFFIN²⁹) do problema (P_5) :

$$\min K(\underline{u}, \underline{v}, w)$$

s.a.

$$u_i > 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{IV.12})$$

$$v_j > 0 \quad j = 1, \dots, N$$

$$w > 0$$

onde:

$$K(\underline{u}, \underline{v}, w) = T \log \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} u_i v_j w^{-c_{ij}} \right) \Phi \quad (\text{IV.13})$$

com

$$\Phi = \prod_{h=1}^N (u_h)^{-\bar{O}_h} \prod_{k=1}^N (v_k)^{-\bar{D}_k} w^{\bar{C}} \quad (\text{IV.14})$$

A teoria da dualidade da programação geométrica conduz então às relações entre as soluções de (P_4) e (P_5) :

$$H(\{t_{ij}^*\}) = K(\underline{u}^*, \underline{v}^*, w^*) \quad (\text{IV.15})$$

e

$$t_{ij}^* = f_{ij} u_i^* v_j^* w^{*-c_{ij}} \Phi^*/H^* \quad (\text{IV.16})$$

Para analisar a questão da unicidade da solução de (P_5) , pode-se reescrever a função K como:

$$K(\underline{u}, \underline{v}, w) = \tilde{K}(\underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{v}}, w)$$

com

$$\tilde{u}_i = u_i / \prod_{h=1}^N u_h^{\bar{O}_h}$$

$$\tilde{v}_j = v_j / \prod_{k=1}^N v_k^{\bar{D}_k}$$

ou seja,

$$\tilde{K}(\underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{v}}, w) = T \log \left(\prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N f_{ij} \tilde{u}_i \tilde{v}_j w^{\bar{C}-c_{ij}} \right)$$

e o problema (P_5) se reescreve (P_6) :

$$\min \tilde{K}(\underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{v}}, w)$$

s.a.

$$\tilde{u}_i > 0, \tilde{v}_j > 0, w > 0$$

e

$$\prod_{i=1}^N \tilde{u}_i^{\bar{O}_i} = 1$$

$$\prod_{j=1}^N \tilde{v}_j^{\bar{D}_j} = 1$$

Definindo as variáveis auxiliares $\tilde{\lambda}_i$, $\tilde{\rho}_j$ e η como:

$$\tilde{\lambda}_i = \log \tilde{u}_i \quad i = 1, \dots, N$$

$$\tilde{\rho}_j = \log \tilde{v}_j \quad j = 1, \dots, N$$

$$\eta = \log w$$

este último problema é equivalente, considerando que a função \log

garítmica (que aparece na expressão do critério de (P_6)), é uma função monótona crescente, ao problema (P_7) seguinte:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} e^{(\tilde{\lambda}_i + \tilde{\rho}_j + (\bar{C} - C_{ij}) \eta)}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^N \bar{O}_i \tilde{\lambda}_i = 0$$

$$\sum_{j=1}^N \bar{D}_j \tilde{\rho}_j = 0$$

Este último problema é convexo, já que seu conjunto de soluções viáveis é definido através de restrições lineares, e que a sua função objetivo é estritamente convexa. Prova-se esta última propriedade de convexidade considerando que esta função é a soma de funções compostas convexas, $\tilde{\lambda}_i + \tilde{\rho}_j + (\bar{C} - C_{ij}) \eta$ sendo convexa por ser linear e a função exponencial sendo uma função estritamente convexa monotonamente crescente.

Então, pode-se deduzir que o problema inicial (P_5) admite no máximo uma única solução, ainda que ele não seja necessariamente um problema convexo.

As condições de otimalidade de primeira ordem (aqui condições necessárias) do problema (P_5) são:

$$- (\bar{O}_i / u_i) \cdot \theta + \phi \cdot \sum_{j=1}^N f_{ij} v_j w^{-C_{ij}} = 0 \quad (\text{IV.17})$$

$$- (\bar{D}_j / v_j) \cdot \theta + \phi \cdot \sum_{i=1}^N f_{ij} u_i w^{-C_{ij}} = 0 \quad (\text{IV.18})$$

$$\Phi \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} u_i v_j (\bar{C} - C_{ij}) w^{-C_{ij}} = 0 \quad (\text{IV.19})$$

onde: $\theta(\underline{u}, \underline{v}, w) = \sum_i^N \sum_j^N f_{ij} u_i v_j w^{-C_{ij}} \Phi$

De (IV.17) e (IV.18) temos:

$$u_i = \frac{\bar{O}_i \theta}{\Phi \sum_j f_{ij} v_j w^{-C_{ij}}}, \text{ e}$$

$$v_j = \frac{\bar{D}_j \theta}{\Phi \sum_i f_{ij} u_i w^{-C_{ij}}}$$

ou (no caso em que $F_{ij} = P_i q_j$):

$$u_i = \frac{\bar{O}_i}{P_i} / \frac{\sum_j q_j v_j w^{-C_{ij}}}{\sum_k \sum_l P_k q_l u_k v_l w^{-C_{kl}}} \quad (\text{IV.20})$$

$$v_j = \frac{\bar{D}_j}{q_j} / \frac{\sum_i P_i u_i w^{-C_{ij}}}{\sum_k \sum_l P_k q_l u_k v_l w^{-C_{kl}}} \quad (\text{IV.21})$$

Substituindo (IV.20) e (IV.21) em (IV.16) vem:

$$t_{ij}^* = A_i B_j O_i D_j w^{*-C_{ij}}$$

$$A_i = \frac{\sum_j P_i q_j u_i^* v_j^* w^{*-C_{ij}}}{\sum_j q_j v_j^* w^{*-C_{ij}}} \cdot \sqrt{\frac{\Phi^*}{K^*}} \quad (\text{IV.22})$$

$$B_j = \frac{\sum_{ij} p_i q_j u_i^* v_j^* w^{*-C_{ij}}}{\sum_i p_i u_i^* w^{*-C_{ij}}} \cdot \sqrt{\frac{\phi^*}{K^*}} \quad (\text{IV.23})$$

onde A_i e B_j são coeficientes de ponderação.

A solução do problema conduz novamente a uma distribuição gravitacional de tipo exponencial.

IV.4. COMPARAÇÃO COM OUTRA ABORDAGEM

Vários autores (CHARNES¹⁷) consideraram que a simples aplicação da teoria da dualidade da programação geométrica ao problema (P_4) era insuficiente para conduzir a uma solução. Pode-se ver pela relação (IV.22) que este não é o caso. Estes autores propuseram utilizar o que chamaram de "Programação Geométrica Estendida" (baseada na desigualdade geométrica:

$$\sum_{i=1}^N x_i y_i \leq y_N \left(x_N + \sum_{i=1}^{N-1} e^{x_i} \right) + \sum_{i=1}^{N-1} y_i (\log y_i - 1) - (\log y_N) \sum_{i=1}^{N-1} y_i \quad (\text{IV.24})$$

com

$$x_i \in \mathbb{R}, y_i \in \mathbb{R}^+ \text{ e } y_i \log y_i = 0 \text{ quando } y_i = 0.$$

No entanto, mostra-se aqui que essa abordagem diferente da solução (P_4) conduz aos mesmos resultados através da resolução de um problema dual (PE_4).

Nessa abordagem, o problema (P_4) é substituído pelo problema (PE_4) equivalente (ZMETEK¹⁰³):

$$\text{MAX}_{z, t_{ij}} H(t_{ij}) - T \quad (\text{IV.25})$$

sujeito a

$$\begin{aligned} z &\geq 0 \\ y_{ij} &\geq 0 \\ z &= 1 \end{aligned} \quad (\text{IV.26})$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N y_{ij} - z = 0$$

além das restrições (IV.11). ao qual corresponde o problema primal (PE₅) da programação geométrica estendida:

$$\min_{\underline{U}, \underline{V}, \underline{W}, \underline{X}} T \cdot \psi(\underline{U}, \underline{V}, \underline{W}, \underline{X}) - T \quad (\text{IV.27})$$

$$U_i > 0 \quad , \quad i=1, \dots, N$$

$$V_j > 0 \quad , \quad j=1, \dots, N$$

$$W > 0 \quad (\text{IV.28})$$

$$X > 0$$

onde:

$$\psi(\underline{U}, \underline{V}, \underline{X}, \underline{W}) = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} U_i V_j W^{-C_{ij}} \right) \phi(\underline{U}, \underline{V}, \underline{W}) + \log X^{-1} \quad (\text{IV.29})$$

Tem-se então a relação

$$\psi(\underline{U}, \underline{V}, \underline{X}, \underline{W}) = X \cdot \theta(\underline{U}, \underline{V}, \underline{W}) + \log X^{-1} \quad (\text{IV.30})$$

$$\text{com } \theta(\underline{U}, \underline{V}, \underline{W}) = \exp K(\underline{U}, \underline{V}, \underline{W})/T,$$

e portanto

$$\min_{\underline{U}, \underline{V}, \underline{X}, \underline{W}} \psi(\underline{U}, \underline{V}, \underline{W}, \underline{X}) = \min_x \{ \min_{\underline{U}, \underline{V}, \underline{W}} X \theta(\underline{U}, \underline{V}, \underline{W}) + \log X^{-1} \} \quad (\text{IV.31})$$

e $\forall (\underline{U}^*, \underline{V}^*, W^*)$:

$$X^* = 1/\theta^* (U^*, V^*, W^*) > 0 \quad (\text{IV.32})$$

e

$$\psi^* = T \log \theta^* = K^* \quad (\text{IV.33})$$

e também:

$$\begin{aligned} \underline{U}^* &= \underline{u}^* \\ \underline{V}^* &= \underline{v}^* \\ W^* &= w^* \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

As duas abordagens conduzem, então, à mesma solução e são equivalentes.

IV.5. INTERPRETAÇÃO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

No parágrafo anterior, foi mostrado como a solução do problema de distribuição está intimamente ligada à função θ das variáveis \underline{u} , \underline{v} , e w , que pode ser interpretada de duas formas:

- em termos da utilidade do sistema de transporte,
- em termos da acessibilidade das áreas interligadas.

Pode-se escrever $K(\underline{u}, \underline{v}, w)$ como:

$$K(\underline{u}, \underline{v}, w) = T \log \theta = - \sum_{i=1} O_i \lambda_i - \sum_{j=1} D_j \rho_j + c\eta + T \log \sigma \quad (\text{IV.35})$$

Esta expressão é verificada, imediatamente, ao se fazer as transformações abaixo indicadas:

Tomando o logaritmo da equação (IV.14) vem:

$$\log \phi = - \sum_i \bar{O}_i \log u_i - \sum_j \bar{D}_j \log v_j + \bar{C} \log w \quad (\text{IV.36})$$

- Fazendo

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \log u_i & , i=1, \dots, N \\ \rho_j &= \log v_j & , j=1, \dots, N \\ \eta &= \log w & \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

e

$$\sigma = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} e^{(\lambda_i + \rho_j - \eta C_{ij})} \quad (\text{IV.38})$$

- E substituindo (IV.36), (IV.37) e (IV.38) em (IV.13) obteremos a relação (IV.35).

Elimina-se o caso em que η é nulo na solução de (P_5) , já que, segundo IV.19 pode corresponder ao caso onde $C_{ij} = \bar{C}$, ($i=1, \dots, N$ e $j=1, \dots, N$), ou ao caso em que os custos generalizados não são levados em conta.

As variáveis λ_i, ρ_j, η correspondem às variáveis de Lagrange associadas às restrições (IV.11) do problema (P_4) (ZANGWILL¹⁰²).

$\frac{1}{\eta}$ representa um custo marginal devido a uma melhoria de H ,

$\lambda_i(\rho_j)$ representa uma melhoria de H , devido a uma modificação marginal de $\bar{O}_i(\bar{D}_j)$,

$$L_i = \frac{\lambda_i}{\eta} \quad (M_j = \rho_j/\eta) \text{ representa o valor (de uso)}$$

de uma variação marginal de $\bar{O}_i (\bar{D}_j)$.

O valor de uma viagem suplementar entre i e j será:

$$V_{ij} = L_i + M_j - C_{ij}$$

A variação marginal de H será:

$$U_{ij} = V_{ij} / (1/\eta) = V_{ij} \eta$$

Definindo

$$\tau \triangleq \frac{1}{\eta} \log (\sigma/T) \quad (\text{IV.39})$$

$$\tau = \frac{1}{\eta} \log \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\frac{f_{ij}}{T} \right) e^{V_{ij} \eta} \right]$$

ou

$$e^{(\tau/\frac{1}{\eta})} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\frac{f_{ij}}{T} \right) e^{U_{ij}} \quad (\text{IV.40})$$

e tendo

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{f_{ij}}{T} = 1$$

vê-se que $\tau/\frac{1}{\eta}$ representa uma média generalizada das variações marginais de H em torno do seu valor ótimo.

τ representa então, uma média generalizada dos custos marginais em torno da solução de (P_4) e pode ser interpretada como um preço uniforme de transportes (LESOURNE⁶¹).

Finalmente tem-se:

$$\frac{1}{\eta} (T \log \theta - T \log T) = - \left[\tau T + \sum_{i=1}^N (O_i L_i + D_i M_i) - C \right]$$

ou

$$\alpha \log \theta + \beta = S \quad (\text{IV.41})$$

onde: $\alpha = - T/\eta$

$$\beta = (\log T) T/\eta \quad (\text{IV.42})$$

$$S = \tau T + \sum_{i=1}^N (O_i L_i + D_i M_i) - C$$

Considerando a interpretação de τ , L_i e M_i , representa um excedente previsto para o sistema de transporte e o problema (P_5) pode ser interpretado como a procura do máximo deste excedente (LESOURNE⁶¹).

Supondo que a utilidade do sistema de transporte em relação à coletividade seja igual a zero quando se tem equi-repartição de viagens (sem considerar as restrições (IV.11), tem-se:

$$S = U(\{T_{ij}\}) - U(\{\bar{T}\}) \quad (\text{IV.43})$$

com

$$\bar{T} = T/N^2$$

Se a solução de (P_4) é tal que $T_{ij} = \bar{T}$, considerando (IV.22) obtem-se:

$$\theta^* = T$$

Finalmente, a relação (IV.41) pode ser escrita como:

$$U(\{T_{ij}\}) - U(\{\bar{T}\}) = \frac{T}{\eta} \log \theta(\{T_{ij}\}) - \log \theta(\{\bar{T}\})$$

de onde pode se deduzir a relação entre a utilidade coletiva e θ :

$$U(\{T_{ij}\}) = \frac{T}{\eta} \log \theta(\{T_{ij}\}) + \text{constante} \quad (\text{IV.44})$$

Comparando esta relação com a relação

$$S_i = \lambda \log G_i$$

obtida de (II.48) e (II.49) do capítulo II, e que liga utilidades locais e acessibilidades locais, a funcional θ pode ser interpretada como sendo um índice de acessibilidade global do sistema de transporte.

Finalmente, na solução do problema de distribuição de viagens, têm-se as relações ligando Entropia condicional, Utilidade e Acessibilidade do sistema de transporte:

$$H^* = T \log \theta^* = \eta^* (U(\{T_{ij}^*\})) - \text{constante}$$

Considerando-se a interpretação feita para θ , ela pode ser escrita na forma:

$$\theta = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{u}_i \tilde{v}_j w^{-\tilde{c}_{ij}}$$

onde

$$\tilde{u}_i = u_i / \prod_{k=1}^N (u_k^{\bar{0}_k}) = u_i / \bar{u}$$

\bar{u} sendo uma média geométrica dos u_k , $k=1, \dots, N$

$$\tilde{v}_j = v_j / \prod_{h=1}^N (v_h^{\bar{D}_h}) = v_j / \bar{v}$$

\bar{v} sendo uma média geométrica dos v_h , $h=1, \dots, N$

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} - \bar{c}$$

$w^{-\bar{c}}$ sendo uma média geométrica dos fatores de resistência nas ligações,

obtem-se então:

$$\theta = \sum_{i=1}^N \tilde{u}_i \theta_i = \sum_{j=1}^N \tilde{v}_j \theta^j$$

com

$$\theta_i = \sum_{j=1}^N \tilde{v}_j w^{-\tilde{c}_{ij}} \quad \text{e} \quad \theta^j = \sum_{i=1}^N \tilde{u}_i w^{-\tilde{c}_{ij}}$$

onde: θ_i representa a acessibilidade do sistema de transporte a partir da zona i ;

θ^j representa a acessibilidade da zona j a partir do sistema de transporte;

\tilde{u}_i (\tilde{v}_j) representa a variação marginal de acessibilidade global devida a uma variação da acessibilidade local θ_i (θ^j) de uma unidade em torno da solução ótima do problema de distribuição de viagens.

Estes coeficientes permitirão ao planejador avaliar, em termos de acessibilidade global, modificações projetadas para a rede de transportes ou as consequências da reestruturação geográfica das atividades econômicas.

A resolução numérica do problema primal geométrico (P_5) ou dos problemas equivalentes (P_6) e (P_7) será necessária, para se ter uma quantificação dessas acessibilidades.

IV.6. ESTUDO DOS CASOS LIMITES DO MODELO

O problema inicial (P_4) é parametrado pelo nível C do custo total. Este custo é ligado à variável w pela relação (IV.19).

- a) Se w tende para $+\infty$ na solução de (P_5), pode-se mostrar que definindo ε^+ como:

$$\varepsilon^+ \triangleq \{(i,j)/C_{ij}^{+\infty} < 0\}$$

onde

$$C^{+\infty} = \lim_{w \rightarrow \infty} C_{ij} \quad \text{e} \quad C_{ij} = C_{ij} - L_i - M_j$$

tem-se:

$$\varepsilon^+ = \phi$$

então

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \tau = 0$$

Neste caso (P_4) é equivalente, no limite, ao problema:

$$\max_{L_i, M_j} \sum_{i=1}^N O_i L_i + \sum_{j=1}^N D_j M_j$$

s.a.

$$C_{ij} + L_i + M_j \geq 0 \quad \begin{array}{l} i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, N \end{array}$$

que constitui o dual da programação linear (DANTZIG²¹) do problema de Hitchcock:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^N x_{ij} = D_j \quad j=1, \dots, N \\ & \sum_{j=1}^N x_{ij} = O_i \quad i=1, \dots, N \\ & x_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

A situação de $w \rightarrow +\infty$ corresponde, então, ao caso em que a distribuição de viagens é o resultado da minimização do custo total de viagens (correspondente para a população considerada a uma sensibilidade ao custo de transporte igual a 1).

b) No caso em que $w = 1$ a solução do problema (P_5) é igual à solução do problema (III.50) do capítulo III. Ou seja, essa solução não depende do nível do custo total de transporte C e corresponde a uma sensibilidade ao custo de transporte da população igual a zero, quando se reformula o índice de sensibilidade ao custo como sendo:

$$s = \frac{C^* - \bar{C}}{C^* - \bar{C}_{\min}} \quad 0 \leq s \leq 1$$

com

$$C^* = \frac{1}{T} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} \right)$$

onde $\left[T_{ij}^* \right]$ é solução do problema (P_2) ou ainda, onde os $t_{ij}^* = \frac{T_{ij}^*}{T}$ são dados por:

$$t_{ij}^* = f_{ij} u_i^* v_j^* \Phi(\underline{u}^*, \underline{v}^*) / H(\underline{u}^*, \underline{v}^*)$$

onde os vetores \underline{u}^* e \underline{v}^* são soluções do sistema de equações:

$$- (\bar{O}_i / u_i) \cdot \theta(\underline{u}, \underline{v}) + \Phi(\underline{u}, \underline{v}) \sum_{j=1}^N f_{ij} v_j = 0, \quad i=1, \dots, N$$

$$- (\bar{D}_j / v_j) \cdot \theta'(\underline{u}, \underline{v}) + \Phi(\underline{u}, \underline{v}) \sum_{i=1}^N f_{ij} u_i = 0, \quad j=1, \dots, N$$

c) No caso em que w tende a zero na solução de (P_5) Pode-se mostrar (utilizando a teoria da dualidade da programação linear) que este problema é equivalente a:

$$\text{Max} \sum_i^N \sum_j^N c_{ij} x_{ij} = T. \bar{c}_{\max}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} = D_j \quad j=1, \dots, N$$

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = O_i \quad i=1, \dots, N$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Esta situação corresponde ao caso em que a distribuição de viagens é o resultado de uma maximização do custo total de viagens.

Pode também ser definido, aqui, um índice de sensibilidade ao custo caracterizando as situações onde $0 < w < 1$ tal que:

$$s = \frac{C^* - \bar{C}}{C^* - \bar{C}_{\max}} \quad -1 \leq s \leq 0$$

CAPÍTULO V - MÉTODOS DE RESOLUÇÃO E ANÁLISE DA SOLUÇÃO DO MODE-
LO ENTRÓPICO RESTRITO:

V.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo é abordado inicialmente o problema da existência de soluções para o modelo entrópico restrito analisado no capítulo anterior. A seguir será desenvolvida uma análise dos problemas da resolução numérica e finalmente abordado o problema da análise de sensibilidade da solução do problema do modelo entrópico restrito.

Como foi visto no capítulo anterior, o problema (P_3) poderá ser tratado ou utilizando-se da sua forma dual geométrica equivalente (problema (P_4)), ou então utilizando-se da sua forma primal equivalente (problema (P_5)). Segundo o aspecto particular considerado, uma ou outra forma será a mais adequada para ser utilizada.

V.2 - SOLVABILIDADE

O estudo da solvabilidade do problema foi amplamente pesquisado (DINKEL e KOCHENBERGER²⁵), partindo-se da consideração do seguinte problema inicial relaxado:

$$\max_{[t_{ij}]} H(t_{ij}) + T \quad (V.1)$$

$$\text{com } H = -T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N t_{ij} \log(t_{ij}/f_{ij}) \quad (V.2)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N t_{ij} = 1 \quad (\text{V.3})$$

$$t_{ij} \geq 0$$

para o qual existe sempre uma solução evidente:

$$t_{ij}^* = F_{ij} \quad (\text{V.4})$$

$$\text{com} \quad F_{ij} = f_{ij} / \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N f_{kl}$$

Considerando o problema de distribuição de viagens com a formulação entrópica, ou seja, o problema:

$$\max - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N t_{ij} \log t_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N t_{ij} = 1$$

$$\sum_{j=1}^N t_{ij} = \bar{O}_i, \quad i = 1, \dots, N$$

(V.5)

$$\sum_{i=1}^N t_{ij} = \bar{D}_j, \quad j = 1, \dots, N$$

$$t_{ij} \geq 0$$

$$\text{com} \quad \sum_{i=1}^N \bar{O}_i = \sum_{j=1}^N \bar{D}_j = 1 \quad (\text{V.6})$$

No capítulo IV, foi mostrado que, quando a solução deste problema existe, ela é única e da forma:

$$t_{ij} = r_i s_j t_{ij}^0 \quad (\text{V.7})$$

$$\text{com} \quad t_{ij}^0 = \bar{O}_i \bar{D}_j, \quad i = 1, \dots, N \\ j = 1, \dots, N$$

Supondo que a matriz $\begin{bmatrix} t_{ij}^0 \end{bmatrix}$ satisfaz as condições de positividade apresentadas no parágrafo III.1.2, poder-se-á aplicar o método de Furness para resolver o sistema de equações (V.5), com uma solução da forma

$$t_{ij} = x_i y_j t_{ij}^0$$

e obter-se-á, sempre, uma solução estritamente positiva $\begin{bmatrix} t_{ij}^* \end{bmatrix}$. Utilizando-se o resultado de unicidade, apresentado no parágrafo III.1.1, ter-se-á:

$$r_i = x_i^* \quad \text{e} \quad s_j = y_j^* \quad (\text{V.8})$$

$$i = 1, \dots, N \quad \text{e} \quad j = 1, \dots, N$$

Ou seja, se $\begin{bmatrix} t_{ij}^0 \end{bmatrix}$ satisfaz as condições de positividade, o problema entrópico admitirá uma solução (estritamente positiva).

Desenvolvendo o mesmo raciocínio para o modelo entrópico condicional:

$$\max - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N t_{ij} \log (t_{ij}/f_{ij})$$

sujeito às mesmas restrições, e considerando a matriz original $\begin{bmatrix} t_{ij}^0 \end{bmatrix}$ tal que:

$$t_{ij}^0 = f_{ij} \bar{O}_i \bar{D}_j \quad (V.9)$$

chegar-se-á ao mesmo resultado:

Resultado 1

Se a matriz $\begin{bmatrix} t_{ij}^0 \end{bmatrix}$ satisfizer as condições de positividade (CNS), o modelo entrópico condicional admitirá uma solução única e estritamente positiva.

Se a matriz $\begin{bmatrix} t_{ij}^0 \end{bmatrix}$ não satisfizer estas condições, como o conjunto viável deste problema não é vazio $(\sum_{i=1}^N \bar{O}_i = \sum_{j=1}^N \bar{D}_j)$ e a sua função objetivo é estritamente côncava sobre $\mathbb{R}^{n^{2+}}$, então o modelo entrópico admitirá uma solução única não estritamente positiva.

Considerando, finalmente, o modelo entrópico restrito, do capítulo IV, este admitirá uma solução se, e somente se:

$$C_{\min} \leq C \leq C_{\max} \quad (\text{V.10})$$

onde $C_{\min}(\left[t_{\min} \right])$ é solução do problema de Hitchcock e $C_{\max}(\left[t_{\max} \right])$ é solução do problema de maximização dos custos de viagens, sujeito às restrições de conservação e positividade.

Se C não satisfizer a condição (V.10), o conjunto viável do problema (P_3) será vazio.

Se C satisfaz a condição (V.10), pode-se definir o parâmetro α :

$$\alpha = \frac{C - C_{\min}}{C_{\max} - C_{\min}} \quad \text{com} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (\text{V.11})$$

e considerando que S_{\min} e S_{\max} são os conjuntos de soluções dos problemas de minimização e de maximização de custos de transporte, pode-se construir o subconjunto de soluções admissíveis S_{α} do problema (P_3) :

seja tal que $Z^* > 0$

Entretanto, a existência de soluções viáveis estritamente positivas para o problema (P_3) não garantirá que sua solução ótima também será estritamente positiva. A teoria da dualidade da programação geométrica (DUFFIN e PETERSON²⁹) permite especificar as condições para que isto aconteça. Podem-se deduzir, como aplicação direta desta teoria, os seguintes resultados:

Resultado 2

O modelo entrópico (P_4) é consistente e admite uma solução estritamente positiva se, e somente se, o problema primal (P_5) é consistente e admite uma solução finita e estritamente positiva.

Resultado 3

Se o modelo entrópico restrito (P_4) e o problema primal (P_5) são canônicos, então:

- 1) *O problema (P_4) é consistente.*
- 2) *A solução $\begin{bmatrix} t^* \end{bmatrix}$ de (P_4) é estritamente positiva se (P_5) admite uma solução positiva.*

Pode-se observar que o problema (P_5) , sendo funcionalmente irres

trito, será sempre superconsistente e a aplicação do segundo resultado dependerá somente da sua solução.

Por outro lado, as condições de dualidade da programação geométrica mostram, no capítulo V, que se (P_4) ou (P_3) admite uma solução, esta é da forma:

$$t_{ij} = (r_i s_j w^{-C_{ij}}) \cdot t_{ij}^0 \quad (\text{V.14})$$

com $w > 0$

$$e \quad t_{ij}^0 = f_{ij} \bar{O}_i \bar{D}_j \quad (\text{V.15})$$

Se $\begin{bmatrix} t_{ij}^0 \end{bmatrix}$ é positiva e w é finito, a matriz $\begin{bmatrix} \tilde{t}_{ij} \end{bmatrix}$ tal que

$$\tilde{t}_{ij} = w^{-C_{ij}} \cdot t_{ij}^0 \quad (\text{V.16})$$

será também positiva (condição suficiente para satisfazer as condições de positividade do capítulo III). Valendo-se do raciocínio anteriormente exposto, mostra-se que a solução do problema é estritamente positiva.

A situação em que se apresenta uma solução com $w \rightarrow +\infty$ foi identificada no capítulo anterior como sendo aquela em que $C = C_{\min}$; e a que apresenta uma solução com w igual a zero também foi identificada no capítulo anterior como sendo aque

la em que $C = C_{\max}$.

Finalmente, obtêm-se o seguinte resultado:

Resultado 4

Uma condição necessária e suficiente para que se tenha uma solução do modelo entrópico restrito, estritamente positiva é que, com a matriz $\begin{bmatrix} 0 \\ c_{ij} \end{bmatrix}$ sendo positiva, o nível de custo total C seja escolhido tal que:

$$C_{\min} < C < C_{\max} \quad (V.17)$$

V.3 - ALGORITMOS DE RESOLUÇÃO DO MODELO ENTRÓPICO RESTRITO

V.3.1 - Considerações Gerais Sobre a Resolução Numérica do Modelo

Como já foi visto, a função $K(\underline{u}, \underline{v}, w)$ admite, no máximo, um só mínimo. Então é interessante tentar, ainda que a função K não seja estritamente convexa, a resolução direta do problema (P_5) , através do uso de algoritmos clássicos de minimização de funções irrestritas do tipo, por exemplo, dos algoritmos que utilizam o gradiente da função para determinar direções de busca do mínimo.

O gradiente ∇K da função $K(\mathbb{R}^{2N+1} \rightarrow \mathbb{R})$ será:

$$\frac{\partial K}{\partial u_i} = \frac{T}{\theta} \left[-\left(\frac{\bar{O}_i}{u_i}\right)\theta + \Phi \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} v_j w^{-C_{ij}} \right] \quad (V.18)$$

$$\frac{\partial K}{\partial v_j} = \frac{T}{\theta} \left[-\left(\frac{\bar{D}_j}{v_j}\right)\theta + \Phi \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} u_i w^{-C_{ij}} \right] \quad (V.19)$$

$$\frac{\partial K}{\partial w} = \frac{T}{\theta w} \left[\Phi \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} u_i v_j (\bar{C} - C_{ij}) w^{-C_{ij}} \right] \quad (V.20)$$

Neste caso passar-se-á de uma solução intermediária $\underline{S}_{(k)}$ a outra, através de um processo da forma:

$$\underline{S}_{(k+1)} = \underline{S}_{(k)} - M_{(k)} \nabla k_{(k)} \quad (V.21)$$

com $\underline{S}^T(k) = (\underline{u}^T(k), \underline{v}^T(k), w(k))$

onde $M_{(k)}$ é uma matriz de coeficientes, cujos autovalores são positivos, determinada de forma variável conforme o algoritmo.

A aplicação destes métodos apresenta várias dificuldades:

- a existência de restrições de estrita positividade sobre

as variáveis impõe uma adaptação destes algoritmos.

- a convergência teórica destes métodos será realizada com um número infinito de iterações.
- a não convexidade da função objetivo (e a possível existência de pontos de inflexão) poderá tanto retardar o processo da procura da solução, como conduzir a soluções parasitas.
- finalmente, será necessária uma solução da partida para inicializar o processo de procura, formulada em termos dos \underline{u}_i , \underline{v}_j e w . Normalmente, esta solução não poderá levar em conta informações iniciais possuídas pelo planejador.

A grande vantagem desta abordagem direta do problema (P_5) é a de requerer um esforço de programação bastante reduzido.

V.3.2 - Aplicabilidade do Método Simplex-Convexo à Resolução do Problema Dual Geométrico

Pode-se observar que o problema inicial (P_3) apresenta uma função objetivo estritamente côncava a ser maximizada, sujeita a um elenco de restrições lineares. Esta classe de problemas de programação matemática tem sido amplamente pesquisada e existem, na literatura, vários métodos de resolução disponíveis (Método da Aproximação Linear, Algoritmo de Frank e Wolfe,

Método do Simplex-Convexo (ZANGWILL¹⁰²), etc.).

Vários autores (BECK e ECKER⁴) desenvolveram um trabalho de adaptação do Método do Simplex-Convexo para a resolução do problema dual geral da programação geométrica. Este esforço é justificado pelo fato de, no caso de um problema primal geral da programação geométrica, a resolução de seu dual apresentar aspectos mais abordáveis (o problema primal geométrico é geralmente não linear, não convexo, com várias restrições de desigualdade não lineares, etc.). A dificuldade maior dessa adaptação consiste nas condições de anulação das variáveis duais associadas a uma mesma restrição (desigualdade) do problema primal (esta anulação, se ocorrer, deve ser simultânea para todas estas variáveis, o que o método Simplex-Convexo não permite, já que ele examina as variáveis de forma individual).

No caso do problema dual (P_4), considerado neste trabalho, esta dificuldade não estará presente, já que o seu problema primal geométrico (P_5) é funcionalmente irrestrito.

A dificuldade aparente da aplicação do Método do Simplex-Convexo ao problema (P_4) consiste na não definição do gradiente da função objetivo ($\forall H \in R^{N^2}$) em pontos tais que algumas das variáveis duais sejam nulas (o que se espera acontecer naturalmente para as variáveis não básicas) já que ele tem a expressão:

$$\forall H_{ij} = -1 - \log (t_{ij}/f_{ij}) , \quad (V.22)$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$j = 1, \dots, N$$

A seguir, será apresentada a lógica deste método e mostrado o seguinte resultado importante para a resolução do problema inicial (P_3):

Resultado 5

Partindo de uma solução inicial viável, estritamente positiva, o Método do Simplex-Convexo gerará, ao longo de suas iterações, soluções viáveis estritamente positivas.

Este resultado eliminará tanto a preocupação anterior como a possibilidade do método não convergir para este problema.

O problema (P_3) pode ser posto na forma considerada pelo Método do Simplex-Convexo, ou seja:

$$\max H(\underline{t})$$

s.a.

$$A \underline{t} = \underline{b}$$

(V.23)

$$\underline{t} \geq 0$$

onde A é uma matriz $(n \times N^2)$ cujas linhas são linearmente independentes e n é igual a $2N$ (retirando-se uma das restrições de conservação), quando a restrição de custo é linearmente independente das restrições de conservação restantes (em caso contrário, n é igual a $(2N - 1)$).

Seja \underline{t}^0 uma solução básica admissível, de uma solução intermediária \underline{t} , estritamente positiva, e sejam Q o seu quadro e \underline{b}^0 o seu segundo membro. Tem-se:

$$Q \underline{t} = \underline{b}^0 \quad (\text{V.24})$$

Os custos relativos associados a este quadro são:

$$\underline{C}(t) = \nabla H(t) - Q^T \cdot \nabla H^0 \quad (\text{V.25})$$

onde

$$\nabla H^0 = \left(\frac{\partial H}{\partial t_1^0}, \dots, \frac{\partial H}{\partial t_n^0} \right)^T$$

e

$$\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial t_{N^2}} \right)^T$$

ou seja:

$$c_{(ij)} = - \left[1 + \log (t_{ij}/f_{ij}) \right] +$$

$$+ \sum_{(k,l) \in \text{BASE}} \left[1 + \log (t_{kl}/f_{kl}) \right] q_{(kl)}(ij)$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$j = 1, \dots, N$$

onde $q_{(kl)}(ij)$ é o elemento da linha (kl) e coluna (ij) do quadro Q (por exemplo, (k, l) e (i, j) corresponderão respectivamente às posições $N(k-1)+l$ e $N(i-1)+j$ do vetor \underline{t}).

As componentes do vetor de custos relativos são da forma:

$$c_{(ij)} = - \log t_{ij} + \sum_{(k,l) \in \text{BASE}} \log t_{kl} +$$

$$+ c_{(ij)}^{\text{te}} \quad (\text{V.27})$$

Supondo que a base é não degenerada, o segundo e também o terceiro termos são finitos.

Os custos relativos permitem, como no caso do Simplex da programação linear, definir as mudanças a serem realizadas nas variáveis não básicas para maximizar a função objetivo

(uma descrição detalhada e completa do algoritmo do Simplex-Convexo pode ser encontrada em ZANGWILL¹⁰²):

- Procuram-se aumentar as variáveis não básicas que apresentem, inicialmente, um custo relativo positivo (até zerar o custo relativo de alguma variável básica).
- Procuram-se diminuir as variáveis não básicas que apresentem, inicialmente, um custo relativo negativo (até, se possível, zerar este custo).

Esta última situação parece apresentar a possibilidade de gerar variáveis não básicas nulas. A modificação de uma variável não básica, no Método do Simplex-Convexo, deve ser acompanhada de uma modificação das variáveis básicas de forma a manter a viabilidade da solução, ou seja, se k é o índice da variável não básica considerada, a direção de procura da solução \underline{d} será tal que:

$$d_j = 0 \quad \text{se } j \text{ não é índice de uma variável} \\ \text{básica, com } j \neq k$$

$$d_k = + 1 \quad \text{(V.28)}$$

$$d_j = - q_{jk} \quad \text{se } j \text{ é índice de uma variável} \\ \text{básica}$$

Este passo do Simplex-Convexo é equivalente à maximização da função de uma variável

$$h(\theta) = H(\underline{t} - \theta \underline{d})$$

com as seguintes restrições:

$$\theta > 0$$

(V.29)

$$\underline{t} - \theta \underline{d} \text{ viável}$$

Pode-se mostrar que:

$$\frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} = C_k(\underline{t} - \theta \underline{d}) \quad (\text{V.30})$$

Tendo $C_k(\underline{t}) < 0$ e supondo que exista θ_1 satisfazendo as restrições (V.29) de modo que $t_k = 0$, então:

$$C_k(\theta_1) \rightarrow +\infty \quad (\text{V.31})$$

Como a função $h(\theta)$ é contínua, bem como a sua derivada, pode-se concluir que existe θ^* tal que:

$$C_k(\underline{t} - \theta^* \underline{d}) = 0 \quad \text{com} \quad 0 < \theta^* < \theta_1 \quad (\text{V.32})$$

ou ainda, este passo do Simplex-Convexo vai conduzir a um valor

$$t'_k = t_k - \theta^*$$

estritamente positivo.

No caso de θ_1 não existir, considera-se, diretamente, o valor possível superior (tal que $\underline{t} - \theta \underline{d}$ seja viável) para θ .

Então, tendo uma solução inicial estritamente positiva, o método do Simplex-Convexo poderá ser utilizado diretamente para resolver o problema (P_3) .

A convergência deste método foi demonstrada em vários trabalhos (ZANGWILL¹⁰²), sendo a solução do problema atingida, teoricamente, com um número infinito de iterações deste algoritmo (o método Simplex da Programação Linear converge em um número finito de iterações).

V.3.3 - Proposição de Uma Estratégia de Resolução

Neste ítem será apresentada uma estratégia de resolução do problema, fundamentada nos vários resultados apresentados anteriormente neste capítulo.

Considerando novamente o modelo entrópico restrito (P_3)

$$\max_{[T]} H$$

s.a.

$$T_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^N T_{ij} = O_i, \quad i = 1, \dots, N$$

(V.33)

$$\sum_{i=1}^N T_{ij} = D_j, \quad j = 1, \dots, N$$

$$\text{(com } \sum_{i=1}^N O_i = \sum_{j=1}^N D_j = T)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} T_{ij} = C \quad \text{(V.34)}$$

a primeira operação a realizar é a de verificar se o conjunto viável não é vazio. Para isto, resolve-se o problema de transportes

$$\min_{[T_{ij}]} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} T_{ij}$$

sujeito a (V.33), sendo $[T_{ij} \min]$ uma solução do problema e C_{\min}

o custo total mínimo;

e o problema de maximização do custo total:

$$\max_{[T_{ij}]} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} T_{ij}$$

sujeito a (V.33), sendo $[T_{ij} \max]$ uma solução do problema e C_{\max} o custo total máximo.

Se a seguinte condição não for satisfeita:

$$C_{\min} \leq C \leq C_{\max} \quad (V.35)$$

o problema (P_3) não admitirá solução.

Se a condição (V.35) é satisfeita, devem ser considerados os seguintes casos:

1º) $C = C_{\min}$ e $[T_{ij} \min]$ é solução única. Neste caso $[T_{ij} \min]$ é a solução do problema (P_3) .

2º) $C = C_{\min}$ e $[T_{ij} \min]$ não é solução única. Neste caso, o problema (P_3) admite a mesma solução que o problema (P_8) :

As condições de otimalidade de primeira ordem serão, aqui, condições suficientes de otimalidade, já que se pode mostrar que $H(\left[T_{ij}(\underline{\lambda}) \right])$ é estritamente côncava para $\underline{\lambda}$, satisfazendo (V.37) e (V.38). Estas condições são:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda^k} = 0 \quad k = 1, \dots, k \quad (V.40)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \quad (V.41)$$

$$\lambda^k \cdot v^k = 0 \quad k = 1, \dots, k \quad (V.42)$$

Escrevendo as condições (V.40):

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[t_{ij}^k \log (T_{ij}/f_{ij}) + t_{ij}^k \right] = \mu + v^k, \quad k = 1, \dots, k \quad (V.43)$$

multiplicando cada uma dessas equações por λ^k e somando-as, obtém-se a relação:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^K \lambda^k t_{ij}^k \right) \log (T_{ij}/f_{ij}) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^K \lambda^k t_{ij}^k = \mu \cdot \sum_{k=1}^K \lambda^k + \sum_{k=1}^K \lambda^k v^k \quad (V.44)$$

ou ainda, levando-se em conta as relações (V.36), (V.41) ou seja (V.37) e (V.42), obtém-se:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij}(\underline{\lambda}) \log (T_{ij}(\underline{\lambda})/f_{ij}) + T = \mu \quad (\text{V.45})$$

ou seja, a solução deste problema não linear de $2k + 1$ variáveis ($\lambda^k, k = 1, \dots, k, v^k, k = 1, \dots, k$ e μ) será a solução do sistema de equações (V.42), (V.43) e (V.45).

3º) $C = C_{\max}$ e $\left[T_{ij \max} \right]$ é solução única. Aqui também, como no primeiro caso, $\left[T_{ij \max} \right]$ será a solução do problema (P_3).

4º) $C = C_{\max}$ e $\left[T_{ij \max} \right]$ não é solução única. Neste caso resolver-se-á o problema (P_8) com os $\left[T_{ij \max}^k \right]$ no lugar dos $\left[T_{ij \min}^k \right]$ (P_9).

5º) $C_{\min} < C < C_{\max}$

Neste caso, sabendo-se que existe para o problema (P_3) uma solução única e estritamente positiva (Resultado 4), mostra-se (Resultado 5) que o método do Simplex-Convexo é aplicável para resolver o problema considerado. Para obter uma solução inicial viável, estritamente positiva, sugere-se o seguinte procedimento:

a) Resolve-se o modelo entrópico condicional, utilizando, por exemplo, o método de Furness aplicado à matriz inicial de distribuição de viagens $[T_{ij}^0] = [f_{ij} \cdot O_i \cdot D_j / T]$. seja $[\hat{T}_{ij}]$ a solução deste problema ($\hat{T}_{ij} > 0$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$).

b) Calcula-se o custo trazido por esta solução, ou seja:

$$C = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} \hat{T}_{ij}$$

Se, por acaso, $\hat{C} = C$, é inútil prosseguir com este procedimento, já que $[\hat{T}_{ij}]$ é a solução do problema (P₃):

$$[T_{ij}^*] = [\hat{T}_{ij}]$$

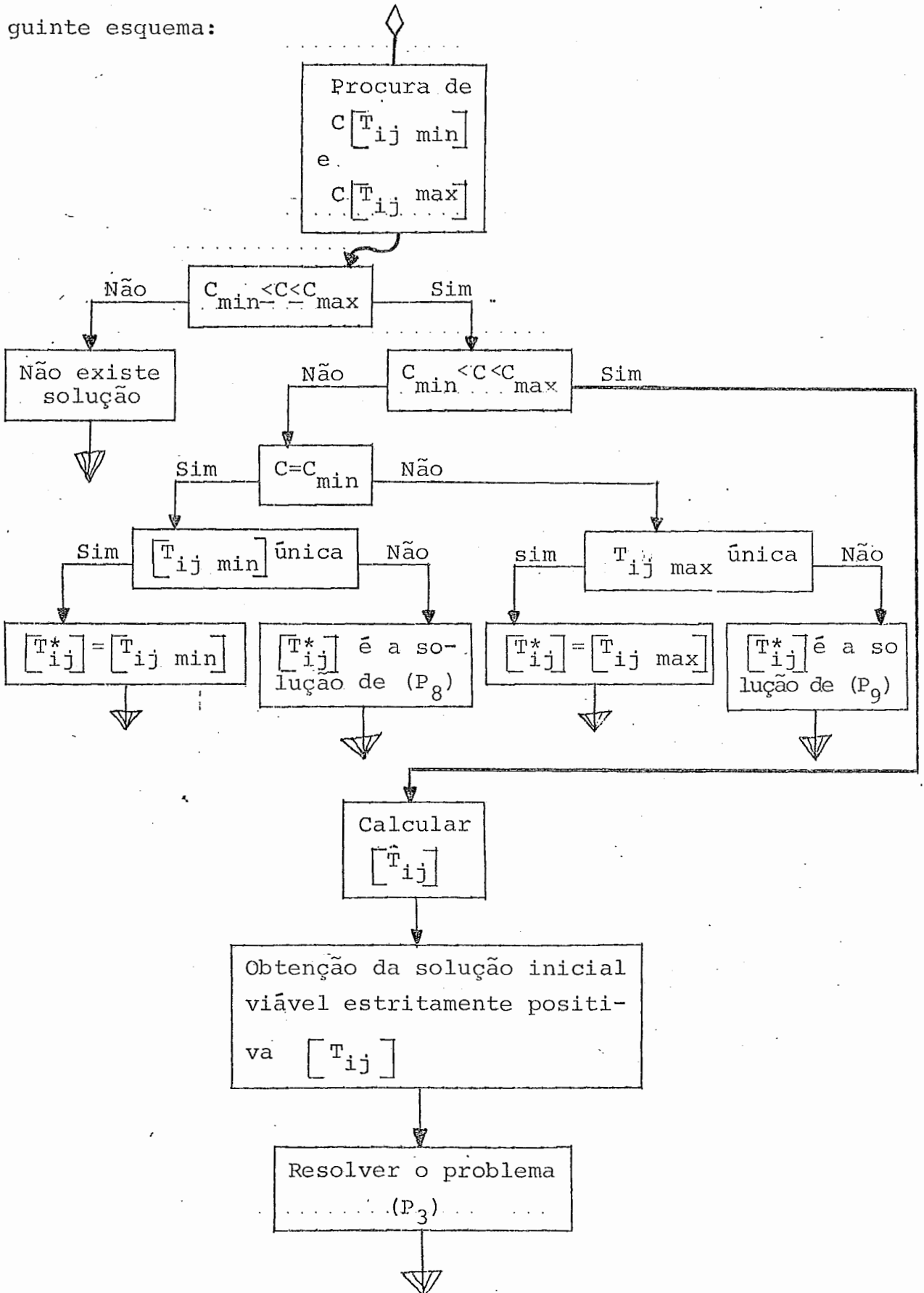
c) Calcula-se o coeficiente s (um índice de sensibilidade ao custo, implícito aqui, se \hat{C} for superior a C) como:

$$s = \frac{C - C_{\min}}{\hat{C} - C_{\min}}$$

d) Calcula-se a solução inicial viável, estritamente positiva para o problema (P₃):

$$T_{ij} = (1 - s)T_{ij \min} + s \cdot \hat{T}_{ij}$$

Esta estratégia de resolução pode ser representada através do seguinte esquema:



V.4 - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

O planejador, geralmente, está tão interessado não só em encontrar a solução do problema (P_3), como em obter informações relativas às conseqüências sobre esta solução, trazidas por uma variação dos valores dos parâmetros que definem o modelo. A finalidade desta análise é a de fornecer estas informações.

Os parâmetros do modelo são:

- os fluxos gerados e atraídos pelas zonas (O_i, D_j) satisfazendo sempre a condição de consistência $(\sum_{i=1}^N O_i = \sum_{j=1}^N D_j = T)$,
- os custos unitários de deslocamentos entre as zonas (C_{ij}),
- o custo total previsto (C),
- as probabilidades a priori F_{ij} , $i = 1, \dots, N$, $j = 1 \dots N$ (satisfazendo, evidentemente, as condições $\sum_i \sum_j F_{ij} = 1$ e $F_{ij} \geq 0$ $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$).

V.4.1 - Transformações Invariantes

Inicialmente, a um nível elementar, pode-se mostrar que várias transformações sobre os parâmetros de custo deixam a solução de (P_3) inalterada.

Considerando, por exemplo, a transformação:

$$\begin{aligned} C'_{ij} &= \alpha C_{ij}, & i &= 1, \dots, N \\ & & j &= 1, \dots, N \end{aligned} \quad (V.47)$$

$$C' = \alpha C$$

a solução do problema não é mudada; assim como tomando a transformação:

$$\begin{aligned} C'_{ij} &= C_{ij} + a_i + b_j & i &= 1, \dots, N \\ & & j &= 1, \dots, N \end{aligned} \quad (V.48)$$

$$C' = C + \sum_{i=1}^N O_i a_i + \sum_{j=1}^N D_j b_j,$$

notar-se-á que estas duas transformações sobre custos têm uma interpretação econômica interessante:

- uma elevação percentual uniforme dos custos de transporte (por exemplo através do aumento do preço da gasolina), sem que haja modificação da sensibilidade ao custo de transporte dos usuários, resultará numa mesma previsão de distribuição de viagens;
- a instauração de taxas ou subvenções ligadas a deslocamentos de (ou para) cada zona, resultará numa mesma previ-

são de distribuição de viagens se a sensibilidade dos usuários aos custos de transporte não for modificada (estas taxas e subvenções influirão, de modo indireto, a mais longo prazo, sobre essa distribuição através de uma variação das gerações e atrações de cada zona).

V.4.2 - Modificação da Distribuição de Probabilidade a Priori

Para analisar a sensibilidade da solução do problema (P_3) em relação à distribuição de probabilidade a priori, é mais conveniente considerar o problema primal geométrico equivalente (P_5), para o qual estas probabilidades aparecem como coeficientes dentro da sua função objetivo:

$$K(\underline{u}, \underline{v}, w) = T \log \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} u_i v_j w^{-C_{ij}} \right) \cdot \Phi(\underline{u}, \underline{v}, w)$$

como

$$\Phi(\underline{u}, \underline{v}, w) = \left(\prod_i u_i^{-\bar{O}_i} \right) \left(\prod_j v_j^{-\bar{D}_j} \right) w^{\bar{C}}$$

Para este problema (P_5), de programação geométrica irrestrita, podem-se utilizar, diretamente, os resultados desenvolvidos por THEIL⁹³ e de ampla aplicação (COLIGNY, ACHAIBOU e MORA-CAMINO²⁰), para a análise de sensibilidade.

Considerando a matriz A dos expoentes, como definida em (V.23), em torno da solução $\left[T_{ij}^* \right]$ do problema (P_3) , suposta estritamente positiva, tem-se (com $df_{ij} = T \cdot dF_{ij}$) as seguintes relações:

$$dT_{ij} = T_{ij}^* d(\log f_{ij}) - \sum_k \sum_l S_{kl} d(\log f_{kl}) \quad (V.49)$$

onde

$$S = \left[S_{ij} \right] = YA(A^T YA)^{-1} A^T Y \quad (V.50)$$

onde

$$Y = \text{diag}(T_{ij}^*, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N) \quad (V.51)$$

Na relação (V.49), o primeiro termo pode ser interpretado como representante do efeito direto da variação da probabilidade a priori F_{ij} sobre o fluxo T_{ij} e o segundo termo como correspondendo aos efeitos indiretos criados pelas variações induzidas sobre as outras probabilidades:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N dF_{kl} = -dF_{ij} \quad (V.52)$$

V.4.3 - Análise de Sensibilidade em Relação aos Outros Parâmetros

Em relação aos outros parâmetros não existem re-

sultados da programação geométrica que sejam de interesse aqui. Então voltar-se-á à formulação (V.23) do problema (P_3) para efetuar essa análise de sensibilidade.

As condições necessárias (e suficientes) de otimalidade são:

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{t}} + A^T \cdot \underline{\lambda} = 0 \quad (\text{V.53})$$

e

$$A \underline{t} - \underline{b} = 0 \quad (\text{V.54})$$

onde $\underline{\lambda}$ é o vetor de parâmetros de Lagrange associado às restrições de igualdade na relação (V.23). Supor-se-á que a solução \underline{t}^* é estritamente positiva.

Definindo o vetor \underline{p} de parâmetros:

$$\underline{p}^T = (0_1, \dots, 0_N, D_1, \dots, D_N, C, \quad (\text{V.55}) \\ C_{11}, \dots, C_{NN})$$

$$\underline{p} \in R_{(+)}^{2N+N^2}$$

ter-se-á, em torno da solução $(\underline{t}^*, \underline{\lambda}^*)$ do sistema de equações (V.53) e (V.54):

$$\frac{d}{d\underline{P}} \left(\frac{\partial H}{\partial \underline{t}} + A^T \underline{\lambda} \right) = \frac{dC_{te}}{d\underline{P}} = 0 \quad (\text{V.56})$$

$$\frac{d}{d\underline{P}} (A \underline{t} - \underline{b}) = \frac{dC_{te}}{d\underline{P}} = 0 \quad (\text{V.57})$$

ou seja:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \underline{t}^2} \cdot \underline{t}' + \frac{\partial^2 H}{\partial \underline{P} \partial \underline{t}} \underline{P}' + A^{T'} \cdot \underline{\lambda} + A^T \cdot \underline{\lambda}' = \underline{0} \quad (\text{V.58})$$

$$e \quad A' \cdot \underline{t} + A \cdot \underline{t}' - \underline{b}' = \underline{0} \quad (\text{V.59})$$

onde o símbolo ' indica uma derivação direta em relação ao vetor dos parâmetros.

Como $H(\underline{t})$ é uma função estritamente positiva, $\frac{\partial^2 H}{\partial \underline{t}^2}$ é definida e as seguintes relações podem ser deduzidas:

$$\underline{t}' = - \left[\frac{\partial^2 H}{\partial \underline{t}^2} \right]^{-1} \left(\left[\frac{\partial^2 H}{\partial \underline{P} \partial \underline{t}} \right] \underline{P}' - A^{T'} \cdot \underline{\lambda}^* - A^T \cdot \underline{\lambda}' \right) \quad (\text{V.60})$$

$$e \quad \underline{\lambda}' = \left[A \left[\frac{\partial^2 H}{\partial \underline{t}^2} \right]^{-1} A^T \right]^{-1} \left(-A' \underline{t}^* + \underline{b}' - A \left[\frac{\partial^2 H}{\partial \underline{t}^2} \right]^{-1} \cdot \right.$$

$$\left. \left(\left[\frac{\partial^2 H}{\partial \underline{P} \partial \underline{t}} \right] \underline{P}' + A' \underline{\lambda}^* \right) \right) \quad (\text{V.61})$$

Vários casos podem ser considerados. Por exemplo, considerando a sensibilidade da solução em relação ao custo total C , tem-se:

$$\underline{p}^T = (\underline{0}, C, \underline{0})$$

e
$$A' = 0, \underline{p}' = (\underline{0}, 1, \underline{0}), b' = (\underline{0}, 1) \quad (V.62)$$

As relações (V.60) e (V.61) tornam-se:

$$\underline{t}' = - \left[\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \right]^{-1} \cdot A^t \cdot \underline{\lambda}' \quad (V.63)$$

com
$$\underline{\lambda}' = \left[A \left[\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \right]^{-1} A^T \right]^{-1} \cdot \underline{b}' \quad (V.64)$$

e tem-se a relação linear:

$$\underline{t}' = M \cdot \underline{b}' \quad (V.65)$$

com
$$M = - \left[\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \right]^{-1} \cdot A^T \cdot \left[A \left[\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \right]^{-1} \cdot A^T \right]^{-1} \quad (V.66)$$

Como essa matriz M tem uma formulação analítica complexa, não será possível dar uma avaliação direta das variações na solução. Dever-se-á desenvolver uma avaliação numérica desta sensibilidade.

Considerando a sensibilidade da solução do problema (P₃) em relação às outras combinações possíveis, obter-se-ão conclusões similares. Por exemplo, no caso do estudo da sensibilidade da solução em relação a um determinado custo C_{ij}, ter-se-ia:

$$\underline{t}' = \left[\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \right]^{-1} (A^{T'} \cdot \underline{\lambda}^* - A^T \cdot \underline{\lambda}') \quad (V.67)$$

e

$$\underline{\lambda}' = - \left[A \left[\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \right]^{-1} A^T \right]^{-1} (A' \underline{t}^* + A \left[\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \right]^{-1} A' \cdot \underline{\lambda}^*) \quad (V.68)$$

Nota-se que o estudo da sensibilidade da solução de (P₃), em relação ao custo total, não precisa de uma avaliação do vetor $\underline{\lambda}^*$, enquanto que o estudo de sensibilidade em relação ao custo de transporte de uma ligação precisará de tal avaliação. Poder-se-ia obter esse valor, resolvendo o problema (P₃) aplicando a estratégia proposta no parágrafo (V.3.3) e utilizando a relação (V.53). Pode ser que seja do interesse do planejador (veja-se a interpretação apresentada no parágrafo IV.5) conhecer o valor desse vetor, já que se tem também:

$$\underline{\lambda}^* = \frac{\partial H^*}{\partial \underline{b}} \quad (V.69)$$

CAPITULO VI - EXTENSÕES DO MODELO ENTROPICO DE DISTRIBUIÇÃO

VI.1 - INTRODUÇÃO:

Nos capítulos anteriores foi apresentado e analisado o modelo entrópico restrito, para o qual foram desenvolvidas várias interpretações e resultados que interessam ao planejador, ou seja, interpretação probabilística e econômica, e aspectos ligados à resolução numérica do modelo. Este modelo, ainda que bastante sofisticado na sua formulação analítica, aborda, de forma bem simples, o problema complexo (ver capítulo II) da previsão de distribuição de fluxos de viagens dentro de uma área.

Neste capítulo, será avaliada a possibilidade de se levar em consideração, dentro do enfoque seguido (desenvolvimento de um modelo de otimização baseado em distribuição a priori de frequências e em restrições explícitas) outros fatores que, apesar de complicar o problema, o tornam mais operacional, tais como:

- existência de várias modalidades (em princípio duas, transporte público e transporte individual);
- estratificação da população;
- existência de vários operadores do sistema de transporte com tamanhos de frota limitados.

VI.2 - MODELOS ENTRÓPICOS MULTIMODAIS

Considera-se, aqui, que os deslocamentos dentro da área pesquisada serão efetuados por diferentes modalidades ($k = 1, \dots, K, K > 1$). Neste caso, o planejador estará interessado em prever diretamente os fluxos entre cada par origem-destino, por modalidade:

$$\left[T_{ij}^k \right], \quad k = 1, \dots, K$$

com

$$\sum_{k=1}^K T_{ij}^k = T_{ij}, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{e} \quad (VI.1)$$

$$j = 1, \dots, N$$

Os custos de deslocamento, entre cada par origem-destino por modalidade, serão caracterizado por um custo unitário C_{ij}^k . Várias situações poderão ser apresentadas, segundo o tipo de informações complementares fornecidas ao planejador:

a) em relação às distribuições de probabilidade a priori (P)

P_0 : a única distribuição a priori disponível é a distribuição (F_{ij}) dos (T_{ij}) ;

P_1 : o planejador dispõe de uma distribuição a priori (F_{ij}^k) dos (T_{ij}^k) .

b) em relação ao custo total de deslocamento (C)

C_0 : a avaliação do custo total não é discriminada por modalidade (os C^k são desconhecidos,

$$C^k = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^k T_{ij}^k)$$

C_1 : o planejador dispõe de previsões de custos totais C^k por modalidade.

c) em relação às gerações e atrações (S)

S_0 : as informações sobre atração e geração em cada zona, são globais ($O_i, D_i, i = 1, \dots, N$);

S_1 : as informações sobre atração e geração em cada zona, são discriminadas por modalidade ($O_i^k, D_i^k, i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, k$).

Deve-se observar aqui, que alguns desses casos poderão ser relacionados com outros, se observadas as relações de compatibilidade, que se espera sejam satisfeitas para as distribuições a priori de viagens e para os valores previstos de geração e atração.

Espera-se que as seguintes relações sejam obtidas (embora não necessariamente):

$$O_i^k = \sum_{j=1}^N T_{ij}^k = T \sum_{j=1}^N F_{ij}^k \quad (\text{VI.2})$$

e

$$D_j^k = \sum_{i=1}^N T_{ij}^k = T \sum_{i=1}^N F_{ij}^k \quad (\text{VI.3})$$

Assim, completando as informações a priori dos casos (P_1, C_i, S_0) , $(i = 0, 1)$, pelas seguintes estimativas compatíveis:

$$\tilde{O}_i^k = T \sum_{j=1}^N F_{ij}^k \quad (\text{VI.4})$$

e

$$\tilde{D}_j^k = T \sum_{i=1}^N F_{ij}^k$$

tem-se que estes problemas corresponderão, respectivamente, aos casos (P_1, C_i, S_1) , com $i = 0, 1$.

Da mesma forma, considerando os casos (P_0, C_i, S_1) , $i = 0, 1$ e, escolhendo as distribuições de viagem compatíveis com as relações (VI.2) e (VI.3):

$$\tilde{F}_{ij}^k = O_i^k \cdot D_j^k / \left(\sum_{\ell=1}^K O_i^\ell \cdot D_j^\ell \right), \quad (\text{VI.5})$$

estes problemas corresponderão respectivamente aos casos (P_1, C_i, S_1) , $i = 0, 1$.

Finalmente, parece que quatro casos são independentes, na prática:

$$\overline{N} \quad \overline{N}$$

$$(P_0, C_0, S_0), (P_0, C_1, S_0), (P_1, C_0, S_1)$$

e

$$(P_1, C_1, S_1) \quad (VI.6)$$

Os dois primeiros casos também poderão ser excluídos, por representarem casos em que o modelo entrópico correspondente é incapaz de indicar a distribuição modal dos fluxos entre os pares origem-destino.

Por exemplo, para o caso (P_0, C_1, S_0) corresponde o seguinte modelo (P_{10}) :

$$\max_{\left[T_{ij}^k \right]} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^K T_{ij}^k \right) \log \left(\left(\sum_{\ell=1}^K T_{ij}^{\ell} \right) / f_{ij} \right) = H$$

(VI.7)

$$k = 1, \dots, K$$

sujeito a:

$$T_{ij}^k \geq 0 \quad (VI.8)$$

$$\sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^K T_{ij}^k \right) = O_i \quad i = 1, \dots, N \quad (VI.9)$$

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=1}^K T_{ij}^k \right) = D_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{VI.10})$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^k T_{ij}^k = C^k, \quad k = 1, \dots, K \quad (\text{VI.11})$$

Pelo Lagrangeano:

$$\begin{aligned} L = & H(T_{ij}^k) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(\sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^K T_{ij}^k \right) - O_i \right) + \\ & + \sum_{j=1}^N \mu_j \left(\sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=1}^K T_{ij}^k \right) - D_j \right) + \\ & + \sum_{k=1}^K \gamma_k \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^k T_{ij}^k - C^k \right), \end{aligned} \quad (\text{VI.12})$$

são obtidas as condições necessárias e suficientes (já que $H(T_{ij}^k)$ é côncava) de otimalidade:

$$\begin{aligned} - (1 + \log (T_{ij}^k / f_{ij})) + \lambda_i + \mu_j + \gamma^k C_{ij}^k &= 0, \\ i = 1, \dots, N \\ j = 1, \dots, N \\ k = 1, \dots, K \end{aligned} \quad (\text{VI.13})$$

ou seja,

$$T_{ij} = f_{ij} e^{(-1 + \lambda_i + \mu_j)} \cdot e^{\gamma^k C_{ij}^k},$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$j = 1, \dots, N$$

$$k = 1, \dots, K \quad (\text{VI.14})$$

Esta última relação pode ser satisfeita em dois casos:

1º) quando $C_{ij}^k = C_{mn}^k \equiv \bar{C}^k$, (VI.15)

$$i = 1, \dots, N \quad m = 1, \dots, N$$

$$j = 1, \dots, N \quad n = 1, \dots, N$$

e $\gamma^k \bar{C}^k = \gamma^{k'} \cdot \bar{C}^{k'} = \Gamma = C_{te}$ (VI.16)

$$k = 1, \dots, K$$

$$k' = 1, \dots, K,$$

2º) quando $\gamma^k = 0$, $k = 1, \dots, K$. (VI.17)

Nestes dois casos, a solução de (P_{10}) em $\left[T_{ij}^k \right]$ é indefinida. Os fluxos globais previstos não dependem dos custos de transporte e são solução do modelo entrópico condicio-

nal (P_2) .

Qualquer solução do sistema de inequações (P_2) ,
(VI.11) e

$$\sum_{k=1}^K T_{ij}^k = T_{ij}^*, \quad i = 1, \dots, N \quad (VI.18)$$

$$j = 1, \dots, N$$

será solução do problema (P_{10}) .

Neste caso, como no caso (P_0, C_0, S_0) , as informações iniciais serão insuficientes para que o modelo entrópico correspondente forneça uma previsão de distribuição de viagens por modalidade.

VI.2.1 - Caso em Que o Planejador Dispõe da Informação (P_1, C_1, S_1)

Retomando a demonstração apresentada no início do capítulo IV para o desenvolvimento do modelo entrópico, pode-se mostrar que a distribuição $\left[T_{ij}^k \right]$, $k = 1, \dots, K$ mais provável, é solução do problema (P_{11}) :

$$\max_{\left[T_{ij}^k \right]} - \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij}^k \log (T_{ij}^k / f_{ij}^k) = H \quad (VI.19)$$

$$k = 1, \dots, K$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad T_{ij}^k &\geq 0 & i = 1, \dots, N & & \text{(VI.20)} \\ & & j = 1, \dots, N & & \\ & & k = 1, \dots, K & & \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^N T_{ij}^k = O_i^k, \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, K \quad \text{(VI.21)}$$

$$\sum_{i=1}^N T_{ij}^k = D_j^k, \quad j = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, K \quad \text{(VI.22)}$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^k T_{ij}^k = C^k, \quad k = 1, \dots, K \quad \text{(VI.23)}$$

Definindo H^k como sendo a função

$$H^k = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij}^k \log (T_{ij}^k / f_{ij}^k), \quad k = 1, \dots, K \quad \text{(VI.24)}$$

tem-se a relação

$$H = \sum_{k=1}^K H^k \quad \text{(VI.25)}$$

Essa relação mostra que a função entropia condicional, considerada em (P_2) , tem a importante propriedade de separabi-

lidade (GEOFFRION⁴³), assim como o problema (P₁₁) com as restrições (VI.20), (VI.21), (VI.22) e (VI.23). O problema (P₁₁), então, é equivalente a uma série de k problemas independentes relativos, cada um, a uma modalidade distinta:

Problema (P₁₁ - k)

$$\max - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij}^k \log (T_{ij}^k / f_{ij}^k)$$

$$\text{s.a.} \quad T_{ij}^k \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{VI.20-k})$$

$$j = 1, \dots, N$$

$$\sum_{j=1}^N T_{ij}^k = O_i^k, \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{VI.21-k})$$

$$\sum_{i=1}^N T_{ij}^k = D_j^k, \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{VI.22-k})$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^k T_{ij}^k = C^k \quad (\text{VI.23-k})$$

Sendo estes problemas da forma de (P₃), as considerações e resultados apresentados para esta forma são aplicáveis aqui. É de interesse notar que o desenvolvimento apresentado no capítulo IV, para o caso de uma previsão agregada, é também válido quando

se considera o caso desagregado por modalidade (P_1, C_1, S_1). Neste caso, as informações relativas a cada modalidade são auto-suficientes para efetuar a sua respectiva previsão de distribuição de viagens. As possíveis interações entre as várias modalidades estão totalmente contidas, de forma implícita, dentro das informações complementares fornecidas pelo planejador.

Nos casos em que a informação sobre a distribuição a priori das viagens seja do tipo P_0 , a função objetivo não será separável e o modelo correspondente participará diretamente da arbitragem entre as várias modalidades de cada par origem-destino. Nesses casos, assim como em outros, onde o modelo de otimização correspondente não é separável, interessará ao planejador tentar montar um esquema que permita, não só tratar, de forma individual, a distribuição segundo cada modalidade, mas também visualizar o processo de arbitragem entre as várias modalidades.

VI.2.2 - Caso em que o Planejador Dispõe da Informação (P_1, C_0, S_1):

Neste caso, dentro da abordagem desenvolvida no capítulo IV, obter-se-á o modelo entrópico seguinte (P_{12}):

$$\max_{\left[T_{ij}^k \right]} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^K T_{ij}^k \log (T_{ij}^k / f_{ij}^k) = H$$

$k = 1, \dots, K$ (VI.26)

sujeito a:

$$T_{ij}^k \geq 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ j = 1, \dots, N \\ k = 1, \dots, K \end{array} \quad (\text{VI.27})$$

$$\sum_{j=1}^N T_{ij}^k = O_i^k, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ k = 1, \dots, K \end{array} \quad (\text{VI.28})$$

$$\sum_{i=1}^N T_{ij}^k = D_j^k, \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, N \\ k = 1, \dots, K \end{array} \quad (\text{VI.29})$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^k T_{ij}^k = C \quad (\text{VI.30})$$

Este caso poderá corresponder à situação em que o planejador dispõe de uma informação sobre um índice global de sensibilidade da população local ao custo de deslocamento. Este problema é estritamente convexo e admite uma solução da forma:

$$T_{ij}^k = f_{ij}^k e^{-1 + \lambda_i^k + \mu_j^k + \gamma C_{ij}^k}, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ j = 1, \dots, N \\ k = 1, \dots, K \end{array} \quad (\text{VI.31})$$

correspondendo ao modelo gravitacional, onde a impedância dos custos é comum a todas as modalidades.

VI.2.3 - Resumo dos Modelos Entrópicos Considerados

Resume-se aqui, o tipo de solução obtida em cada caso:

CASO			TIPO DE SOLUÇÃO
P_0	C_0	S_0	solução global T_{ij}
P_0	C_0	S_1	solução assimilada ã de (P_1, C_0, S_1)
P_1	C_0	S_0	solução assimilada ã de (P_1, C_0, S_1)
P_1	C_0	S_1	solução por modalidade T_{ij}^k
P_0	C_1	S_0	solução global T_{ij}
P_0	C_1	S_1	solução assimilada ã de (P_1, C_1, S_1)
P_1	C_1	S_0	solução assimilada ã de (P_1, C_1, S_1)
P_1	C_1	S_1	solução por modalidade T_{ij}^k

VI.3 - RESOLUÇÃO DO CASO (P_1, C_0, S_1) PELAS TÉCNICAS DE DECOMPOSIÇÃO DA PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Várias observações podem ser efetuadas sobre o problema (P_1, C_0, S_1) :

- se não fosse a restrição (VI.30), este problema seria separável e, poder-se-ia fazer uma análise de distribuição de fluxos para cada modalidade de forma independente (ver o caso (P_1, C_1, S_1)).
- a resolução numérica do caso (P_1, C_0, S_1) através de métodos como os analisados ou propostos nos capítulos III e V, poderá apresentar dificuldades devido ao grande número de variáveis $(K.N^2)$ e de restrições de igualdade $(2KN+1)$.

Estas observações conduzem naturalmente à consideração da aplicação das técnicas de descentralização da Programação Matemática para sistemas de grande porte (LASDON⁵⁸), (GEOFFRION⁴³) e (GEOFFRION⁴¹). Duas técnicas de descentralização são de interesse aqui:

- Dualização com relação às restrições de acoplamento dos sub-sistemas (aqui, a relação (VI.30) está acoplando as várias modalidades de transporte na mesma restrição de custos).
- Projeção nos subsistemas dos recursos globais (aqui do custo total, segundo as distintas modalidades).

VI.3.1 - Decomposição por Modalidade Através da Dualização do Problema de Otimização

Neste caso, considera-se o problema (P_{12}) com relação à restrição de custo (VI.30) (P_{13}) :

$$\min_{\gamma} \left\{ \max_{\begin{bmatrix} T_{ij}^k \end{bmatrix}} L \left(\begin{bmatrix} T_{ij}^k \end{bmatrix}, \gamma \right) \right\}$$

sujeito às restrições modais (VI.27), (VI.28) e (VI.29), com

$$L = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^K T_{ij}^k \log (T_{ij}^k / f_{ij}^k) + \gamma \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^K C_{ij}^k T_{ij}^k - C \right] \quad (\text{VI.32})$$

Sendo este problema convexo, os resultados da Teoria da Dualidade da Programação Não Linear (dualidade forte) são aplicáveis. Em particular, as soluções em $\begin{bmatrix} T_{ij}^k \end{bmatrix}$, $k = 1, \dots, K$, dos problemas (P_{12}) e (P_{13}) serão idênticas.

Com relação aos $\begin{bmatrix} T_{ij}^k \end{bmatrix}$, $k = 1, \dots, K$, pode-se escrever o Lagrangeano na forma separável seguinte:

$$L = \sum_{k=1}^K \left[- \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij}^k \log (T_{ij}^k / f_{ij}^k) + \right. \\ \left. + \gamma \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^k T_{ij}^k \right] - \gamma C \quad (\text{VI.33})$$

ou ainda

$$L = \sum_{k=1}^K \tilde{H}^k - \gamma C \quad (\text{VI.34})$$

com

$$\tilde{H}^k = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij}^k \log (T_{ij}^k / \tilde{f}_{ij}^k) \quad (\text{VI.35})$$

definindo os \tilde{f}_{ij}^k como sendo:

$$\tilde{f}_{ij}^k = f_{ij}^k \cdot e^{\gamma C_{ij}^k} \quad (\text{VI.36})$$

Ou seja, as ponderações dentro da função entropia condicional serão modificadas, levando-se em conta os custos modais.

Através de um índice global de sensibilidade ao custo s , tal como definido no capítulo IV, pode-se mostrar que, se ao nível C , considerado em (P_{12}) , corresponde um índice s tal que

$$0 < s < 1 \quad (\text{VI.37})$$

a solução dos problemas (P_{12}) e (P_{13}) é:

$$\gamma < 0 \quad (\text{VI.38})$$

Este resultado mostra que as novas ponderações dos fluxos discriminados por modalidade penalizam as modalidades de custo mais elevado.

Tomando-se por base a separabilidade do problema (P_{13}) , pode-se propor um esquema para sua resolução, composto de dois níveis:

- ao nível inferior, são tratados de forma independente, os problemas de previsão de fluxos de distribuição por modalidade $(P_{13} - k)$:

$$\max_{\left[T_{ij}^k \right]} H^k \quad k = 1, \dots, K \quad (\text{VI.39})$$

s.a. (VI.27-k), (VI.28-k) e (VI.29-k)

e considera-se que os $\left[T_{ij}^{*k}(\gamma) \right]$ sejam soluções destes sub-problemas, de forma idêntica ao modelo entrópico condicional;

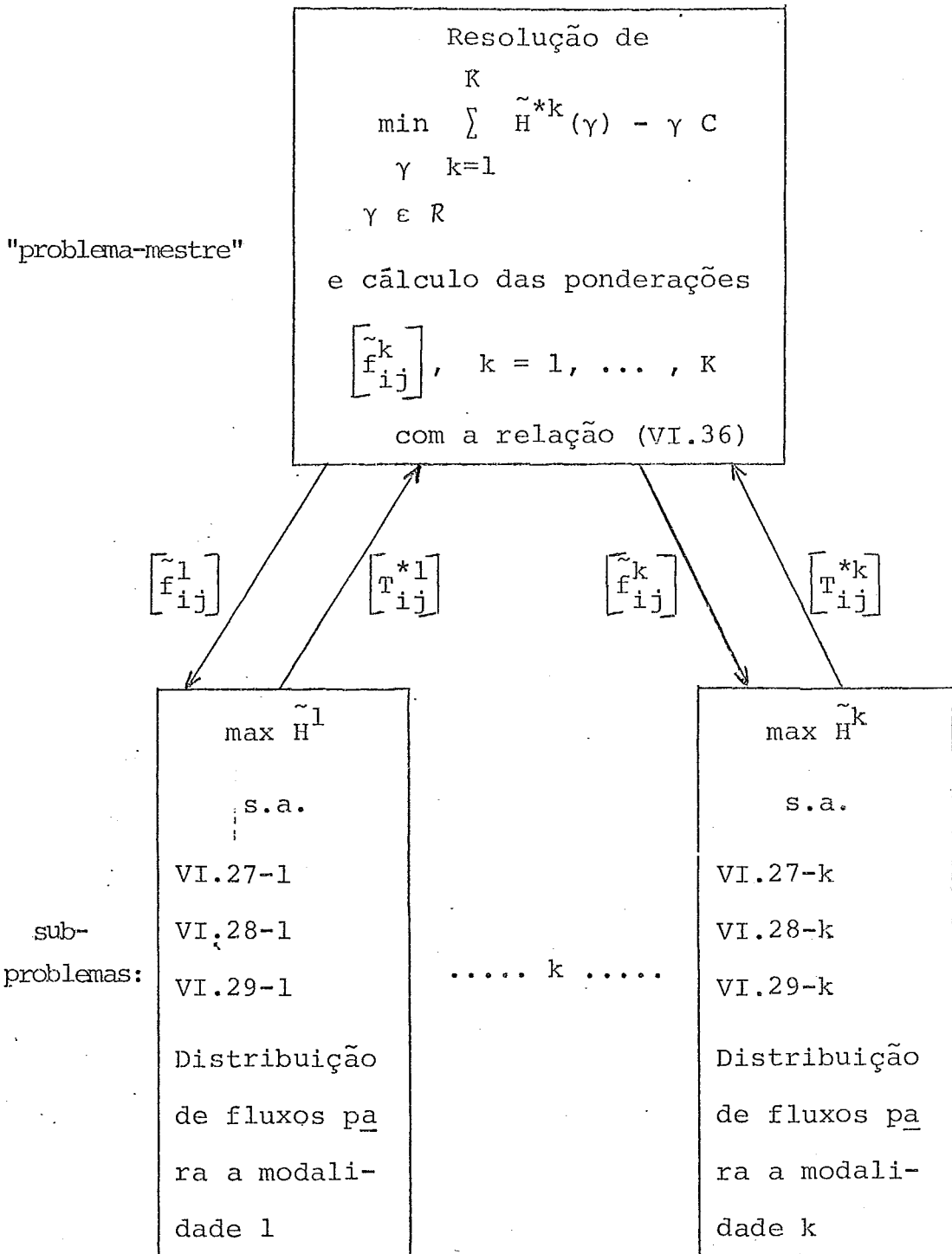
- ao nível superior, realiza-se uma "coordenação pelos preços" entre as várias modalidades, de forma a determinar

a distribuição mais provável, resolvendo-se o "problema-mestre":

$$\min_{\gamma} \sum_{k=1}^K \tilde{H}^k \left(\left[T_{ij}^{*k}(\gamma) \right] \right) - \gamma \cdot C \quad (\text{VI.40})$$

Para resolver este problema, existe uma grande variedade de algoritmos possíveis, relacionados em LASDON⁵⁸, GEOFFRION⁴³ e LUNA⁶².

A consideração do "problema-mestre" conduzirá a uma melhor previsão da variável dual γ e das ponderações \tilde{f}_{ij}^k , que serão aproveitadas dentro dos subproblemas para fornecer soluções modais intermediárias. Este processo será repetido até que seja satisfeito um critério de término. O esquema de resolução pode ser apresentado da seguinte forma:



Notar-se-á que os algoritmos do tipo "gradiente" poderão ser utilizados, facilmente, para resolver o "problema-mestre". Os subproblemas admitem uma solução estritamente positiva se a condi-

ção V.3 for satisfeita. Na solução do subproblema (P_{13}^k) tem-se:

$$\frac{d\tilde{H}^{*k}}{d\gamma} = \frac{\partial\tilde{H}^{*k}}{\partial\gamma} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial\tilde{H}^{*k}}{\partial T_{ij}^k} \cdot \frac{dT_{ij}^k}{d\gamma} \quad (\text{VI.41})$$

onde

$$\frac{\partial\tilde{H}^{*k}}{\partial\gamma} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^k T_{ij}^{*k} \quad (\text{VI.42})$$

$$\frac{\partial\tilde{H}^{*k}}{\partial T_{ij}^k} = - (1 + \log (T_{ij}^{*k}/\tilde{f}_{ij}^k)) \quad (\text{VI.43})$$

e, a partir do conhecimento dos resultados da análise de sensibilidade desenvolvida no parágrafo V.4.2:

$$\frac{dT_{ij}^k}{d\gamma} = C_{ij}^k T_{ij}^{*k} - \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N S_{kl}^k C_{kl}^k \quad (\text{VI.44})$$

onde S^k é a matriz definida em V.50 para a modalidade k .

Os k subproblemas poderão ser resolvidos simplesmente através do uso do algoritmo de Furness.

Percebe-se, aqui, que embora a convergência de

muitos desses algoritmos já tenha sido provada, esta abordagem da resolução do problema por decomposição matemática poderá conduzir, normalmente, a soluções intermediárias não viáveis, e sua viabilidade só será garantida na solução global do problema.

VI.3.2 - Decomposição por Modalidade Através da Alocação dos Recursos

Neste caso, o problema (P_{12}) é reescrito na forma (P_{14}) :

$$\text{Max } \sum_k H^k \\ c^k, [T_{ij}^k]_k, \quad k = 1, \dots, K$$

sujeito às restrições locais (VI.27-k), (VI.28-k) e (VI.29-k)

$$\sum_i \sum_j c_{ij}^k T_{ij}^k = C^k \quad (\text{VI.45-k})$$

e a restrição global:

$$\sum_{k=1}^K C^k = C \quad (\text{VI.46})$$

Assim, fixando o valor dos C^k (montante da alocação de recursos à modalidade k), podem-se definir os k subproblemas $(P_{14} - k)$:

$$\max H^k$$

sujeito a (VI.27-k), (VI.28-k), (VI.29-k) e (VI.45-k) (VI.47)

$$k = 1, \dots, K$$

Considera-se os $\left[T_{ij}^*(C^k) \right]$ como soluções destes subproblemas e $H^{*k}(C^k)$ como os valores da função objetivo na solução de cada um.

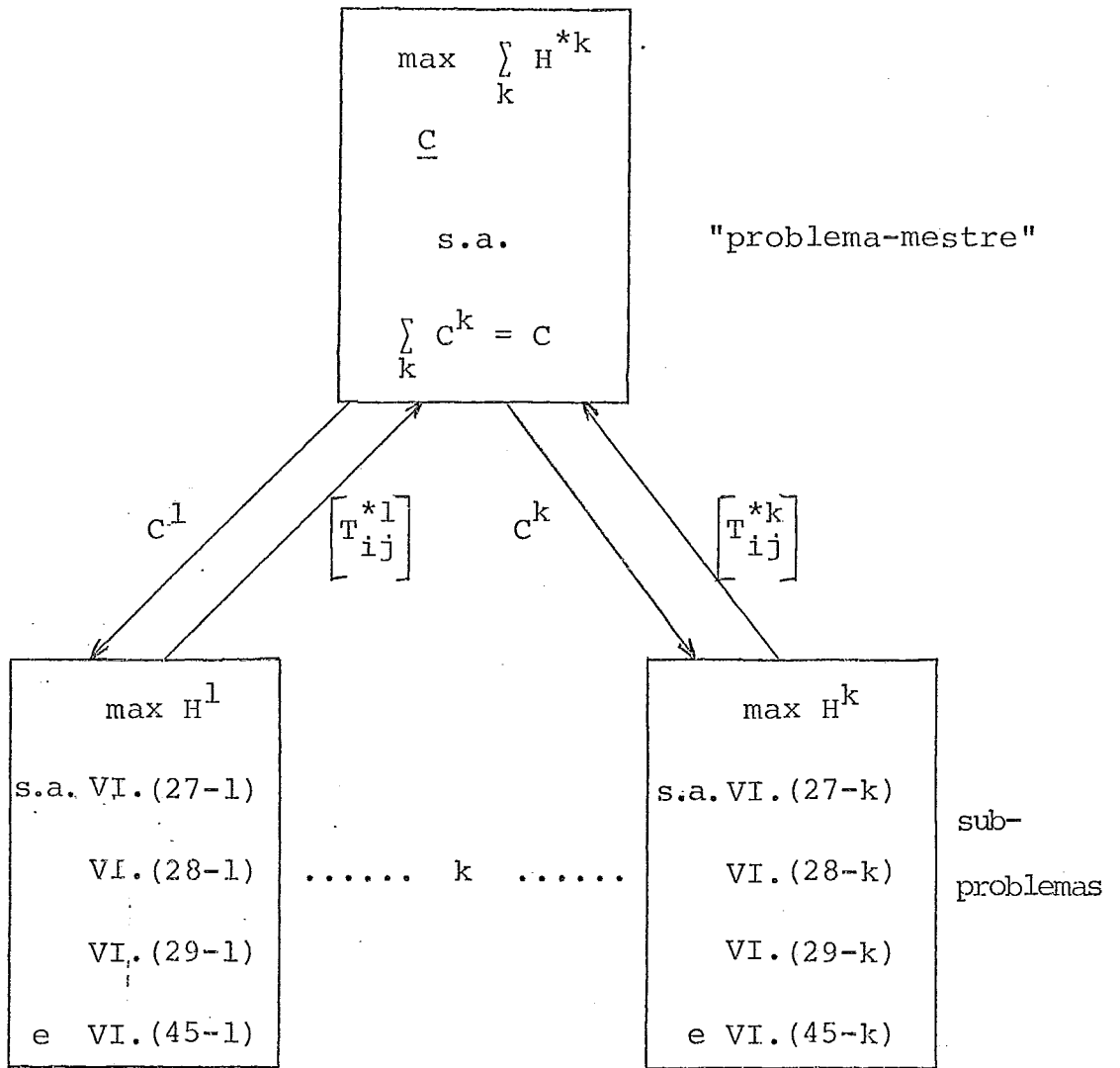
Ao nível superior, resolver-se-á o "problema-mestre" coordenando estes subproblemas, ou seja:

$$\max_{C^k} H^{*k}(C^k) \quad (\text{VI.48})$$

$$k = 1, \dots, K$$

sujeito a (VI.46).

Para resolver este problema, existe, também aqui, considerável variedade de algoritmos (GEOFFRION⁴²), (GEOFFRION⁴⁴). O esquema de resolução pode ser representado da seguinte forma:



Novamente, os algoritmos do tipo "gradiente" poderão ser utilizados, escolhendo os C^k tal que: $C_{\min}^k < C^k < C_{\max}^k$. Na solução do subproblema (P_{14-k}) , obter-se-á:

$$\frac{dH^{*k}}{dC^k} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial H^{*k}}{\partial T_{ij}^k} \cdot \frac{dT_{ij}^k}{dC^k} \quad \text{(VI.49)}$$

onde

$$\frac{\partial H^{*k}}{\partial T_{ij}^k} = - (1 + \log (T_{ij}^{*k}/f_{ij}^k)) \quad (\text{VI.50})$$

e $\frac{dT_{ij}^k}{dC^k}$ é dado pela relação V.65, desenvolvida pa-

ra analisar a sensibilidade da solução do modelo entrópico res-
trito em relação ao custo total de viagem C , ou seja:

$$\frac{dT_{ij}^k}{dC^k} = m_{(ij)2N}^k, \quad \begin{aligned} i &= 1, \dots, N \\ j &= 1, \dots, N \\ k &= 1, \dots, K \end{aligned} \quad (\text{VI.51})$$

onde $m_{(ij)2N}^k$ é o elemento da matriz M^k (ver relação V.66) na li
nha $N(i-1)+j$ e na coluna $2N$.

Definindo a direção \underline{d} , por exemplo, como:

$$\underline{d}^k = \frac{dH^{*k}}{dC^k}, \quad k = 1, \dots, K \quad (\text{VI.52})$$

na iteração $(n+1)$ do nível superior, uma nova repartição dos cus-
tos entre as várias modalidades poderá ser dada por:

$$C^k(n+1) = C^k(n) + \theta^{(n)} D^k(n) \quad (\text{VI.53})$$

onde $\underline{D}^{(n)}$ é a projeção de $\underline{d}^{(n)}$ sobre o hiperplano ortogonal ao vetor $(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^K$ e $\theta^{(n)}$ é escolhido de tal forma que as relações

$$C_{\min}^k < C^{k(n+1)} < C_{\max}^k, \quad k = 1, \dots, K \quad (\text{VI.54})$$

sejam satisfeitas. É importante sublinhar que qualquer solução intermediária dos K subproblemas serão globalmente viável, a equação (VI.54) será sempre satisfeita. O planejador, portanto, poderá fazer uso desses resultados a qualquer instante.

VI.4 - MODELOS ENTRÓPICOS COM VÁRIAS CLASSES DE POPULAÇÃO

Até agora, considerou-se a população da área estudada bastante homogênea em termos sócio-econômicos. É bem sabido que, no Brasil, essa hipótese é pouco realista, principalmente em relação às modalidades de transporte público, cada vez mais utilizadas pelas classes de maior poder aquisitivo, depois das várias crises energéticas, que conduziram a aumentos reais do custo do combustível para o transporte individual.

Supondo que a população da área seja composta de R classes distintas, os custos unitários de transporte serão os mesmos para todas as classes:

$$C_{ij}^r = C_{ij}, \quad \begin{array}{l} r = 1, \dots, R \\ i = 1, \dots, N \\ j = 1, \dots, N \end{array} \quad (\text{VI.55})$$

Tomando-se por base as várias situações possíveis para o planejador, em relação às informações disponíveis, poder-se-á montar uma dicotomia similar à anterior para os modelos entrópicos correspondentes. A situação que parece ser a mais relevante, aqui, corresponde ao caso em que planejador disponha de informações do tipo (P_0, C_1, S_1) , ou seja:

- os resultados de um estudo de geração-atração por classes de população são disponíveis;
- o planejador dispõe de avaliações da sensibilidade de cada estrato de população da área ao custo de transportes.

Como foi visto anteriormente, a partir da informação S_1 o planejador pode utilizar uma distribuição de probabilidade a priori compatível para cada classe da população:

$$f_{ij}^r = O_i^r \cdot D_j^r / \left(\sum_{\ell=1}^R O_i^\ell \cdot D_j^\ell \right) \quad (\text{VI.56})$$

Obtêm-se, então, um modelo entrópico da classe (P_1, C_1, S_1) totalmente separável por classe de população (veja-se parágrafo VI. 2.1).

A análise de distribuição de viagens pode ser desenvolvida de forma independente para cada classe de população. Os resultados e considerações estabelecidos para o estudo da distribuição de viagens por modalidade podem ser facilmente

adaptados a este caso quando são consideradas as outras situações (P_i, C_j, S_k) . Considerando-se a possibilidade de prever a distribuição das viagens dentro de uma área por classe de população e por tipo de modalidade de transporte, pode-se evidenciar que existem 64 $(2^3 \times 2^3)$ formulações entrópicas distintas, possíveis. Dentre elas, poucas são irredutíveis ou de real interesse para o planejador. Por exemplo, a situação onde se têm as seguintes informações:

$$\left[f_{ij}^k \right] ; \underline{O}^r , \underline{D}^r ; \left[C_{ij}^k \right] ; C^r \quad (\text{VI.57})$$

$$k = 1, \dots, K$$

$$r = 1, \dots, R$$

pode ser reduzida a um problema separável por classe de população, com cada subproblema correspondendo ao caso (P_1, C_0, S_1) em relação às modalidades de transporte.

VI.5 - ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DE VIAGENS COM RESTRIÇÃO DE FROTA

Se considerarmos um sistema de transporte público, cuja demanda de viagens seja cativa e representada pelos volumes de geração e de atração de cada zona, e pela distribuição a priori de viagens para esta modalidade, com a capacidade de frota (Km x veículos) de um único operador, limitada a C, a dis-

tribuição de viagens mais provável será solução do problema entrópico restrito (P_3) onde:

$$C_{ij} = L_{ij} / (\eta \cdot K) \quad (\text{VI.58})$$

com

L_{ij} representando o comprimento médio das linhas que ligam as zonas i e j ;

e

$\eta \cdot K$, uma capacidade prática média na rede.

Se existem K empresas transportadoras, de capacidade total de frota C^k , a distribuição mais provável será solução de um modelo entrópico correspondendo ao caso (P_0, C_1, S_0) , para o qual foi mostrado em VI.2 que existe uma solução $[T_{ij}^*]$ cuja discriminação entre transportadoras não é determinável.

VI.6 - COMENTÁRIOS FINAIS

Neste capítulo, foi avaliada a capacidade dos modelos de previsão, maximizando funções entrópicas condicionais, para atender a várias situações de interesse do planejador, tais como: múltiplas modalidades, estratificação da população da área e restrições de frota. Mostrou-se que existe uma grande variedade de modelos entrópicos possíveis, dos quais somente um número reduzido permite realizar as previsões desejadas. Também mos

trou-se como, a partir das propriedades de separabilidade e da utilização de técnicas de decomposição-coordenação da programação matemática, pode-se transformar estes modelos em uma série de modelos entrópicos condicionais ou de modelos entrópicos restritos, cujas propriedades já foram analisadas, com profundidade, nos capítulos anteriores.

CONCLUSÃO GERAL

Este trabalho é o resultado de uma pesquisa teórica sobre os modelos entrópicos de distribuição de viagens, abrangendo seus aspectos principais, a saber:

- Identificação das situações em que tais modelos podem ser utilizados, valendo-se, principalmente, da importante noção de sensibilidade da população ao custo de transporte;
- Caracterização da solução destes modelos (com modelo entrópico restrito recebendo cuidado especial, em face a sua relevância evidenciada neste trabalho), valendo-se dos resultados da Teoria da Dualidade da Programação Geométrica e da Análise de Convexidade;
- Interpretação da solução em termos de utilidade global e de acessibilidade global da rede de transporte;
- Resolução numérica, incluindo uma análise da solvabilidade e da sensibilidade, assim como a proposição de uma estratégia de resolução, conduzindo ao aproveitamento de um algoritmo clássico de programação convexa - o método do Simplex-convexo;
- Avaliação das possíveis extensões destes modelos considerando-se, principalmente, o caso de uma análise de distribuição multimodal, para o qual foi demonstrada a adequação deste tipo de modelos, ora conduzindo a uma série

de modelos independentes unimodais de distribuição, ora a um esquema de resolução descentralizado por modalidade.

Em conclusão, parece lícito esperar-se que a presente pesquisa possa conduzir, tanto sob o aspecto teórico quanto o prático, a resultados de real interesse para o estudo de importantes problemas do planejamento de transportes. Ainda que o desenvolvimento computacional dos resultados decorrentes deste trabalho esteja numa fase inicial, pode-se esperar uma grande utilização destes modelos e métodos de resolução em vários campos do planejamento de transporte (planejamento de transporte público urbano e interurbano, planejamento de transporte de carga, planejamento de transporte aéreo, etc.).

ANEXO 1: PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA

1. INTRODUÇÃO:

A programação geométrica é uma técnica relativamente nova, desenvolvida para resolver certos problemas de programação não linear com restrições lineares ou não lineares.

Esta técnica foi desenvolvida, inicialmente, por DUFFIN, ZENER e PETERSON²⁹ que publicaram os primeiros trabalhos, abrangendo a teoria e algumas aplicações na área de engenharia.

A partir dos primeiros resultados teóricos obtidos, vários autores se dedicaram a extensões e generalizações da teoria bem como a aplicações práticas (AGGARWAL¹, BEIGHTLER³ e MORA-CAMINO⁷¹).

O interesse desta técnica reside na transformação de um problema de programação não linear e não convexo em um problema de programação com critério convexo e restrições lineares: o problema "dual geométrico".

2. PROBLEMA BÁSICO:

O problema básico da programação geométrica pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\min g_0(t)$$

s.a.

$$t_i > 0, t \in \mathbb{R}^m \quad (\text{restrições naturais}) \\ i=1, \dots, m$$

e

$$g_k(\underline{t}) \leq 1, k = 1, \dots, p \quad (\text{restrições forçadas})$$

com

$$g_k(\underline{t}) = \sum_{i=m_k}^{n_k} c_i \cdot \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}}, \quad k = 0, \dots, p$$

e

$$c_i > 0, a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Os termos da forma $u_i = c_i t_1^{a_{i1}} \cdot t_2^{a_{i2}} \cdot t_3^{a_{i3}} \dots$

$t_m^{a_{im}}$ são chamados termos posinomiais ou posinômios.

Para facilitar a notação, os índices m_k e n_k são geralmente escolhidos da seguinte forma:

$$m_0 = 1 \leq n_0 \leq \dots \leq m_k = n_{k-1} + 1 \leq n_k \leq \dots \leq n_p = n$$

A matriz A dos expoentes do problema básico é

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \quad A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

e define-se o grau de dificuldade do problema básico como sendo o número inteiro d , tal que:

$d = \text{número de termos posinomiais} - \text{número de variáveis} - 1$, ou seja,

$$d = n - m - 1$$

3. PROBLEMA DUAL:

Ao problema básico de programação geométrica es
tã associado um problema Dual geométrico:

$$\text{MAX } v(\underline{y}) = \sum_{k=0}^N \sum_{i=m_k}^{n_k} y_i \log (c_i z_k / y_i)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{n_0} y_i = 1 \quad \text{condição de normalidade}$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} y_i = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad \text{condição de ortogonalidade}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{condição de positividade}$$

com

$$z_k = \sum_{i=m_k}^{n_k} y_i$$

e

$$y_i \log (c_i z_k / y_i) = 0 \quad \text{se } y_i = 0$$

Pode-se mostrar que $v(\underline{y})$ é côncava e continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^{n^+} - \{0\}$ e também que este problema dual corresponde, pela dualidade de Lagrange (ZANGWILL¹⁰²), ao problema primal:

$$\min \log g_0(\underline{t})$$

s.a.

$$\log g_k(\underline{t}) \leq 0, \quad k = 1, \dots, p$$

$$\underline{y} - A \underline{d} = \underline{b}$$

com

$$\underline{b}^T = (\log(C_1) \dots, \log(C_n))$$

$$\underline{d}^T = (\log(t_1) \dots, \log(t_m))$$

e

$$g_k(\underline{t}) = \sum_{i=m_k}^{n_k} \exp(y_i), \quad k = 0, \dots, p$$

que é equivalente ao problema básico.

4. DEGENERACÃO:

O problema básico é canônico quando cada solução do sistema de desigualdade

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \leq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

é uma solução do sistema de equações:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

e o problema dual é canônico se existe um vetor \underline{y} satisfazendo as condições de ortogonalidade e tal que

$$y_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Um problema, básico ou dual, é degenerado quando ele não é canônico (MORA-CAMINO⁷¹).

Considerando:

$$J_0 = \{1, 2, \dots, n_0\}$$

$$J_k = \{m_k, m_{k+1}, \dots, n_k\}, k = 1, \dots, p$$

e

$$J = \{h \mid \sum_{j=1}^m a_{kj} y_j = 0, \text{ para todo } \underline{y} \text{ que satisfa-}$$

$$\text{ça as restrições: } \left. \sum_{j=1}^m a_{kj} y_j \leq 0 \right\}$$

o problema básico será simplesmente degenerado se $J_0 \cap J \neq \emptyset$ e totalmente degenerado se $J_0 \cap J = \emptyset$.

5. FORMAS REDUZIDAS:

Se o problema básico não é totalmente degenerado, sua forma reduzida será:

$$\min \hat{g}_0(\underline{t}) = \sum_{i \in J_0 \cap J} u_i(\underline{t})$$

s.a.

$$\underline{t} \in \mathbb{R}^m$$

$$t_i > 0, i = 1 \text{ a } m$$

$$\hat{g}_k(\underline{t}) \leq 1; k \in L$$

com

$$\hat{g}_k(\underline{t}) = \sum_{i \in J_k \cap J} u_i(\underline{t})$$

e

$$L = \{k \mid J_k \cap J \neq \emptyset, k = 1, \dots, p\}$$

A forma reduzida para o problema dual, se ele não é totalmente degenerado, será:

$$\text{MAX } v(\underline{y}) = \sum_{k \in L} \sum_{i=m_k}^{n_k} y_i \log(c_i \hat{z}_k / y_i)$$

s.a.

$$y_i \geq 0, \quad i \in J$$

$$\sum_{i \in J \cap J} y_i = 1$$

$$\sum_{i \in J} a_{ij} y_i = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

$$y_i = 0, \quad \forall i \notin J$$

com

$$\hat{z}_k = \sum_{i \in J_k \cap J} y_i, \quad k \in L$$

e

$$L = \{k \mid J_k \cap J \neq \emptyset, k = 0, \dots, p\}$$

6. CORRESPONDÊNCIA ENTRE OS PROBLEMAS BÁSICO E DUAL:

Utilizando a desigualdade geométrica clássica, mos

tra-se que se \underline{t} satisfaz as restrições do problema básico e que se \underline{y} satisfaz as restrições do problema dual, então

$$g_0(\underline{t}) \geq V(\underline{y})$$

com

$$V(\underline{y}) = \exp v(\underline{y})$$

Pode-se mostrar também que uma condição necessária e suficiente para que o problema básico seja canônico é que o problema dual também seja canônico e que, então, uma condição necessária e suficiente para que o problema básico seja consistente (conjunto de soluções viáveis não vazio) é que $V(\underline{y}^*) < \infty$, ou seja, que o valor de $V(\underline{y})$ para a solução do problema dual \underline{y}^* , seja finito. Tem-se então: $g_0(\underline{t}^*) = V(\underline{y}^*)$.

Se os problemas, básico e dual, não são totalmente degenerados, suas formas reduzidas são problemas canônicos. Se as soluções destes últimos problemas correspondem a valores finitos de mínimo e de máximo, $\hat{g}_0(\underline{t}^*)$ e $\hat{V}(\underline{y}^*)$, então \underline{t}^* e \underline{y}^* são soluções dos problemas iniciais e tem-se:

$$g_0(\underline{t}^*) = \hat{g}_0(\underline{t}^*) = \hat{V}(\underline{y}^*) = V(\underline{y}^*)$$

Quando os problemas, básico e dual, são completamente degenerados, o problema dual é inconsistente.

Finalmente, se o problema básico é superconsistente e se \underline{t}^* é a solução ótima, então:

- . o problema dual admite um máximo de valor finito;
- . o mínimo do problema básico é igual ao máximo do problema dual;
- . as soluções básicas e duais satisfazem as relações:

$$V(\underline{y}^*) \cdot y_j^* = u_j(\underline{t}^*) \quad , \quad j \in J_0$$

$$y_j^* / \sum_{i \in J_k} y_i^* = u_j(\underline{t}^*) \quad , \quad j \in J_k$$

7. CONSIDERAÇÕES SOBRE A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DUAL:

A resolução do problema dual traz as seguintes vantagens:

- . o problema dual é convexo enquanto que o primal não é;
- . as restrições do dual são lineares;
- . a dimensão do problema dual pode ser reduzida ao grau de dificuldade do problema básico pela eliminação de $m+1$ variáveis nas restrições de normalidade e ortogonalidade.
- . sob determinadas condições, pode-se calcular diretamente a solução ótima \underline{t}^* a partir da solução \underline{y}^* do problema dual;
- . no problema dual, os coeficientes c_i aparecem apenas na função objetivo, o que facilita o estudo da sensibilidade em relação a esses parâmetros.

O inconveniente principal do problema dual consiste na não derivabilidade de $V(\underline{y})$ quando

$$y_i = 0, i \in \{ 1, 2, \dots, n \} ,$$

o que acarreta dificuldades na sua resolução por métodos de tipo "gradiente".

8. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO:

Serão apresentadas, a seguir, algumas observações em relação às condições de aplicação dos vários métodos numéricos de resolução:

- . se o grau de dificuldade do problema básico é negativo , então ele, geralmente, não será consistente (há mais restrições do que variáveis) e deve-se resolver diretamente o problema básico por qualquer método de programação não linear como, por exemplo, o método do gradiente projetado ou um método de plano de corte (DINKEL²⁴). Estes métodos podem se revelar eficazes mesmo quando o grau de dificuldade é estritamente positivo;
- . se a relação entre o número de variáveis independentes do problema e seu grau de dificuldade (suposto estritamente positivo) é muito pequena, pode ser vantajoso resolver o problema básico sem passar pela resolução do problema dual.
- . no caso em que o grau de dificuldade é nulo, duas propri

idades do problema dual são interessantes:

- 1º) o domínio admissível do problema dual é, geralmente, reduzido a apenas um ponto, solução de um sistema de equações lineares,
- 2º) a solução do problema dual depende apenas dos coeficientes c_i da função objetivo do problema básico;

se o grau de dificuldade d do problema básico é positivo e se m/d não é muito pequeno, resolve-se um problema dual não trivial. Este problema poderá ser resolvido por meio de diversas técnicas de programação convexa:

- i) método de aproximação linear,
- ii) método do simplex em programação côncava,
- iii) método modificado do simplex em programação côncava (MORA-CAMINO⁷¹).

ANEXO 2: PROBABILIDADES A PRIORI E O PRINCÍPIO DA ENTROPIA MÁXIMA
-----1. INTRODUÇÃO:

Em problemas reais de decisão ou inferência, têm-se, frequentemente, informações a priori que são altamente relevantes para sua análise. No entanto, a transformação dessas informações a priori em probabilidades a priori, ainda é motivo de grandes discussões. A determinação de prioridades é fundamental para a teoria da decisão. Existem casos em que a informação a priori é a única disponível e as decisões precisam ser inteiramente baseadas na mesma.

Pode-se mostrar que, para certas classes de problemas, a probabilidade a priori pode ser tão objetiva quanto a probabilidade direta.

O estabelecimento das probabilidades a priori é aparentemente subjetivo, porém se for baseado nos dados específicos concretos que levam alguém a uma tomada de decisão (e não nas opiniões pessoais) pode, então, ser considerado como objetivo.

Um princípio básico para um estabelecimento objetivo de probabilidades a priori é a seguinte: "em dois problemas com a mesma informação a priori, devem ser propostas as mesmas probabilidades a priori" (JAYNES⁵²).

Alguns tipos de informações a priori parecem mui

to vagos para serem interpretados em termos matemáticos.

A informação a priori deve satisfazer um conjunto mínimo de exigências antes de poder ser usada pelos métodos conhecidos atualmente. Uma das exigências para que uma informação possa ser convertida numa especificação única de probabilidade a priori é a de que ela seja testável.

Segundo JAYNES⁵²:

"Uma parte de informação I, relativa à um parâmetro θ , será 'testável' se, dada qualquer proposição de distribuição de probabilidade a priori $f(\theta)$, existe um procedimento que determinará, de forma não ambígua, se $f(\theta)$ está ou não de acordo com a informação I".

O princípio da entropia máxima é utilizado tanto para calcular probabilidades a priori como também para probabilidades diretas.

2. PRINCÍPIO DA ENTROPIA MÁXIMA:

Uma objeção comum em relação à este princípio é de que as probabilidades, assim obtidas, não têm interpretação em termos de frequências e não há razão para acreditar que as distribuições observadas experimentalmente deveriam concordar com aquelas obtidas por este método. No entanto, pode-se mostrar que:

. em um certo sentido, as distribuições de máxima entropia

têm correspondência precisa com frequência;

. na maioria dos problemas reais, entretanto, a relação com a frequência é desnecessária para a utilidade do princípio;

. de fato, o princípio é mais útil nos casos onde a distribuição empírica é diferente da prevista pelo método da entropia máxima.

Para a aplicação do princípio da entropia máxima, não há necessidade de que a distribuição procurada seja o resultado de qualquer experiência aleatória. Este método corresponde a uma extensão do campo de aplicação dos métodos Bayesianos aos problemas onde as probabilidades a priori não têm nenhuma interpretação razoável em termos de frequência. No entanto, não há nada que impeça a sua aplicação nos casos em que a distribuição a priori resulta de algumas experiências aleatórias. Deve-se esperar que exista uma correlação bastante próxima entre a distribuição de máxima entropia e as frequências observáveis em tais casos. De fato, qualquer princípio de definição de probabilidades que não tenha esta propriedade de correlação deve, certamente, conter inconsistências lógicas.

Supondo o caso discreto, pode ser dada a seguinte ilustração dos argumentos expostos.

A quantidade x pode ter os valores (x_1, \dots, x_n) onde n pode ser finito ou contavelmente infinito e x_i pode ser especificado arbitrariamente. A informação disponível a respeito

to de x coloca certas restrições na distribuição de probabilidade de $p = p(x_i)$. Assume-se por conveniência, embora não seja indispensável para o caso, que estas probabilidades tomem a forma de valores médios de várias funções ($f_1(x), \dots, f_m(x)$) onde $m < n$. A distribuição de probabilidade p_i que incorpora esta informação, mas que é livre de qualquer outra suposição, é então aquela que maximiza:

$$H = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (\text{A.1})$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1 \quad (\text{A.2})$$

$$\sum_{i=1}^N p_i f_k(x_i) = F_k, \quad (k = 1, \dots, m) \quad (\text{A.3})$$

onde F_k são os valores médios préfixados.

A solução é:

$$p_i = \frac{1}{Z(\lambda_1, \dots, \lambda_m)} \cdot \exp \left[\lambda_1 f_1(x_i) + \dots + \lambda_m f_m(x_i) \right] \quad (\text{A.4})$$

com

$$Z(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \equiv \sum_{i=1}^N \exp \left[\lambda_1 f_1(x_i) + \dots + \lambda_m f_m(x_i) \right] \quad (\text{A.5})$$

na qual as constantes reais são determinadas a partir das restrições (A.3), que levam à relação

$$F_k = \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \log Z(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \quad (\text{A.6})$$

A distribuição (H) é aquela que, de um certo modo, se espalha tão uniformemente quanto possível sem contradizer a informação dada a priori, isto é, ela dá total liberdade a toda a variabilidade possível de x permitida pelas restrições. Então, ela consegue, pelo menos de um modo, a finalidade intuitiva de propor uma distribuição a priori: ela concorda com o que é conhecido, mas expressa uma "incerteza máxima" com relação às outras coisas. Assim deixa a maior liberdade possível para que as decisões finais sejam influenciadas por informações subsequentes.

Se o valor de X é determinado por alguma experiência aleatória, em cada repetição da experiência o resultado final é um dos valores X_i . Repetindo a experiência M vezes ($M \rightarrow \infty$), cada tentativa pode dar, independentemente, qualquer um dos resultados $\{X_1, \dots, X_m\}$ e, então, existem a priori, n^m resultados possíveis, sendo que entre eles muitos serão incompatíveis com a informação dada a respeito dos valores médios de $f_k(X)$. Assume-se que o resultado da experiência aleatória concorda com esta informação.

Nas M repetições da experiência, o resultado X_1 será obtido m_1 vezes, etc.. Portanto,

$$\sum_i m_i = M \quad (A.7)$$

e se os valores médios especificados forem de fato verificados, têm-se ainda as relações:

$$\sum_{i=1}^n m_i f_k(X_i) = M F_k, \quad (k = 1, \dots, m) \quad (\text{A.8})$$

Se $m < n - 1$, as restrições (A.7) e (A.8) são in suficientes para determinarem as frequências relativas $f_i = m_i / M$. Contudo, existe uma forte base para preferir algumas escolhas de f_i a outras. Quantos dos n^m resultados originais possíveis levam a um dado conjunto de números aleatórios (m_1, \dots, m_n) ? A resposta é o coeficiente multinomial:

$$W = \frac{M!}{m_1! \dots m_n!} = \frac{M!}{(Mf_1)! \dots (Mf_n)!} \quad (\text{A.9})$$

e, então, o conjunto de frequências $\{f_1, \dots, f_n\}$ que pode ser obtido o maior número de vezes é aquele que maximiza (A.9), sujeita a (A.7) e (A.8). Pode-se, da mesma forma, maximizar qualquer função crescente e monótona de W , em particular $M^{-1} \log w$, mas como $M \rightarrow +\infty$ tem-se imediatamente, pela aproximação de Stirling:

$$M^{-1} \log W \rightarrow - \sum_{i=1}^n f_i \log f_i = H_f \quad (\text{A.10})$$

É agora evidente que, em (A.7) - (A.10) está formulado exatamente o mesmo problema matemático que em (A.1) - (A.3) e que esta identidade persistirá mesmo se as restrições não tomarem a forma de valores médios. Dada qualquer informação a priori que seja testável, a distribuição de probabilidades que maximiza a entropia é numericamente idêntica à distribuição de frequência que pode ser obtida na maioria das vezes.

Seja, agora, $\{f_i\}$ o conjunto de frequências que maximiza W e tem entropia H , e $\{f'_i\}$ outro conjunto de frequências sujeito às restrições (A.7) e (A.8) e que tem entropia H'_f . A relação $\{(\text{número de vezes que } \{f_i\} \text{ pode ser obtido}) / (\text{número de vezes que } \{f'_i\} \text{ pode ser obtido})\}$ cresce assintoticamente, como:

$$\frac{W}{W'} \sim e^{M(H_f - H'_f)}$$

e ultrapassa todas as fronteiras quando $M \rightarrow +\infty$.

Assim, a distribuição prevista pelo princípio da entropia máxima pode ser obtida experimentalmente em número de vezes muito superior ao de qualquer outro processo.

Esta propriedade não justifica, porém, a previsão de que a distribuição de entropia máxima será de fato observada em uma experiência real, pois pessoas diferentes podem ter quantidades diferentes de informação, sendo levadas à diferentes distribuições de entropia máxima. Pode ser mostrado, no entanto, que para o caso de informação adicional redundante, a distribuição não é alterada. No caso de informações contraditórias, a relação (A.6) não tem solução e, portanto, não haverá distribuição de entropia máxima. Se as informações extras não são nem redundantes e nem contraditórias, a entropia será menor para quem possuir maior número de informações.

Quando a informação incorporada na análise de entropia máxima inclui todas as restrições operativas na experiên

ência aleatória, a distribuição prevista pelo princípio da entropia máxima é surpreendentemente superior à observada experimentalmente.

BIBLIOGRAFIA

01. AGGARWAL, S.R.; PATKAR, V.N. - "Geometric Programming: A Survey"
- Revue Belge de Recherche Opérationnelle - Set.1977 .
02. ARRUDA, M.M.B. - "O Processo de Planejamento dos Transportes Urbanos: Análise de Casos Brasileiros" - Tese de M.Sc. da COPPE/UFRJ - 1979.
03. BEIGHTLER, C.; PHILLIPS, D.T. - "Applied Geometric Programming" - John Wiley & Sons - 1976.
04. BECK, P.A.; ECKER, J.G. - "A Modified Concave Simplex Algorithm for Geometric Programming" - Journal of Optimization Theory and Applications - Vol. 15, nº 2, 1975 .
05. BEN-AKIVA, M.E. - "Alternative Travel Behavior Structures : Structure of Passenger Travel Demand Models"-Transportation Research Record - nº 526, 1974 .
06. BERECHMAN, J. - "A General Framework for the Integration of a Land - Use Model with a Transportation Model Component"- J.Regional Science, Vol.20, nº 1, 1980.
07. BIGELOW, J.H.; SHAPIRO, N.Z. - "Implicit Function Theorems for Mathematical Programming and Systems of Inequalities" - Mathematical Programming - Vol.6, 1974 .
08. BILAS, R.A. - "Teoria Microeconômica: Uma Análise Gráfica"- Ed. Forense - 1970.
09. BOAVENTURA NETTO, P.O. - "Teoria e Modelos de Grafos" - Ed. Edgard Blücher Ltda. - 1979.

10. BONZINI, M.S.; et al - "A Transportation Sensitive Model of a Regional Economy" - Transportation - Vol.8,1974.
11. BRIGGS, D.A.; JONES, P.M. - "Problems in Transportation Planning for the Conurbations: The Role of Accessibility" - Institute of British Geographers, Annual Conf. - 1973.
12. BRUTON, M.J. - "Introduction Transportation Planning" - Hutchinson Tec. Ed. - 1970.
13. BUREAU OF PUBLIC ROADS - "Calibrating and Testing a Gravity Model for Any Sized Urban Area" - U. S. Department of Commerce Washington, D.C. - 1965.
14. CATANESE, A.J. - "New perspectives in Urban Transportation Research" - Lexington Books, Massachusetts, 1972.
15. C E M T - "La Demande de Transports de Voyageurs en Milieu Urbain: Méthodologie de l'Analyse et de la Prévision" - Paris, 1975.
16. CESARIO, F.J. - "A Note on the Entropy Model of Trip Distribution" - Transportation Research - Vol. 7, 1973.
17. CHARNES, A; HAYNES, K.E.; PHILLIPS, F.; WHITE, G.M. - "Dual Extended Geometric Programming Problems and the Gravity Model" - Journal of Regional Science - Vol. 17, n° 1, 1977.
18. CHOUKROUN, J.M. - "A General Framework for the Development of Gravity Type Trip Distribution Models" - Regional Science and Urban Economics, Vol. 5, 1975.

19. COHEN, M.H. - "The Relative Distribution of Households and Place of Work" - Proceedings of the Symposium on the Theory of Traffic Flow, Third Annual Meeting - 1959 .
20. COLIGNY, M. de; ACHAIBOU, A.K.; MORA-CAMINO, F. - "Optimal Design of Photovoltaic Power Plant by Geometric Programming" - TIMS/ORSA, New Orleans, U.S.A., 1979.
21. DANTZIG, G.B. - "Linear Programming and Extensions" - Princeton, N.J. , 1963 .
22. DAVIDSON, K.B. - "Accessibility in Transport Land - Use Modelling and Assessment" - Environment and Planning, A. , Vol. 9, 1977.
23. DEBIESSE, J.L.; MATIGNON, G. - "Comparison of Different Methods for the Calculation of Traffic Matrices" - ANN. Télécommunic, Vol. 35, n° 3-4, 1980.
24. DINKEL, J.J.; ELLIOT, W.H.; KOCHENBERGER, G.A. - "Computational Aspects of Cutting Plane Algorithms for Geometric Programming Problems" - Mathematical Programming, Vol. 13, 1977.
25. DINKEL, J.J.; KOCHENBERGER, G.A. - "Constrained Entropy Models: solvability and sensitivity" - Management Science, Vol. 25, n° 6, 1979 .
26. DINKEL, J.J.; KOCHENBERGER, G.A.; WONG, S.N. - "Entropy Maximization and Geometric Programming" - Environment and Planning, Vol. 9, n° 4, 1977.

27. DOMENCICH , T.A.; McFADDEN, D. - "Urban Travel Demand: A Behavioral Analysis" - North-Holland Publishing Co., 1975.
28. DUBOIS, D. - "Quelques outils méthodologiques pour la conception de réseau de transport" - Thèse de Docteur Ingénieur, ENSAE, CERT, 1977 .
29. DUFFIN, R.J.; PETERSON, E.L.; ZENER, C. - "Geometric Programming, Theory and Applications" - John Wiley, 1967.
30. ERLANDER, S. - "Accessibility, Entropy and the Distribution and Assignment of Traffic" - Transportation Research, Vol. 11, 1977.
31. EVANS, A.W. - "Some Properties of Trip Distribution Methods" - Transportation Research, Vol. 4, 1970.
32. EVANS, S. - "Some Applications of Mathematical Optimization Theory in Transport Planning" - Doctoral Thesis, Research Group in Traffic Studies, University College London, 1973.
33. FAGES, R.; GANGNET, M. - "Sur les modèles probabilistes de prévision des localisations et des déplacements / dans une agglomération" - R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle/Operations Research - Vol. 11, n° 3 , 1977.
34. FIACCO, A.; McCORMICK, G.P. - "SUMT: Sequential Unconstrained Minimization Techniques" - John Wiley, 1977.
35. FLORIAN, M.; NGUYEN, S.; FERLAND, J. - "On the Combined Dis

tribution - Assignment of Traffic" - Transportation Science, n° 9, 1975.

36. FORD, L.R.; FULKERSON, D.R. - "Flows in Networks" - Princeton University Press, 1960.
37. FRANK, M.; WOLFE, P. - "An Algorithm for Quadratic Programming" - Naval Research Log. Quart., n° 3, 1956.
38. FRATAR, T.J. - "Forecasting Distribution of Interzonal Vehicular Trips by Successive Approximations" - Highway Research Board Proceedings, Vol. 33, 1954.
39. FURNESS, K.P. - "Time Function Iteration" - Traffic Engineering & Control, Vol. 7 , n° 7, 1965.
40. GANGNET, M. - "Modèles d'interaction spatiale et tableaux / de contingence" - Thèse de doctorat, Université / Claude Bernard, França, 1978.
41. GEOFFRION, A.M. - "Elements of Large-Scale Mathematical Programming - Part I: Concepts" - Management Science, Vol. 16 .
42. GEOFFRION, A.M. - "Elements of Large-Scale Mathematical Programming - Part II: Synthesis of Algorithms and Bibliography" - Management Science, Vol. 16 .
43. GEOFFRION, A.M. - "Large-Scale Linear and Non-Linear Programming" - Optimization Methods for Large-Scale Systems ... with Applications" - McGraw Hill, 1971 .
44. GEOFFRION, A.M. - "Primal Resource-Directive Approaches for Optimizing Non-Linear Decomposable Systems" - Ope-

rations Research, Vol. 18, nº 3, 1970.

45. GERMANI, E.; et al - "Planejamento de Transportes" - Escola Politécnica, USP, 1973.
46. GOLOB, T.F.; BECKMANN, M.J. - "A Utility Model for Travel Forecasting" - Transportation Science, Vol. 5, nº 1, 1971 .
47. HANSEN, W.G. - "How Accessibility Shapes Land Use" - Journal of the American Institute of Planners, nº 25, 1959.
48. HENDERSON, J.M.; QUANDT, R.E. - "Microeconomic Theory: A Mathematical Approach" - McGraw Hill, 1958.
49. HUTCHINSON, B.G. - "Princípios de Planejamento dos Sistemas de Transporte Urbano" - Guanabara Dois, 1979.
50. INGRAM, D.R. - "The Concept of Accessibility: A Search for an Operational Form" - Regional Studies, nº 5, 1971.
51. JACOBY, S.L.S.; KOWALIK, J.S.; PIZZO, J.T. - "Iterative Methods for Non-Linear Optimization Problems" - Prentice-Hall, 1972.
52. JAYNES, E.T. - "Prior Probabilities" - IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics, Vol. SSC-4, nº 3, 1968.
53. JEFFERSON, T.R.; SCOTT, C.H. - "The Analysis of Entropy Models with Equality and Inequality Constraints" - Transportation Research, Vol. 13-B, 1979.
54. JUMARIE, G. - "Theories Relativiste de l'information, Appli

cations à un Modèle Général d'Evolution de Systèmes"
 - Revue du CETHEDEC, 13^{ième} année, 4^{ième} trimestre,
 NS 76-1, 1976.

55. KOENIG, J.G. - "Indicators of Urban Accessibility: Theory and Application" - Transportation, n° 9, 1980.
56. KRUITHOF, J. - "Telefoonverkeesrekening" - De Ingenieur ('s Gravenhage), Vol. 52, n° 8, 1937.
57. LANE, R.; POWELL, T.J.; SMITH, P.P. - "Analytical Transport Planning" - John Wiley & Sons, 1973.
58. LASDON, L.S. - "Optimization Theory for Large Systems"- The Macmillan Company, 1970.
59. LEITÃO FILHO, J.C.S. - "Um Método Heurístico para Determinação de Uma Rede Viária" - Tese de M.Sc. - COPPE / UFRJ, 1980.
50. LEAKE, G.R.; HUZAYYIN, A.S. - "Accessibility Measures and Their Suitability for Use in Trip Generation Models" - Traffic Engineering and Control, Vol. 20 , n° 12, 1979.
61. LESOURNE, J. - "Cost-Benefit Analysis and Economic Theory"- North Holland, 1975.
62. LUNA, H.P.L. - "Les Techniques de Décomposition-Coordination dans les Modèles Économiques d'Optimization" - Thèse de Docteur d'État (Sciences) - Université Paul Sabatier, Toulouse, 1978.
63. MANHEIM, M.L. - "Fundamentals of Transportation Systems Ana

lysis" - The MIT Press, 1979.

64. MANHEIM, M.L. - "Practical Implications of Some Fundamental Properties of Travel-Demand Models" - Highway Research Record, nº 422, 1973.
65. MANSFIELD, E. - "Microeconomia: Teoria e Aplicações" - Ed. Campus Ltda., 1978.
66. MARSCHEK, J. - "Entropy, Economics, Physics" - WP-221, Western Management Science Institute, University of California, 1974.
67. MARTIN, B.V.; MEMMOTT, F.W.; BONE, A.J. - "Principles and Techniques of Predicting Future Demand for Urban Area Transportation" - MIT Report, 1966.
68. MEDVEDKOV, Y. - "Entropy, an Assessment of Potentialities in Geography" - Economic Geography, nº 46, 1970.
69. MELLO, J.C. - "Planejamento dos Transportes" - Ed. McGraw-Hill do Brasil Ltda, 1975.
70. MITRINOVIC, D.S. - "Analytic Inequalities" - Springer Verlag, 1970.
71. MORA-CAMINO, F.A.C. - "Introduction à la Programmation Géométrique" - COPPE/UFRJ PDD/07/1978.
72. MORA-CAMINO, F.A.C.; ZMETEK, L. - "Planification Décentralisée pour les Systèmes de Transport: Une Approche Mixte" - Symposium IFAC/IFORS, Toulouse, França, 1979.

73. MORA-CAMINO, F.A.C. - "Information Processing, Hierarchical Structures and Management Production Functions" - a aparecer em Journal of Economic Theory.
74. MORA-CAMINO, F.A.C.; ZMETEK, L. - "O Problema de Análise de Distribuição de Transporte e o Modelo Gravitacio - nal" - XI Simpósio da SOBRAPO, 1978.
75. MORRIS, J.M.; DUMBLE, P.L.; WIGAN, M.R. - "Accessibility In - dicators for Transport Planning" - Transportation Research, Vol. 13-A, 1979.
76. MURCHLAND, J.D. - "Some Remarks on the Gravity Model of Traffic Distribution and an Equivalent Maximisation Formu - lation" - LSE - TNT - 38 , Transport Network Theory Unit, London Business School.
77. MURPHY, R.E. - "Adaptive Processes on Economic Systems" - Academic Press, London, 1965.
78. NIEDERCORN, J.H.; BECHDOLT, B.V. - "An Economic Derivation of the Gravity Law of Spatial Interaction" - Jour - nal of Regional Science, Vol. 9, nº 2, 1969 .
79. NIJKAMP, P. - "Gravity and Entropy Models: The State of the Art" - Paper presented at the "Colloquium Vervo - ersplanologisch Spuurwerk" - The Hague, 1978.
80. NIJKAMP, P.; PAELINCK, J.H.P. - "A Dual Interpretation and Generalization of Entropy-Maximization Models in Regional Science" - Papers of The Regional Science Association, Vol. 33, 1974.

81. O C D E - "Modèles de Circulation Urbaine: Possibilités de Simplification" - Recherche Routière, Paris, 1974.
82. ORSKI, C.K. - "The Urban Transportation Planning Process : In Search of Improved Strategy" - Highway Research Record, n° 309, 1970.
83. POTTS, R.B.; OLIVER, M.R. - "Flows in Transportation Networks" - Academic Press, New York, 1972.
84. POULIT, J. - "Urbanisme et Transport: Les Critères d'Accessibilité et de Développement Urbain", Paris, Ministère des Transports/SETRA(Division Urbaine), 1974.
85. PUTMAN, S.H. - "The Interrelationships of Transportation Development and Land Development" - Transportation Planning Technology, Vol.3, 1976.
86. REIF, B. - "Models in Urban and Regional Planning" - Leonard Hill Books, 1973.
87. ROBERTS, P.O. - "Models Systems for Urban Transportation Planning: Where do we go from here? " - Highway Research Record, n° 309, 1970.
88. ROBILLARD, P.; STEWART, N.F. - "Iterative Numerical Methods for Trip Distribution Problems" - Transportation Research, Vol. 8, 1974.
89. SHANNON, C.; WEAVER, W. - "The Mathematical Theory of Communication" - University of Illinois Press, Urbana, III, 1949.
90. STEENBRINK, P.A. - "Optimization of Transport Networks" - John Wiley, 1974.

91. STOER, J.; WITZGALL, C. - "Convexity and Optimization in Finite Dimensions" -Springer Verlag, New York, 1970.
92. TALVITIE, A. - "Comparison of Probabilistic Modal-Choice Models: Estimation Methods and System Inputs"- Highway Research Record, n° 392, 1972.
93. THEIL, H. - "Substitution Effects in Geometric Programming" - Management Science, Vol. 19, n° 1, 1972.
94. TOMLIN, J.A. - "A Mathematical Programming Model for The Combined Distribution-Assignment of Traffic" -Transportation Science, n° 5, 1971.
95. WALSH, J.A.; WEBBER, M.J. - "Information Theory: Some Concepts and Measures" - Environment and Planning, Vol. 9 , n° 4, 1977.
96. WILLIAMS, H.C.W.L. - "Travel Demand Models, Duality Relations and User Benefit Analysis" - Journal of Regional Science, Vol. 16, n° 2, 1976.
97. WILSON, A.G. - "Advances and Problems in Distribution Modeling" - Transportation Research, Vol. 4, 1970.
98. WILSON, A.G.; SENIOR, M.L. - "Some Relationships Between Entropy Maximizing Models, Mathematical Programming Models and Their Duals" - Journal of Regional Science, Vol. 14, n° 2, 1974.
99. WILSON, A.G. - "Urban and Regional Models in Geography and Planning" - John Wiley & Sons, 1974.
100. WOHL, M.; MARTIN, B.V. - "Traffic System Analysis for Engi

neers and Planners, McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.

101. WREN, A. - "Computers in Transport Planning and Operation"
- IAN ALLAN Ltd., London, 1971.
102. ZANGWILL, W.I. - "Non-Linear Programming - A Unified Approach"
- Prentice-Hall, 1969.
103. ZMETEK, L.; MORA-CAMINO, F.A.C. - "Considerações Teóricas
Sobre a Solução do Problema de Distribuição de Viagens"
- XIII Simpósio da SOBRAPO, 1980.