

ESTABILIDADE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES:

UMA ABORDAGEM ESTRUTURAL

3

Eugenius Kaszkurewicz

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.)

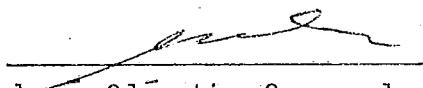
Aprovada por:



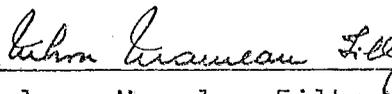
Liu Hsu



Celso Pascoli Bottura



Jose Cláudio Geromel



Nelson Maculan Filho



Plinio B. L. Castrucci

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

Fevereiro de 1981

RESUMO

A partir de um determinado conceito de estrutura, neste trabalho, explora-se as propriedades estruturais de uma classe de sistemas dinâmicos não-lineares com o intuito de estabelecer critérios algébricos de estabilidade absoluta. Mostra-se que, uma vez que sejam identificadas características estruturais favoráveis, a estabilidade pode ser determinada, com base na estrutura, de uma maneira relativamente simples quando comparada a outros métodos.

Dado que na maioria dos casos, os sistemas não apresentam estruturas favoráveis sob uma forma explícita, foram desenvolvidos métodos sistemáticos chamados "algoritmos de realização" para investigar a possibilidade de obter-se representações matemáticas equivalentes destes sistemas e que apresentem estrutura favorável. Nos casos em que isto é possível, a estabilidade absoluta do sistema fica assegurada de uma forma indireta. Como consequência deste procedimento foram desenvolvidos critérios algébricos de estabilidade absoluta que, a par de sua utilidade no problema da análise, mostraram ser de utilidade em problemas de síntese de reguladores não-lineares.

Como exemplos de aplicação do método proposto, foram tratados dois tipos de problemas: o problema de estabilidade transitória de sistemas de energia elétrica de grande porte constituídos de n máquinas síncronas com controle potência-frequência descentralizado e o problema de síntese de redes pas

sivas a partir da utilização dos "algoritmos de realização", mostrando, nos dois casos, as vantagens da abordagem estrutural proposta.

As ferramentas básicas utilizadas no desenvolvimento deste trabalho foram: o método direto de Lyapunov, resultados de estabilidade absoluta, estabilidade qualitativa, teoria de grafos e teoria de matrizes.

ABSTRACT

Given a special concept of structure, this thesis investigates structural properties of a class of nonlinear dynamical systems with the aim of determining algebraic criteria for absolute stability. It is shown that, whenever favorable structural properties are identified, stability can be determined in a rather simple manner when compared to other methods.

Since in most cases systems do not present favorable structures in an explicit form, systematic methods were developed to investigate the possibility of giving equivalent mathematical representation for these systems, presenting favorable structure. These methods are the so called realization algorithms and for those cases in which a favorable realization can be obtained, absolute stability can be readily assured. As a consequence of this procedure, algebraic criteria for absolute stability were developed that, besides of their utility in analysis problems, showed great adequacy in problems of nonlinear regulator synthesis.

The proposed method was applied to two different problems: the problem of transient stability of large scale power systems with decentralized power-frequency control, and the problem of passive network synthesis, showing in both cases, the advantages of the proposed approach.

The main tools utilized in this thesis were; the Lyapunov's direct method, absolute and qualitative stability results, matrix, and graph theories.

ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO II - ESTRUTURA E ESTABILIDADE ABSOLUTA</u>	7
II.1 - Definições e Resultados da Teoria de Lyapunov....	7
II.2 - Classe de Sistemas Estudada.....	14
II.3 - Teoremas de Estabilidade Absoluta.....	21
II.3.1 - Estrutura Favorável.....	27
<u>CAPÍTULO III - ESTRUTURAS FAVORÁVEIS</u>	31
III.1 - Definições Básicas.....	35
III.2 - Matrizes de Estrutura Acíclica-3.....	40
III.3 - Matrizes D-Anti-Simétricas.....	53
III.4 - Matrizes Sign Stable.....	68
<u>CAPÍTULO IV - RESULTADOS EM TERMOS ESTRUTURAIS</u>	99
IV.1 - Resultados Estruturais Relativos aos Sistemas do Tipo (II.2).....	100
IV.2 - Sistemas Tipo Lur'e-Postnikov.....	104
IV.3 - Comparação de Resultados Baseados na Abordagem Estrutural com Resultados do Método de Sistemas Interconectados: Exemplos.....	134

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO V - REALIZAÇÕES DE ESTRUTURAS FAVORÁVEIS.....</u>	154
V.1 - O Sistema $\dot{x} = A x$	156
V.2 - Sistemas Tipo Lur'e-Postnikov.....	160
V.2.1 - Condições Necessárias para que o Sistema Tipo Lur'e Seja Absolutamente Estável A_∞	163
V.2.2 - Condições de Realizabilidade do Sistema Tipo Lur'e sob Estrutura Favorável.....	166
V.2.3 - Algoritmos de Realização de Estruturas Jacobi	173
V.3 - Condições Suficientes para Estabilidade Absoluta A_∞ : Critérios Algébricos.....	182
V.4 - Estruturas Sign Stable e Passividade.....	193
 <u>CAPÍTULO VI - APLICAÇÕES.....</u>	 201
VI.1 - Sistemas de Energia Elétrica: com Controle (P-f) Descentralizado.....	202
VI.1.1 - Descrição do Sistema e Modelo Matemático....	204
VI.1.2 - O Sistema sem os Reguladores.....	211
VI.1.3 - O Sistema com os Reguladores.....	213
VI.2 - Síntese de Redes Passivas.....	221
VI.2.1 - Equações da Rede Ladder.....	223
VI.2.2 - Síntese de Funções de Transferência.....	224
VI.2.3 - Síntese de Imittâncias de Porta.....	244
 <u>CONCLUSÕES.....</u>	 256

	<u>Pág.</u>
<u>APÊNDICES</u>	265
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	285
<u>ÍNDICE DE LOCALIZAÇÃO DE DEFINIÇÕES, TEOREMAS,.....</u>	301

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Pode-se afirmar que este trabalho teve origem e foi motivado por: "algo que intrigava...".

Estudava-se o comportamento dinâmico de sistemas não-lineares de dimensão elevada. Dado a complexidade, dimensão e características não-lineares dos sistemas tratados, tal estudo era feito utilizando-se simulações em computador digital ^[30], ^[54]. A seguida simulação de uma classe de sistemas nos quais eram alterados os valores numéricos dos parâmetros, as características das não-linearidades e as condições iniciais, mostrava que embora as soluções destes sistemas apresentassem características distintas, algo permanecia inalterado: a estabilidade. Mesmo variações consideráveis, tanto em parâmetros, não-linearidades e condições iniciais, não alteravam a característica estável destes sistemas.

Aparentemente havia algo que determinava esta insensibilidade ou robustez. Verificou-se posteriormente que em todas estas simulações a característica que ficava inalterada era o que posteriormente passou a ser chamado de "estrutura qualitativa do sistema", daí ter surgido a questão que intrigava: "Poderia a estrutura, por si só, determinar a estabilidade do equilíbrio de um sistema não-linear?".

Verificou-se no decorrer da pesquisa que de certa maneira este problema tinha estreita relação com problemas formulados em Economia Matemática por Paul Samuelson. Tais problemas estavam relacionados ao estudo da estabilidade qualitativa de sistemas econômicos [95], [88], [34] da seguinte maneira: Nos sistemas econômicos a dificuldade da formulação de modelos em termos quantitativos obriga, na maioria das vezes, ao estudo de seu comportamento dinâmico em termos puramente qualitativos. Mais especificamente, embora sejam desconhecidos os valores numéricos dos ganhos de determinados laços de realimentação, sabe-se no entanto que estes laços existem e que determinados são positivos e outros são negativos. De posse apenas deste tipo de informações qualitativas deseja-se saber se o sistema apresentará características estáveis ou não.

Nestes termos, no estudo de estabilidade de sistemas econômicos torna-se importante o conceito de estabilidade qualitativa e no presente trabalho é mostrada a íntima ligação entre o conceito de "modelo qualitativo" e o conceito de "estrutura qualitativa" do sistema.

Alguns resultados de estabilidade qualitativa de sistemas lineares obtidos por Quirk e Ruppert [88] embora incompletos, [44], [55], juntamente com a teoria de Lyapunov e resultados de estabilidade absoluta de S. K. Persidskii [81] possibilitaram a derivação dos resultados estruturais, para o caso de sistemas não-lineares, contidos no presente trabalho. Mostrando, desta forma, que para certas classes de sistemas não-lineares a

conjectura relativa à estrutura é verificada.

Foi mostrado que realmente, para certas classes de sistemas não-lineares, a estabilidade do equilíbrio pode ser determinada apenas em função da "estrutura" do sistema. Esta estrutura sendo basicamente determinada pelo "grafo associado" ao sistema não-linear.

No capítulo II é introduzido o conceito de estrutura utilizado para a classe de sistemas não-lineares estudada, bem como é mostrada sua relação com a estabilidade absoluta do sistema. São dados resultados de estabilidade absoluta devidos a S. K. Persidskii [81] assim como suas extensões. A partir destes resultados caracteriza-se o que se entende por "estrutura favorável" do ponto de vista de estabilidade.

No capítulo III determina-se as propriedades de classes de estruturas (matrizes) que as caracterizam como sendo "favoráveis", isto é feito para o caso de matrizes chamadas "acíclicas-3" "D-anti-simétricas" e "sign-stable".

Os resultados, para sistemas não-lineares, em termos puramente estruturais são apresentados no capítulo IV. Neste mesmo capítulo chama-se a atenção para o fato de como a utilização de propriedades estruturais em sistemas de grande porte pode conduzir a resultados menos conservativos do que aqueles obtidos por métodos de "sistemas interconectados" [6], [96], que geralmente utilizam funções de Lyapunov vetoriais. Exemplos clássicos

da literatura pertinente, [72], [82], foram utilizados para mostrar vantagens na utilização da abordagem estrutural proposta.

Todavia, como na maioria dos casos os sistemas não necessariamente apresentam o que se chamou de uma "estrutura favorável" (do ponto de vista de estabilidade), os resultados estruturais somente poderiam ser aplicados a uma classe restrita de sistemas. Mostra-se, no entanto, que por meio de uma redefinição das variáveis de estado pode-se tentar obter uma representação matemática equivalente do sistema tratado e que possua características estruturais "favoráveis". Esta nova representação pode ser obtida indiretamente por meio de "algoritmos de realização" de estruturas favoráveis como é demonstrado no capítulo V.

Como consequência direta dos algoritmos de realização são estabelecidos novos critérios algébricos, relativamente simples, para a verificação da estabilidade absoluta de sistemas do tipo Lur'e. Outra consequência importante destes resultados estruturais e algoritmos de realização é a derivação de métodos sistemáticos de síntese de reguladores para sistemas de controle não-lineares o que lhes dá uma sensível vantagem sobre os métodos frequenciais [91], [40], [113].

No capítulo VI são dados resultados de aplicações da abordagem estrutural desenvolvida neste trabalho, a dois tipos de problemas:

(a) trata-se o problema da estabilidade transitória de sistemas de energia elétrica de grande porte com controle P.f. descentralizado. Mostra-se como, utilizando a abordagem estrutural, são obtidas condições de estabilidade absoluta para o sistema multi-máquinas. Estas condições são estabelecidas em termos dos ganhos de realimentação de cada máquina de uma maneira não interativa. Mostra-se, outrossim, que a estabilização local de cada máquina, utilizando o método de síntese proposto, garante a estabilização do sistema global.

(b) a segunda aplicação relaciona-se diretamente aos algoritmos de realização de estruturas favoráveis ("sign stable" no caso). Mostra-se como é possível, a partir dos algoritmos de realização, obter métodos alternativos de síntese de redes passivas, isto a partir do fato de ter sido identificada a existência de uma forte relação entre estruturas sign-stable e redes passivas como é mostrado nas seções V.4 e VI.2.

Deseja-se ressaltar que uma série de trabalhos utilizando propriedades estruturais de sistemas dinâmicos têm sido publicados nos últimos anos, tanto no caso de sistemas lineares [66], [99], [33], abordando o problema da controlabilidade estrutural, bem como no caso de sistemas não-lineares [19], [74], [60], [100] visando a estabilidade, mostrando desta forma a crescente importância que a visão estrutural tem tido na solução de problemas relacionados a sistemas dinâmicos de grande porte.

A partir de uma concepção nova de estrutura, cremos ter contribuído neste trabalho, tanto na solução bem como na indicação de possíveis caminhos para a solução de problemas relacionados com a estabilidade de uma classe de sistemas dinâmicos não-lineares.

Cabe ressaltar que em termos de apresentação, quando as provas de alguns resultados eram tediosas elas foram colocadas nos Apêndices para não desestimular o leitor menos entusiasmado.

CAPÍTULO II

ESTRUTURA E ESTABILIDADE ABSOLUTA

Neste capítulo são apresentados os conceitos e resultados básicos utilizados na abordagem estrutural proposta neste trabalho. Estabelece-se o conceito de estrutura para a classe de sistemas não-lineares estudada e mostra-se como este conceito foi relacionado a resultados de estabilidade absoluta. A partir desta relação define-se o conceito de "estruturas favoráveis" do ponto de vista de estabilidade.

Como ferramenta básica de todo este trabalho utiliza-se o método direto de Lyapunov. Todavia o resultado no qual nos baseamos na maior parte do trabalho é devido a S. K. Persidskii [81]. Este resultado, neste capítulo, foi estendido a uma classe mais ampla de sistemas não-lineares do que aquela originalmente tratada por Persidskii.

II.1 - DEFINIÇÕES E RESULTADOS DA TEORIA DE LYAPUNOV

Com o intuito que este trabalho pudesse ficar mais próximo do que se considera um trabalho auto-contido, esta seção foi reservada a uma breve apresentação das definições e resultados básicos da Teoria de Lyapunov para sistemas dinâmicos autônomos.

As definições e teoremas aqui apresentados podem ser encontrados em uma vasta literatura sobre o assunto, ative-mo-nos todavia às referências |³⁵|, |³⁶|, |⁵³| e |⁶⁴| das quais os resultados abaixo foram extraídos.

Considerando o sistema dinâmico autônomo dado pela equação diferencial vetorial abaixo:

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{F}(\underline{x}(t)); \underline{x}(0) = \underline{x}_0; t \geq 0 \quad (\text{II.1})$$

onde $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ e $\underline{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Denotando $\underline{x}(t, \underline{x}_0)$ a solução do sistema (II.1) para uma dada condição inicial \underline{x}_0 , ou seja, a função vetorial que satisfaz

$$\frac{d(\underline{x}(t, \underline{x}_0))}{dt} = \underline{F}(\underline{x}(t, \underline{x}_0)); \quad \forall t \geq 0,$$

assumimos o seguinte:

Em uma vizinhança R_h de $\underline{x} = 0$ dada por $R_h = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n: ||\underline{x}|| < h; h > 0\}$ temos que:

(a) (II.1) admite a solução trivial (equilíbrio) $\underline{x}(t, 0) = 0$, ou equivalentemente, $\underline{F}(0) = 0 \quad \forall t \geq 0$;

(b) a cada condição inicial \underline{x}_0 existe uma única solução $\underline{x}(t, \underline{x}_0)$ para (II.1) $\forall t \geq 0$.

Sabendo que a condição suficiente para que (b) seja satisfeita é dada pela condição de Lipschitz ^[35] ou seja, a desigualdade

$$||\underline{F}(\underline{x}_1) - \underline{F}(\underline{x}_2)|| < k ||\underline{x}_1 - \underline{x}_2||$$

é satisfeita para todos \underline{x}_1 e \underline{x}_2 em R_h , onde $k > 0$ é uma constante independente de \underline{x} . Assume-se portanto que a função $\underline{F}(\cdot)$ satisfaz esta condição em R_h .

Considerando o sistema (II.1), sujeito às condições acima, temos as seguintes definições de estabilidade do equilíbrio ^[35], ^[36], ^[53]:

Definição II.1: Para o sistema (II.1) $\underline{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio estável se para todo número real $\epsilon > 0$ dado, existe um número real $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$||\underline{x}(0)|| < \delta \rightarrow ||\underline{x}(t, \underline{x}_0)|| < \epsilon; \forall t \geq 0.$$

Definição II.2: Para o sistema (II.1) $\underline{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável se:

(i) $\underline{x} = 0$ é estável;

(ii) existe um número real $\delta_1 > 0$ tal que, para $||\underline{x}_0|| < \delta_1 \rightarrow$
 $\lim_{t \rightarrow \infty} ||\underline{x}(t, \underline{x}_0)|| = 0.$

Definição II.3: Dizemos que $\underline{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável de (II.1) se:

(i) $\underline{x} = 0$ é estável;

(ii) para $\forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ temos que: $\lim_{t \rightarrow \infty} ||\underline{x}(t, \underline{x}_0)|| = 0.$

Definição II.4: Dizemos que $\underline{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável de (II.1) se existem duas constantes positivas M e m independentes da condição inicial \underline{x}_0 e se $\forall t \geq 0$ e $\underline{x}_0 \in \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : ||\underline{x}|| < \rho, \rho > 0 \text{ constante}\}$ verifica-se a seguinte desigualdade:

$$||\underline{x}(t, \underline{x}_0)|| \leq M \cdot ||\underline{x}_0|| e^{-mt}$$

Basicamente os Teoremas de estabilidade de Lyapunov utilizam o conceito de funções definidas, positivas e negativas, das variáveis de estado em uma determinada vizinhança da origem, ou mais precisamente:

Definição II.5: Uma função $V(\cdot)$ contínua, onde $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, é dita ser definida positiva (definida negativa) em uma vizinhança de

$\underline{x} = 0$ (dada por $R_h = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n: \|\underline{x}\| < h, h > 0 \text{ constante}\}$) se satisfaz às seguintes condições:

(i) $V(0) = 0$

(ii) $V(\underline{x}) > 0, \underline{x} \neq 0$ ($V(\underline{x}) < 0, \underline{x} \neq 0$)

Caso a condição (ii) para $\underline{x} \neq 0$ seja substituída por $V(\underline{x}) \geq 0$ ($V(\underline{x}) \leq 0$), $V(\underline{x})$ é dita ser uma função semidefinida positiva (semidefinida negativa).

Obs: Em geral, ao invés de explicitar que $V(\underline{x})$ é uma função positiva definida, permite-se escrever simplesmente $V(\underline{x}) > 0$ ficando subentendido que trata-se da definição II.5.

Os resultados de estabilidade de Lyapunov relativos ao equilíbrio do sistema (II.1) podem ser sintetizados pelos seguintes Teoremas:

Teorema II.1: Para que $\underline{x} = 0$ seja um ponto de equilíbrio estável do sistema (II.1) é suficiente que exista uma função real escalar $V(\cdot)$; $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(i) $V(\underline{x}) > 0$ (definida positiva)

(ii) $V(\underline{x})$ tem derivadas parciais (de 1.^a ordem) em relação a \underline{x} contínuas

(iii) $\dot{V}(\underline{x}) = (\text{grad } V(\underline{x}))' \cdot \underline{F}(\underline{x}) \leq 0$ (semidefinida negativa)

Teorema II.2: Para que $\underline{x} = 0$ seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema (II.1) é suficiente que exista uma função real escalar $V(\cdot)$; $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(i) $V(\underline{x}) > 0$ (definida positiva)

(ii) $V(\underline{x})$ tem derivadas parciais (de 1.^a ordem) em relação a \underline{x} contínuas

(iii) $\dot{V}(\underline{x}) = (\text{grad } V(\underline{x}))' \cdot \underline{F}(\underline{x}) < 0$ (definida negativa)

Teorema II.3: Para que $\underline{x} = 0$ seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema (II.1) é suficiente que exista uma função real escalar $V(\cdot)$; $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$:

(i) $V(\underline{x}) > 0$ (definida positiva)

(ii) $V(\underline{x})$ tem derivadas parciais (de 1.^a ordem) em relação a \underline{x} contínuas

(iii) $\dot{V}(\underline{x}) = (\text{grad } V(\underline{x}))' \cdot \underline{F}(\underline{x}) < 0$

(iv) $\lim_{\|\underline{x}\| \rightarrow \infty} V(\underline{x}) = \infty$

Considerando o Teorema II.1 que somente assegura a estabilidade (não assintótica) do equilíbrio trivial do sistema (II.1) é bastante importante considerar uma extensão deste resultado feita por LaSalle [64], frequentemente utilizada neste trabalho e cujo resultado é dado pelo seguinte:

Teorema II.4: (LaSalle): Seja $V(\cdot)$ uma função real escalar, $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com derivadas parciais contínuas, tal que $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$:

(i) $V(\underline{x}) > 0$ (definida positiva)

(ii) $\dot{V}(\underline{x}) = (\text{grad } V(\underline{x}))' \cdot \underline{F}(\underline{x}) \leq 0$ (semidefinida negativa)

(iii) $\lim_{\|\underline{x}\| \rightarrow \infty} V(\underline{x}) = \infty$

Se $\dot{V}(\underline{x})$ não é identicamente nula ao longo de uma solução de (II.1) que não a origem, então o sistema (II.1) é globalmente assintoticamente estável.

Obs. 1: Cabe lembrar a existência da versão "local" do Teorema II.4 (vide [35]).

Obs. 2: As funções $V(\cdot)$ relativas aos Teoremas II.1 a II.4 são chamadas funções de Lyapunov.

II.2 - CLASSE DE SISTEMAS ESTUDADA

São considerados neste trabalho os sistemas dinâmicos autônomos do tipo (II.1) que podem ser representados por um sistema de equações diferenciais ordinárias da forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot f_{ij}(x_j); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II.2})$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j$.

$$f_{ij}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \text{ contínuas} \quad (\text{II.3a})$$

$$f_{ij}(\sigma) \cdot \sigma > 0; \sigma \neq 0; f_{ij}(0) = 0. \quad (\text{II.3b})$$

Assume-se também que as condições de existência e unicidade de soluções (condições de Lipschitz) são verificadas no domínio $H(\underline{x}, t)$:

$$H(\underline{x}, t) = \{(\underline{x}, t): \|\underline{x}\| < \infty, t \geq 0\}$$

Ressalte-se que apesar do caráter particular das equações (II.2), uma classe considerável de sistemas não-lineares pode ser colocada sob esta forma, basicamente a partir de uma redefinição adequada das variáveis de estado, como será mostrado ao longo deste trabalho.

Definição II.6a: No caso das não-linearidades $f_{ij}(\cdot)$ do sistema (II.2) satisfazerem as condições (II.3a) e (II.3b) diremos que elas pertencem à classe A_∞ , ou seja, $A_\infty = \{f_{ij}(\cdot): i, j = 1, 2, \dots, n; (II.3a) \text{ e } (II.3b) \text{ são satisfeitas}\}$.

A partir da definição II.6a utilizaremos a seguinte:

Definição II.6b: O equilíbrio $\underline{x} = 0$ do sistema (II.2) é "absolutamente estável A_∞ " ou simplesmente "absolutamente estável", se for globalmente assintoticamente estável para todas as funções $f_{ij}(\cdot)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, tais que $f_{ij}(\cdot) \in A_\infty$.

Obs: Com abuso de linguagem, por vezes nos permitimos dizer que o "sistema é absolutamente estável".

O nosso problema básico, ao longo deste trabalho, será o problema da estabilidade absoluta do equilíbrio de sistemas do tipo (II.2). A este sistema vamos associar o conceito de estrutura, como é visto mais adiante, com a finalidade de explorar resultados baseados em propriedades estruturais de (II.2).

Podemos dizer que a idéia de representar sistemas complexos de uma maneira simplificada e em particular dando-lhes uma representação por meio de grafos está intimamente ligada ao conceito de estrutura do sistema [90], [39]. Uma série de trabalhos que se utilizam, de uma ou de outra maneira, desta idéia

têm sido publicados nos últimos anos tratando diferentes problemas relacionados a sistemas dinâmicos. Dentre estes trabalhos podemos citar [66], [99] e [33] que tratam de observabilidade e controlabilidade; [19], [74], [100], abordam o problema da estabilidade e [60] que trata da solução de sistemas de equações diferenciais via decomposição.

Dependendo da maneira como é definida a estrutura do sistema e dependendo do problema em questão (estabilidade, controlabilidade, etc.) pode-se fazer uso de um modo mais, ou menos, vantajoso das propriedades estruturais deste sistema.

Neste trabalho um conceito especial de estrutura será adotado. Para a classe de sistemas (II.2) a estrutura será caracterizada por uma matriz ou digrafo associado a estes sistemas. Para introduzirmos este conceito de estrutura, vamos primeiramente estabelecer as seguintes definições:

Definição II.7a: Diremos que G_S é chamado digrafo (grafo orientado) associado ao sistema (II.2) se e somente se $G_S = G_S(V, E_S)$ onde:

$V = \{x_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ é o conjunto de vértices, ou seja, a cada variável de estado do sistema (II.2) está associado um vértice de G_S .

$E_S = \{(x_j, x_i) | a_{ij} \neq 0; i, j = 1, 2, \dots, n\}$ é o conjunto de arcos, ou seja, cada par (x_j, x_i) tal que $a_{ij} \neq 0$ define um arco

orientado do vértice x_j para o vértice x_i de G_S .

Definição II.7b: O digrafo funcional associado ao sistema (II.2) (G_{Sf}) é o digrafo obtido a partir de G_S no qual o arco (x_j, x_i) é valorado pela função $a_{ij} \cdot f_{ij}(x_j)$.

Exemplificando, abaixo é dado um sistema do tipo (II.2) juntamente com o digrafo funcional a ele associado.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11} \cdot f_{11}(x_1) + a_{12} \cdot f_{12}(x_2) \\ \dot{x}_2 &= a_{21} \cdot f_{21}(x_1) + a_{22} \cdot f_{22}(x_2) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

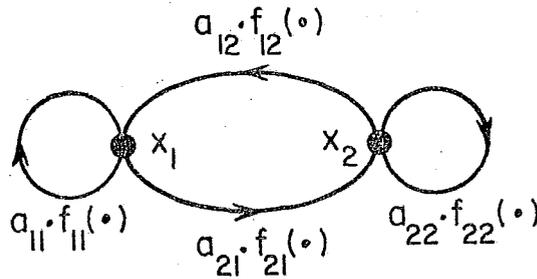


Figura II.1 - Digrafo funcional associado ao sistema (II.4).

A partir de G_S podemos ainda estabelecer as seguintes definições:

Definição II.7c: O digrafo valorado associado ao sistema (II.2) (G_{SV}) é o digrafo obtido a partir de G_S atribuindo-se o valor $a_{ij} \neq 0$ ao arco (x_j, x_i) .

Definição II.7d: O digrafo sinal ("signed digraph") associado ao sistema (II.2) (G_{SS}) é o digrafo obtido a partir de G_S atribuindo-se o sinal de a_{ij} ($a_{ij} \neq 0$) ao arco (x_j, x_i) .

Desde que podemos associar grafos a matrizes e vice-versa [106], [16], [37], [38], a partir das definições acima vamos introduzir a seguinte:

Definição II.8: Dizemos que a "estrutura do sistema (II.2)" satisfazendo (II.3) é determinada pelo digrafo G_{SV} ou equivalentemente dizemos que a estrutura do sistema (II.2) é determinada pela matriz $A = (a_{ij})$ (matriz de adjacência associada ao digrafo G_{SV} , cf. Definição III.5).

Intuitivamente a estrutura do sistema, como definido acima, nos fornece a maneira com que os estados (x_i) do sistema são interconectados entre si via funções não-lineares. Por outro lado, a partir da definição de estrutura acima decorre uma série de definições relativas à estrutura que não serão aqui exaustivamente explicitadas no entanto, por vezes serão utilizadas no decorrer deste trabalho. Tais conceitos estão intimamente ligados às definições utilizadas em teoria de grafos: assim por exemplo dizemos que: o "sistema (II.2) é fortemente conexo" se e somente se G_S é um digrafo fortemente conexo ou equivalente

mente se a matriz $A = (a_{ij})$ for não decomponível ^[106], ^[37], ^[16] e que "o sistema (II.2) tem estrutura acíclica se e somente se G_s for um digrafo acíclico" (vide seção III.1).

Frequentemente ao longo deste trabalho referir-se-á indistintamente a propriedades do digrafo G_s como sendo propriedades da matriz $A = (a_{ij})$ bem como sendo propriedades estruturais do sistema (II.2).

Dado que as Definições II.7b a II.7d decorrem da definição II.7a, por vezes utilizaremos definições de estruturas ligadas a elas: nos referiremos à "estrutura qualitativa" do sistema (II.2) se esta for determinada pelo digrafo G_{ss} e à "estrutura quantitativa" quando esta for determinada pelo digrafo G_{sv} . Todavia nestes casos isto será explicitado no texto.

Embora na derivação da maioria dos resultados deste trabalho não se utilize diretamente a teoria de grafos, os conceitos básicos são constantemente utilizados e em alguns casos, provas extremamente trabalhosas (v.g. Capítulo III) podem ser significativamente simplificadas lançando-se mão destes conceitos.

Não é difícil estabelecer uma relação entre o conceito de estrutura, como definido acima, com aquele utilizado por Kevorkian ^[60]. Este utiliza o conceito de estrutura baseado no grafo associado à "matriz de ocorrência" do sistema, isto para uma classe mais ampla de sistemas não-lineares que aquela da-

da por (II.2). No trabalho de Kevorkian, todavia, a preocupação estrutural está ligada à partição do grafo associado ao sistema não-linear via matriz de ocorrência, com a finalidade de uma solução do sistema a partir dos sub-sistemas irredutíveis (correspondentes a sub-grafos fortemente conexos). Não há a preocupação nem como os valores numéricos nem com os sinais associados ao grafo do sistema não-linear.

Com a definição de estrutura que aqui utilizamos, o particionamento do sistema (II.2) pode também ser facilmente efetuado a partir da matriz que define a estrutura ou a partir do grafo a ela associado. Por outro lado, com a definição aqui utilizada é possível fazer uso de propriedades mais "valiosas" do ponto de vista do estudo da estabilidade do que aquelas relacionadas apenas ao particionamento do sistema em sub-sistemas irredutíveis.

É verdade que o sistema (II.2) tratado neste trabalho tem características particulares, cremos no entanto que a idéia de estrutura aqui utilizada poderá ser estendida a classes mais amplas de sistemas não-lineares, embora como já foi ressaltado e será visto mais adiante, os sistemas do tipo (II.2) podem representar (por uma redefinição de variáveis de estado) uma classe bastante ampla de sistemas não-lineares.

II.3 - TEOREMAS DE ESTABILIDADE ABSOLUTA

Mostra-se a seguir de que maneira foi utilizado um resultado de estabilidade absoluta de S. K. Persidskii [81] e suas extensões para a determinação da estabilidade do equilíbrio em termos estruturais. Utilizando-se resultados de teoria de matrizes (e grafos) do Capítulo III, estabilidade qualitativa [88], [68], [69], e resultados deste capítulo, foi possível derivar os resultados estruturais contidos nos capítulos subsequentes.

Considerando uma sub-classe dos sistemas (II.2) dada pelas equações:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot \phi_j(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II.5})$$

onde $r_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ e $\phi_j(\cdot); j = 1, 2, \dots, n$ satisfazem as mesmas condições das funções do sistema (II.2) e assumindo ainda que

$$\lim_{|x_j| \rightarrow \infty} \int_0^{x_j} \phi_j(\tau) d\tau = \infty, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II.6})$$

temos o seguinte:

Teorema II.5 ^[81]: Para que exista no domínio $H(\underline{x}, t)$ uma função $V(\underline{x})$ definida positiva da forma:

$$V(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n a_j \int_0^{x_j} \phi_j(\tau) d\tau; \quad a_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II.7})$$

tal que: $\lim_{\|\underline{x}\| \rightarrow \infty} V(\underline{x}) = \infty$ e que tenha $\dot{V}(\underline{x})$, devido a (II.4), ne-

gativa definida em $H(\underline{x}, t)$ é necessário e suficiente que exista uma forma quadrática definida positiva $U(\underline{x}) = \underline{x}' P \underline{x}$, com P diagonal, cuja derivada temporal $\dot{U}(\underline{x})$ é uma função definida negativa $\dot{U}(\underline{x}) = - \underline{x}' Q \underline{x}$ para o sistema

$$\dot{\underline{x}} = R \underline{x}; \quad R = (r_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II.8})$$

Prova:

Suficiência: Assumindo que existe uma forma quadrática definida positiva $U(\underline{x}) = \underline{x}' P \underline{x}$, $P = \text{diag}[P_1, P_2, \dots, P_n] > 0$ com $\dot{U}(\underline{x}) = - \underline{x}' Q \underline{x}$ definida negativa para o sistema (II.8). Ou equivalentemente que

$$PR + R'P = - Q < 0 \quad (\text{II.9})$$

é satisfeita com $P > 0$ diagonal.

Chamando $D = \text{diag}(a_i)$ e $\underline{\phi}'(\underline{x}) = (\phi_1(x_1), \phi_2(x_2), \dots, \phi_n(x_n))$; a derivada $\dot{V}(\underline{x})$ devido ao sistema (II.5) a partir de $V(\underline{x})$ da forma (II.7) é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\underline{x}) &= \underline{\phi}'(\underline{x}) DR \underline{\phi}(\underline{x}) \\ &= \frac{1}{2} \underline{\phi}'(\underline{x}) [DR + R'D] \underline{\phi}(\underline{x})\end{aligned}\quad (\text{II.10})$$

Fazendo $a_i = 2P_i$; $i = 1, 2, \dots, n$, temos que:

$\dot{V}(\underline{x}) = \underline{\phi}'(\underline{x}) [PR + R'P] \underline{\phi}(\underline{x})$ devido a (II.9) é uma função definida negativa. Portanto existe $V(\underline{x}) > 0$ da forma (II.7) com $\dot{V}(\underline{x})$ definida negativa em $H(\underline{x}, t)$.

Necessidade: Se existe $V(\underline{x}) > 0$ da forma (II.7) com $\dot{V}(\underline{x})$, devido ao sistema (II.5), dada por (II.10) e negativa definida, isto implica que $DR + R'D = -\tilde{Q} < 0$ e portanto existe $D = \text{diag}(a_i)$, $a_i > 0$ $i = 1, 2, \dots, n$ que determina uma forma quadrática $U_1(\underline{x}) = \underline{x}'D\underline{x}$ definida positiva para o sistema (II.8) cuja derivada temporal $\dot{U}_1(\underline{x}) = -\underline{x}'\tilde{Q}\underline{x}$ é definida negativa.

O Teorema II.5 acima pode ser enunciado de uma maneira equivalente (mais concisa) como se segue:

Teorema II.5 (bis): Para que exista uma função definida positiva em $H(\underline{x}, t)$, para o sistema (II.5), da forma $V(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n a_j \int_0^{\underline{x}_j} \phi_j(\tau) d\tau$ com derivada $\dot{V}(\underline{x})$ negativa definitiva em $H(\underline{x}, t)$ é necessário e suficiente que exista uma solução para a equação de Lyapunov $PR + R'P = -Q < 0$ com $P > 0$ diagonal

Corolário II.1: O equilíbrio trivial do sistema (II.5) é absolutamente estável A_∞ se a equação de Lyapunov $PR + R'P = -Q$ é satisfeita para $P > 0$, $Q > 0$, com P diagonal

Utilizando-se funções do tipo (II.7) o Teorema II.5 pode ser estendido a sub-classes dos sistemas (II.2) mais amplas que (II.5) dadas por equações do tipo:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \phi_j(x_j) + d_i f_i(x_i); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II.11})$$

ou em notação matricial

$$\dot{\underline{x}} = A\phi(\underline{x}) + D\underline{f}(\underline{x}) \quad (\text{II.12})$$

onde $A = (a_{ij})$; $D = \text{diag}(d_i) \leq 0$

$$\phi'(\underline{x}) = (\phi_1(x_1), \phi_2(x_2), \dots, \phi_n(x_n))$$

$$\underline{f}'(\underline{x}) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))$$

Para sistemas do tipo (II.12) seguem-se os Teoremas abaixo:

Teorema II.6: Seja $\underline{\phi}(\cdot)$ satisfazendo as condições do Teorema II.5; $f_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, n$ satisfazendo (II.3) com $\underline{\phi}(x_i) x_i \geq 0$, então (II.11) terá o equilíbrio trivial absolutamente estável A_∞ se, analogamente ao Teorema II.5, a equação $PA + A'P = -Q$ for satisfeita para $P > 0$, $Q > 0$ com P diagonal.

Prova: Utilizando a função (II.7) com $a_j = 2P_j$, $j=1,2,\dots,n$ teremos:

$$\dot{V}(\underline{x}) = 2\underline{\phi}'(\underline{x}) P [A\underline{\phi}(\underline{x}) + D \underline{f}(\underline{x})]$$

$= \underline{\phi}'(\underline{x}) [PA + A'P] \underline{\phi}(\underline{x}) + 2\underline{\phi}'(\underline{x}) PD \underline{f}(\underline{x}) < 0$ (função definida negativa).

Corolário II.2: O sistema (caso particular de (II.12))

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + D \underline{f}(\underline{x}) \quad (II.13)$$

com $\underline{f}(\cdot)$ satisfazendo as condições do Teorema II.6 ($D \leq 0$) é absolutamente estável se a equação $PA + A'P = -Q$ é satisfeita para $P > 0$, $Q > 0$, P diagonal.

Prova: Utilizando $V(\underline{x}) = \underline{x}' P \underline{x}$

Teorema II.7: Seja $\phi(\cdot)$ satisfazendo as condições do Teorema II.5; $f(\cdot) \in A_\infty$. Sendo $A_0 = A - \text{diag}(a_{ii})$ então temos que $\underline{x} = 0$ do sistema

$$\dot{\underline{x}} = A_0 \phi(\underline{x}) + D f(\underline{x}) \quad (\text{II.14})$$

será absolutamente estável A_∞ se a matriz $C = [A_0 + D]$ é tal que a equação $PC + C'P = -Q$ se verifica para P e Q matrizes diagonais definidas positivas.

Prova: Utilizando a função (II.7) com $a_j = 2P_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ temos:

$$\dot{V}(\underline{x}) = \phi'(\underline{x}) [PA_0 + A_0'P] \phi(\underline{x}) + 2\phi'(\underline{x}) PD f(\underline{x}) \quad (\text{II.15})$$

como para que tenhamos $PA_0 + A_0'P + 2PD = -Q < 0$ com $P > 0$, $Q > 0$, P , Q diagonais, então $PA_0 + A_0'P = M$ é diagonal com elementos $m_j = 2a_{jj}P_j$, portanto $M = 0$ e $D < 0$, donde segue-se que (II.15) é uma função definida negativa.

Obs: A divergência da função de Lyapunov em todos os casos acima é assegurada pela condição (II.6).

Um aspecto importante do Teorema (II.5) e suas extensões reside no fato de que a existência de funções de Lyapunov "diagonais" para os sistemas de comparação lineares $|^{81}|$ assegura a estabilidade assintótica global para os sistemas não-lineares da classe (II.5) e (II.12).

Portanto as propriedades das matrizes R (Teorema II.5); A e D (Teorema II.6); A_0 e D (Teorema II.7) associadas à estrutura do sistema não-linear (II.2) segundo a Definição II.8 poderão ser utilizadas na solução de problemas de estabilidade como é mostrado a seguir.

II.3.1 - Estrutura Favorável

Considerando os resultados da seção anterior definiremos o que se entende por "estrutura favorável" para sistemas do tipo (II.2) que satisfazem (II.3).

Definição II.9 : Dizemos que um sistema do tipo (II.2) satisfazendo (II.3) possui "estrutura favorável"; se a matriz $A = (a_{ij})$ satisfaz a equação $PA + A'P = -Q$ para $P > 0$, $Q > 0$ com P diagonal. (Em certos casos a condição $Q > 0$ pode ser relaxada para $Q \geq 0$).

A partir da definição acima podemos enunciar o Corolário II.1 da seguinte maneira:

Corolário II.1 (bis): "Todo o sistema do tipo (II.5) que possui uma estrutura favorável é absolutamente estável A_∞ ".

A partir dos resultados deste capítulo, considerando a Definição II.9 é natural que sejam investigadas propriedades das "estruturas favoráveis", ou em outras palavras, matrizes ou grafos que possuam propriedades favoráveis do ponto de vista

de estabilidade. Isto será tratado no próximo capítulo.

Obs. 1: Sobre o Teorema II.5 queremos enfatizar a interpretação das condições para a existência de uma função de Lyapunov do tipo (II.7) com derivada temporal definida negativa. Estas condições são necessárias e suficientes para a existência de uma função de Lyapunov do tipo II.7. Vemos pelo exemplo simples abaixo (sistema do tipo (II.5)) que, embora o sistema de comparação linear não possua função de Lyapunov "diagonal", o sistema apresenta estabilidade absoluta A_∞ . Claramente este fato decorre do caráter de suficiência dos resultados de Lyapunov.

Exemplo II.1: Seja o sistema dinâmico dado pelas equações

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2 [f(x_2) + x_2] \quad (II.16)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 2 [f(x_2) + x_2]; f(.) \in A_\infty$$

embora o sistema seja do tipo (II.5) o sistema de comparação linear:

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2 x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 2 x_2$$

não possui função de Lyapunov "diagonal" i.e., não tem estrutura favorável pois pelo Lema III.2 uma condição necessária para que uma matriz $M = (m_{ij})$ seja tal que a equação $DM + M'D = -Q < 0$ seja satisfeita com D diagonal é que tenhamos $m_{ii} < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Portanto pelo Teorema II.5 a função de Lyapunov do tipo (II.7) não existe.

No entanto $\underline{x} = 0$ do sistema acima é absolutamente estável, como é mostrado abaixo:

Escrevendo o sistema (II.16) sob a forma de Lur'e [65]:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} +2 \\ -2 \end{bmatrix} f(y)$$

$$y = [0 \ , \ 1] \underline{x}$$

calculando a função de transferência da parte linear do sistema:

$G(s) = c(sI - A)^{-1} b$, temos:

$$G(s) = -4 \cdot \frac{s + 1}{s^2 + s + 2}$$

Ora, o sistema do tipo Lur'e com a $G(s)$ acima pode ser representado sob a seguinte forma:

$$\dot{\underline{x}} = \bar{A} \underline{\bar{x}} + \bar{b} f(y)$$

$$y = \bar{c} \underline{\bar{x}}$$

$$\text{ondé } \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}; \bar{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}; \bar{c}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou seja, o sistema (II.16) pode ser escrito na forma

$$\dot{\bar{x}}_1 = -4f(\bar{x}_1) + \bar{x}_2 \quad (II.17)$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = -2\bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

e nesta forma possui estrutura favorável, e portanto podemos aplicar o Teorema II.7 mostrando que é absolutamente estável A_∞ com $V(\bar{x}) = \bar{x}_1^2 + \frac{1}{2}\bar{x}_2^2$, pois

$$\dot{V}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = -8f(\bar{x}_1)\bar{x}_1 - \bar{x}_2^2 < 0$$

Logo o sistema (II.16) é absolutamente estável A_∞ .

Além da observação relativa ao Teorema II.5 o exemplo acima enfatiza a importância da "representação matemática" de um determinado sistema para a obtenção de resultados sobre estabilidade. Por conseguinte, ter ou não uma "estrutura favorável" não é uma propriedade "livre de coordenadas", estes fatos são extensivamente explorados no capítulo V.

Obs. 2: Cabe ainda ressaltar que a maioria dos resultados deste capítulo pode ser estendida para os casos em que as derivadas $\dot{V}(\bar{x})$ são funções semi-definidas negativas. Tal extensão, que basicamente recai no relaxamento da condição $Q > 0$ para $Q \geq 0$ na equação $PA + A'P = -Q$, pode ser feita utilizando-se o Teorema de LaSalle (Teorema II.4) tal como é feito em exemplos dos capítulos subsequentes. No entanto, via de regra, o tratamento de tais casos não foi nossa preocupação principal.

CAPÍTULO III

ESTRUTURAS FAVORÁVEIS

A partir dos resultados e dos conceitos de estrutura, introduzidos no capítulo anterior, torna-se natural a investigação de propriedades das chamadas "estruturas favoráveis" dada a importância que têm na determinação da estabilidade absoluta de sistemas não-lineares do tipo (II.2).

A caracterização destas estruturas favoráveis possibilita a determinação da estabilidade com base em critérios algébricos relativamente simples e em certos casos a verificação da estabilidade absoluta estará baseada na simples inspeção da estrutura do sistema, eliminando desta forma, análises e cálculos trabalhosos que fatalmente teriam de ser feitos caso certos resultados estruturais fossem desconhecidos. Exemplos dados nos capítulos subsequentes atestam este fato.

Segundo o conceito de estrutura favorável dado no capítulo anterior utilizaremos a seguinte:

Definição III.1: Dizemos que \mathcal{D} é a classe de matrizes reais $(n \times n)$ que caracteriza as estruturas favoráveis onde $\mathcal{D} = \{A = (a_{ij})_{n \times n} : \exists P > 0 \text{ e } Q > 0 \text{ que satisfazem } A'P + PA = -Q \text{ com } P \text{ diagonal}\}$.

Evidentemente pelo Teorema de Lyapunov (Teorema III.2) \mathcal{D} é um conjunto de matrizes estáveis.

Embora recentemente condições necessárias e suficientes para que uma matriz A pertença à classe \mathcal{D} tenham sido determinadas [9], ou seja, caracterizando completamente a classe \mathcal{D} , estas condições não têm uma forma tal que possam ser facilmente verificadas; os resultados a seguir caracterizam novas sub-classes de \mathcal{D} com critérios algébricos relativamente simples.

Várias sub-classes da classe \mathcal{D} já são conhecidas, por exemplo, a sub-classe das matrizes diagonais negativas é um exemplo trivial. Outros tipos importantes de matrizes pertencem à classe \mathcal{D} : matrizes quase-dominantes [76], M-matrizes com sinal invertido [6], matrizes D-antisimétricas (definidas abaixo) e matrizes "sign-stable" [88], [44], estas últimas do tipo das matrizes chamadas "qualitativas".

Verifica-se que a par da importância que tem no contexto deste trabalho, a classe \mathcal{D} é igualmente importante na determinação dos critérios de estabilidade de sistemas de grande porte baseados em propriedades "entrada-saída" de subsistemas dissipativos e passivos propostos por Moylan e Hill [76]. Igualmente importante é a classe \mathcal{D} no estudo da estabilidade dinâmica de sistemas econômicos de vez que, pertencer à classe \mathcal{D} é uma condição suficiente para D-estabilidade [88], [46 - 48].

Neste capítulo são tratadas sub-classes da classe \mathcal{D} que mostraram ser de importância na derivação de resultados estruturais para sistemas não-lineares. São tratadas mais detidamente as matrizes de "estrutura acíclica-3" (definidas a seguir) bem como a sub-classe de \mathcal{D} que chamaremos de \mathcal{D}_2 onde:

Definição III.2: $\mathcal{D}_2 = \{A = (a_{ij})_{n \times n} : \exists P > 0 \text{ e } Q > 0 \text{ que satisfazem } PA + A'P = -Q \text{ com } P \text{ e } Q \text{ diagonais}\}.$

Esta classe tem sua importância relacionada às condições do Teorema II.7. As matrizes "sign stable" que pertencem a esta classe bem como a classe das matrizes de estrutura acíclica-3 são tratadas com ênfase especial, de vez que a partir delas são derivados resultados de estabilidade absoluta em termos estruturais puramente qualitativos (Teorema IV.1a e Corolários IV.1 e IV.4).

O estudo das propriedades destas classes de matrizes que caracterizam as chamadas estruturas favoráveis visa basicamente os seguintes pontos:

- (a) Determinar as propriedades que possam identificar a classe, estas propriedades podem estar relacionadas tanto às características da matriz tais como: simetria em zeros, indecomponibilidade, sinais dos menores principais, etc., assim como podem estar relacionadas às propriedades do digrafo a ela associado, ou seja; conexidade, existência de ciclos, comprimento dos ciclos, etc. Destas propriedades que chamaremos gene-

ricamente de propriedades estruturais, procurar-se-á determinar o conjunto mínimo, mais simples de ser verificado e que caracteriza a matriz como pertencendo à classe \mathcal{D} . O estabelecimento destas propriedades visa dar condições de uma rápida identificação de estruturas favoráveis no caso dos sistemas não-lineares do tipo (II.2) e a consequente utilização dos resultados do capítulo II.

- (b) Determinar, para cada classe de estruturas favoráveis, as matrizes P correspondentes às Definições (III.1) e (III.2), isto pelo fato de que uma vez conhecida a matriz P , a determinação da função de Lyapunov para o sistema não-linear do tipo (II.2) é praticamente imediata. A determinação da função de Lyapunov para o caso não-linear tem a utilidade, entre outras, na determinação de domínios de estabilidade nos casos em que o sistema tem estrutura favorável porém as não-linearidades não estão inteiramente contidas no setor positivo (vide Exemplo IV.2), assim como é importante na determinação de condições de setor finito para o caso de sistemas de estrutura favorável (vide Exemplo IV.6).„

Alguns resultados deste capítulo são conhecidos na literatura pertinente, outros são novos e há ainda aqueles demonstrados de uma maneira nova, em geral mais simples que aquela até aqui conhecida.

III.1 - DEFINIÇÕES BÁSICAS

Antes de tratarmos cada uma das classes de matrizes a que nos propusemos, cremos ser oportuno, para efeitos de clareza, estabelecer algumas definições mais gerais que, embora conhecidas, por vezes não são uniformemente utilizadas na literatura.

Definição III.3: Dizemos que a uma matriz $A = (a_{ij})$ real $n \times n$ está associado ao digrafo G_A , se $G_A = G_A(V, E)$ é um digrafo tal que:

$V = \{v_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ é o conjunto de vértices e

$E = \{(v_j, v_i) | a_{ij} \neq 0; i, j = 1, 2, \dots, n\}$ é o conjunto de arcos. Ou seja, a cada elemento $a_{ij} \neq 0$ de A corresponde um arco orientado do vértice v_j para o vértice v_i .

Definição III.4: Dizemos que a uma matriz $A = (a_{ij})$ real $n \times n$ está associado o digrafo valorado G_{AV} se a matriz A estiver associado o digrafo G_A como acima e aos arcos (v_j, v_i) forem atribuídos os valores $a_{ij} \neq 0$. Neste caso podemos, de maneira equivalente, associar a um digrafo valorado uma matriz $A = (a_{ij})$, ou seja, a cada arco (v_j, v_i) valorado de q_{ij} associamos um elemento a_{ij} tal que $q_{ij} = a_{ij}$.

Definição III.5: A matriz $A = (a_{ij})$ $n \times n$ a qual associamos o digrafo G_{AV} como acima, chamaremos de "matriz de adjacência" associada ao digrafo G_{AV} .

Obs: Chamamos a atenção para a Definição acima pois normalmente a matriz de adjacência A associada a um digrafo é uma matriz booleana definida como segue: $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ onde $\tilde{a}_{ij} = 1 \leftrightarrow \exists (x_i, x_j)$ e $\tilde{a}_{ij} = 0 \leftrightarrow \nexists (x_i, x_j)$ |¹⁰⁶|, |³⁹|, |¹⁶|.

Definição III.6a: Diremos que uma matriz real $A = (a_{ij})$ ($n \times n$) pertence à classe das "matrizes qualitativas" se a única informação relativa a cada um de seus elementos a_{ij} diz se ele é positivo, negativo ou nulo. Neste caso o digrafo associado à matriz A (G_A) é chamado qualitativo ("signed digraph") ou ainda dizemos que G_A tem uma "estrutura qualitativa".

Definição III.6b: No caso usual em que $A = (a_{ij})$ tem associado a cada um de seus elementos a_{ij} , um número real, dizemos que A pertence à classe das "matrizes quantitativas". Neste caso, podemos associar a matriz A ao digrafo valorado (G_{AV}).

Obs: Há ainda a possibilidade de ocorrer uma combinação destes dois casos, ou seja, parte da matriz A é dada qualitativamente sendo a outra quantitativa.

Considerando que a partir das definições acima podemos associar uma matriz $n \times n$ a um digrafo de ordem n e vice-versa (via matriz de adjacência), por vezes nos referiremos indistintamente às propriedades do digrafo como sendo propriedades da matriz de adjacência e vice-versa. Cabe lembrar que segundo a Definição II.8 estas serão por sua vez propriedades da estrutura do sistema (II.2).

Definição III.7: A matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é chamada decomponível (ou redutível) se e somente se existe uma matriz de permutação P tal que na matriz $PAP' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, A_{11} e A_{22} são matrizes quadradas e $A_{12} = 0$ (ou $A_{21} = 0$). Caso contrário a matriz A é chamada indecomponível (ou irredutível).

Teorema III.1 [106]: A matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é irredutível se e somente se o digrafo G_A (ou G_{AV}) é fortemente conexo •

Lema III.1 [12]: Uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ não decomponível tem ao menos um elemento não nulo em cada linha e coluna fora da diagonal principal. •

Definição III.8: A matriz $A = (a_{ij})$ é chamada "simétrica em zeros" se e somente se $a_{ij} = 0$ implica em que $a_{ji} = 0$ para todo par $i, j = 1, 2, \dots, n$. Claramente o digrafo G_A associado à matriz A neste caso é um digrafo simétrico.

Definição III.9: Chama-se cadeia de comprimento (ou ordem) r da matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ao produto:

$a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{r-1} i_r} \cdot a_{i_r i_{r+1}}$, com i_1, i_2, \dots, i_r distintos e os a_{ij} não nulos.

Definição III.10: Chama-se ciclo de comprimento (ou ordem) r da matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ao produto:

$a_{i_1 i_2} : a_{i_2 i_3}, \dots, a_{i_{r-1} i_r} \cdot a_{i_r i_1}$, com i_1, i_2, \dots, i_r distintos e os a_{ij} não nulos.

Claramente, às definições III.9 e III.10 podemos dar definições equivalentes relacionadas aos digrafos associados à matriz A e que denotaremos "cadeia de comprimento r " do digrafo G_A (ou G_{AV}) e "ciclo de comprimento (ou ordem) r " do digrafo G_A (ou G_{AV}) [39], [16].

Definição III.11: Dizemos que a matriz $A = (a_{ij})$ é "acíclica - k " se não existirem ciclos de ordem $r \geq k$ na matriz A , ou equivalentemente, se o digrafo associado a A , G_A (ou G_{AV}) não possui ciclos de ordem $r \geq k$ ($1 < r \leq n$). Neste caso os digrafos G_A e G_{AV} serão chamados "digrafos acíclicos - k ".

Neste ponto cabe um comentário relativo à Definição acima, visto que usualmente é definida uma matriz acíclica (digrafo acíclico) quando esta não possui ciclos de ordem $r \geq 2$ [60]; segundo a Definição III.11, este seria o caso da matriz acíclica-2. Note-se que no caso em que temos digrafos simétricos, (matrizes de adjacência simétricas em zeros) podemos associar ao digrafo G_A um grafo não direcionado como abaixo:

Definição III.12: Chamamos de \bar{G}_A ao grafo não direcionado associado à matriz A ($n \times n$) simétrica em zeros, $\bar{G}_A = (V, \bar{E})$ onde:

$V = \{v_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ é o conjunto de vértices (cf. Definição III.3).

$\bar{E} = \{[x_i, x_j] \mid a_{ij} \cdot a_{ji} \neq 0; i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n\}$ é o conjunto de arestas, ou seja, cada par de arcos de sentidos opostos do digrafo G_A é substituído por uma aresta em \bar{G}_A . Neste caso se G_A for acíclico-3 o grafo não direcionado a ele associado será acíclico. Por vezes, quando nos referimos à estrutura do sistema (II.2), em termos do grafo não-direcionado, nos permitimos dizer que ela tem características acíclicas, todavia neste caso isto será explicitado no texto.

Definição III.13 [68]: Uma matriz real $n \times n$ $A = (a_{ij})$ é dita ser Jacobi se $a_{ij} = 0$ para todo par (i, j) tal que $|i - j| > 1$.

É fácil ver que as matrizes de Jacobi (tridiagonais) são acíclicas-3.

Como na maior parte deste capítulo nos referiremos a matrizes estáveis, convém colocarmos ainda a seguinte:

Definição III.14: Uma matriz real $n \times n$, $A = (a_{ij})$ é dita estável se todos os autovalores (λ_i) de A são tais que $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Teorema III.2 (Teorema de Lyapunov [32]): Para o sistema $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ a origem é globalmente assintoticamente estável (ou equivalentemente A é estável) se e somente se existe uma matriz simétrica positiva definida P que satisfaz a equação

$$A'P + PA = -Q \quad (\text{III.1})$$

para toda matriz (dada) simétrica definida positiva Q .

Definição III.15 $|^{10}|$: Uma matriz real $A = (a_{ij})$ $n \times n$ é chamada de D -estável se e somente se DA for estável para toda matriz D diagonal tal que $D > 0$.

Definição III.16 $|^{10}|$: Dizemos que uma matriz real $n \times n$ $A = (a_{ij})$ é "totalmente estável" se toda sub-matriz principal de A é D -estável.

Para uma matriz real $n \times n$ $A = (a_{ij})$ convencionamos chamar $\det_i(A)$ ao i -ésimo menor principal superior de A ; ou seja,

$$\det_i(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}; \det_n(A) = |A|$$

III.2 - MATRIZES DE ESTRUTURA ACÍCLICA-3

Uma classe de matrizes que mostra ser importante para a derivação de resultados estruturais em sistemas não-lineares é a classe das matrizes acíclicas-3 (Definição III.11). Um dos aspectos que torna esta classe importante é o fato de que a ela pertencem as matrizes "sign-stable" definidas mais adiante, a partir das quais é possível a obtenção de resultados estruturais puramente qualitativos (Teorema IV.1 e Corolários IV.1 e

IV.4). A par deste fato, dentro da classe das matrizes acíclicas-3, a classe \mathcal{D} pode ser caracterizada por um critério bastante simples (Teorema III.4) fato que é explorado nos capítulos IV e V para a determinação de critérios algébricos de estabilidade absoluta.

Esta classe de matrizes foi inicialmente tratada por Maybee [68] que as chamou de matrizes "Quasi-Jacobi", a partir de uma definição distinta daquela que é dada no contexto do presente trabalho. Alguns dos resultados relativos a esta classe de matrizes são justamente devidos a Maybee [68].

Trataremos nesta seção basicamente o caso das matrizes indecomponíveis.

Teorema III.3: Uma matriz $A = (a_{ij})$, $n \times n$ indecomponível tem estrutura acíclica-3 se e somente se: (i) é simétrica em zeros e (ii) tem exatamente $n - 1$ elementos não nulos acima (e abaixo) da diagonal principal.

Prova:

Suficiência: a condição (i) implica em que o digrafo G_A é simétrico e portanto podemos determinar o grafo não direcionado \bar{G}_A (cf. Definição III.12). Como A é indecomponível \bar{G}_A é conexo.

Considerando a condição (i) e dado que pela condição (ii) G_A tem $2(n - 1)$ arcos, isto implica em que \bar{G}_A tem $n-1$

arestas. Como \bar{G}_A é conexo, tem n vértices e $n - 1$ arestas isto implica que \bar{G}_A é acíclico-2 e portanto A tem estrutura acíclica-3.

A prova da necessidade é analoga:

Se G_A é acíclico-3 e fortemente conexo então G_A é simétrico e \bar{G}_A é acíclico-2 e portanto tem $n - 1$ arestas, donde A tem $n - 1$ elementos não nulos acima e abaixo da diagonal principal.

O Teorema acima, caracteriza a classe das matrizes de estrutura acíclica em termos que chamaremos de estruturais. A maneira de se verificar a aciclicidade-3 é bastante simples, praticamente por inspeção e a verificação da indecomponibilidade pode ser feita utilizando o Lema III.1. Uma prova deste resultado, sensivelmente mais complexa, baseada nos elementos da matriz $A = (a_{ij})$ foi dada por Quirk & Ruppert [88].

A seguir são dados resultados relativos às matrizes de estrutura acíclica-3 indecomponíveis, sendo que o resultado mais significativo refere-se ao Teorema III.4, a nosso conhecimento, inédito, que tem sua importância relacionada aos critérios de estabilidade absoluta derivados nos capítulos subsequentes.

São tratadas matrizes com diagonal estritamente negativa devido ao seguinte:

Lema III.2: Uma condição necessária para que uma matriz real $n \times n$ $A = (a_{ij})$ seja tal que $A \in \mathcal{D}$, é que tenhamos $a_{ii} < 0$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Prova: Seja a equação de Lyapunov (III.1) satisfeita para $P > 0$, $Q > 0$, com $P = \text{diag}(p_i)$. Claramente os elementos diagonais de Q são dados por $q_{ii} = -2p_i \cdot a_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, n$, como Q é positiva definida então todos os menores principais são positivos, decorre portanto que necessariamente $a_{ii} < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Definição III.17: Uma matriz $A = (a_{ij})$ $n \times n$ é chamada simétrica em módulo se $|a_{ij}| = |a_{ji}|$ para todo $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Lema III.3: Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz indecomponível e acíclica-3 então existe uma transformação de similaridade $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ (D não singular) tal que $DAD^{-1} = \bar{A}$ onde $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ é uma matriz simétrica em módulo tal que: $a_{ij} \cdot a_{ji} = \bar{a}_{ij} \cdot \bar{a}_{ji}$ e $a_{ii} = \bar{a}_{ii}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Prova: Chamando $\bar{N} = \{(p, q): p \neq q \text{ e } a_{p,q} \cdot a_{q,p} \neq 0\}$, claramente no caso da matriz A , pelo Teorema III.3 \bar{N} tem $n-1$ elementos.

Para que tenhamos \bar{A} nas condições desejadas, aos $2(n-1)$ elementos não nulos fora da diagonal principal de \bar{A} estão associadas $n-1$ igualdades do tipo:

$$|\bar{a}_{ij}| = |\bar{a}_{ji}|; (i, j) \in \bar{N} \quad (\text{III.2})$$

ou seja

$$\left| \frac{d_i}{d_j} \cdot a_{ij} \right| - \left| \frac{d_j}{d_i} \cdot a_{ji} \right| = 0; (i, j) \in \bar{N} \quad (\text{III.3})$$

chamando $d_k^2 = Z_k$; $k = 1, 2, \dots, n$

e

$$\left| \frac{a_{ij}}{a_{ji}} \right| = r_{ij}; (i, j) \in \bar{N}$$

podemos escrever (III.3) na forma:

$$r_{ij} = Z_i/Z_j; (i, j) \in \bar{N} \quad (\text{III.4})$$

O sistema de $n - 1$ equações (III.3) com n incôgnitas d_k ($k = 1, 2, \dots, n$), ou equivalentemente, o sistema (III.4) com as incôgnitas Z_k , $k = 1, 2, \dots, n$ é um sistema consistente, com solução "positiva" i.e., $Z_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Podemos mostrar este fato a partir do grafo não direcionado associado ao sistema (III.4) como se segue:

(a) aos valores Z_i , $i = 1, 2, \dots, n$ associamos os n nós do grafo.

(b) aos valores r_{ij} associamos as $n-1$ arestas $[Z_i, Z_j]$ ligando os nós Z_i e Z_j .

Se arbitramos um valor positivo ao n \bar{o} $Z_r \forall r \in \{1, 2, \dots, n\}$, dado que o grafo definido acima \bar{e} conexo e acíclico, pelas relações (III.4), atingiremos sucessivamente, por um \bar{u} nico caminho, todos os outros n \bar{o} s, ou seja, determinaremos todos os valores $Z_i > 0$ obtendo $\underline{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)'$.

A partir de \underline{Z} obtemos o conjunto solu \tilde{c} o S para (III.4) i.e., o conjunto de 2^n matrizes diagonais D_k dado por $S = \{D_k : D_k = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)_k, \text{ onde } k = 1, 2, \dots, 2^n ; d_i = \pm \sqrt{Z_i}, i = 1, 2, \dots, n\}$.

De (III.3), claramente temos que $a_{ij} \cdot a_{ji} = \bar{a}_{ij} \cdot \bar{a}_{ji}; (i, j) \in \bar{N}$ e $a_{ii} = \bar{a}_{ii}, i = 1, 2, \dots, n$.

Portanto existem matrizes $D_r \in S$ tais que $D_r A D_r^{-1} = \bar{A}$ \bar{e} m \bar{o} dulo sim \bar{e} trica. •

Lema III.4 |⁶⁸|: Sendo $A = (a_{ij})$ uma matriz real $n \times n$ indecompon \bar{i} vel e acíclica-3, a rela \tilde{c} o entre os menores principais superiores \bar{e} dada por:

$$\det_p(A) = a_{pp} \cdot \det_{p-1}(A) - \sum_{q=1}^{p-1} a_{pq} a_{qp} \cdot \det_{p-2,q}(A) \quad (\text{III.5})$$

onde

$$\det_p(A) = \det A(1, 2, \dots, p/1, 2, \dots, p)$$

$$\det_{p-2,q}(A) = \det A(1, 2, \dots, q-1, q+1, \dots, p-1/1, 2, \dots, q-1, q+1, \dots, p-1).$$

Obs: Podemos interpretar o Lema acima da seguinte forma: para esta classe de matrizes os menores principais resultam da soma de parcelas que são formadas apenas de produtos de elementos diagonais por produtos $(a_{ij} \cdot a_{ji})$ tais que $(i, j) \in \bar{N}$.

Definição III.18 |⁶⁸|: Sendo $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes $n \times n$ acíclicas-3 indecomponíveis, dizemos que A e B são "principally equal" e denotaremos $A \stackrel{\bar{p}}{=} B$ se

$$(i) \quad a_{ii} = b_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(ii) \quad a_{jk} \cdot a_{kj} = b_{jk} \cdot b_{kj}; \quad k \neq j$$

Lema III.5 |⁶⁸|: Se A e B são duas matrizes $n \times n$ acíclicas-3 e indecomponíveis e $A \stackrel{\bar{p}}{=} B$ então $\text{Spec } A = \text{Spec } B$ e ainda as sub-matrizes principais correspondentes também têm o mesmo espectro

Lema III.6: Se A e B são duas matrizes $n \times n$ acíclicas-3 e indecomponíveis tais que $A \stackrel{\bar{p}}{=} B$ então temos que

$$\det_p(A) = \det_p(B) \text{ para todo } p = 1, 2, \dots, n.$$

Prova: Imediata a partir da relação (III.5)

Lema III.7 |¹⁰|: Se uma matriz $A = (a_{ij})$ $n \times n$ é tal que $A \in \mathcal{D}$ então A é \mathcal{D} -estável.

Prova: Se $A \in \mathcal{D}$ então existe uma matriz $P > 0$ diagonal tal que $PA + A'P = -Q$ com $Q > 0$.

Seja D uma matriz diagonal $D > 0$, da equação acima temos que:

$$PD^{-1}DA + A'D.D^{-1}P = -Q, \text{ ou}$$

$PD^{-1}(DA) + (DA)'PD^{-1} = -Q < 0$ e pelo Teorema (III.2) temos que DA é estável para toda matriz diagonal D tal que $D > 0$; então A é D -estável. •

Lema III.8 [70] Uma condição necessária para que uma matriz A $n \times n$ seja "totalmente estável" é que todo menor principal de A de ordem par seja positivo e todo menor principal de ordem ímpar seja negativo. •

A partir de uma matriz acíclica-3 e indecomponível $A = (a_{ij})$ $n \times n$ podemos definir as seguintes matrizes:

Definição III.19: Chamamos de $A^+ = (a_{ij}^+)$ a matriz $(n \times n)$ tal que:

$$a_{ij}^+ = a_{ij} \text{ se } a_{ij} \cdot a_{ji} > 0; \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$a_{ij}^+ = 0 \text{ se } a_{ij} \cdot a_{ji} \leq 0$$

$$a_{ii}^+ = a_{ii} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

e chamamos de $A^- = (a_{ij}^-)$ a matriz tal que

$$A^- = A - A^+ \quad (\text{III.6})$$

Neste ponto podemos enunciar o seguinte:

Teorema III.4: Dada uma matriz real $n \times n$ $A = (a_{ij})$ indecomponível e acíclica-3, com diagonal estritamente negativa temos que $A \in \mathcal{D}$ se e somente se tivermos:

$$(-1)^i \det_i(A^+) > 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{III.7})$$

e a matriz diagonal correspondente é dada a partir da solução de (III.3).

Prova:

Suficiência: Pelo Lema III.3 existe uma transformação de similitude dada por uma matriz D (diagonal) não singular tal que:

$DAD^{-1} = A_S$ onde A_S é simétrica em módulo e $A_S \bar{p} A$, nestes termos podemos escrever:

$$D(A^+ + A^-)D^{-1} = A_S^+ + A_S^-, \quad \text{onde } A_S^+ \text{ e } A_S^-$$

são simétricas em módulo. Claramente

$$\frac{1}{2} (A_S + A'_S) = \frac{1}{2} [(A_S^+) + (A_S^-) + (A_S^+)' + (A_S^-)'] = A_S^+ \quad (\text{III.8})$$

onde A_S^+ é a parte simétrica de A_S . Como $A_S^+ \stackrel{p}{=} A^+$, embora A_S^+ possa ser decomponível (com diagonal estritamente negativa) ela será simétrica em zeros e acíclica-3 e ainda podemos utilizar o Lema III.6 ou seja:

$$(-1)^i \det_j (A_S^+) = (-1)^i \det_j (A^+) > 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

e portanto A_S^+ é negativa definida.

Donde, a partir de (III.8), podemos dizer que existe uma matriz diagonal positiva definida ($\frac{1}{2} I_n$ no caso) tal que:

$$\frac{1}{2} (IA_S + A'_S I) = A_S^+ < 0 \quad (\text{III.9})$$

e portanto A é estável (Lema III.5) e mais, a relação (III.9) pode ser escrita

$$\frac{1}{2} [DAD^{-1} + (DAD^{-1})'] = A_S^+$$

ou

$$\frac{1}{2} \{D[DAD^{-1}]D + D[DAD^{-1}]'D\} = DA_S^+D$$

$$\frac{1}{2} (D^2A + A'D^2) = DA_S^+D \quad (\text{III.10})$$

Como $DA_S^+D < 0$ então $A \in \mathcal{D}$ e uma matriz diagonal correspondente é dada por D^2 , onde D é obtido a partir do Lema III.3 pela relação (III.3).

Necessidade: Considerando que $A \in \mathcal{D}$, temos que existe uma matriz T ; $T = \text{diag}(t_i) > 0$ tal que

$$TA + A'T = -R < 0$$

Nas condições acima verifica-se que se $A \in \mathcal{D}$ então todas as sub-matrizes principais de A pertencem a \mathcal{D} . Portanto, pelo Lema III.7, todas as sub-matrizes principais de A são D -estáveis, donde decorre que A é "totalmente estável" (Definição III.16).

A partir do Lema III.8 tem-se que todos os menores principais de A de ordem par são positivos assim como os de ordem ímpar negativos.

Dado \bar{N} (cf. Lema III.3) podemos definir os conjuntos

$$\bar{N}_+ = \{(i, j): i \neq j \text{ e } a_{ij} \cdot a_{ji} > 0\} \subset \bar{N}$$

$$\bar{N}_- = \{(i, j): i \neq j \text{ e } a_{ij} \cdot a_{ji} < 0\} \subset \bar{N}$$

Considerando a definição de A^+ , os casos possíveis para A^+ , em termos de \bar{N}_+ e \bar{N}_- , são dados por:

(a) caso em que $\bar{N}_- = \bar{N} \leftrightarrow A^+ = \text{diag}(a_{ii})$

(b) caso em que $\bar{N}_+ = \bar{N} \leftrightarrow A^+ = A$

(c) caso em que $\bar{N}_+ \neq \emptyset$ e $\bar{N}_- \neq \emptyset$.

Desde que foi mostrado que se $A \in \mathcal{D}$ então todos os menores de A de ordem par são positivos e os de ordem ímpar negativos, nos casos (a) e (b) decorre imediatamente que (III.7) se verifica.

Para demonstrarmos que no caso (c) (III.7) também se verifica, vamos nos utilizar do grafo $\bar{G}_A (V, \bar{E})$ associado à matriz A (cf. Definição III.12).

Considerando a definição de A^+ , obter A^+ a partir de A corresponde a suprimir as arestas $[v_i, v_j]$ de \bar{G}_A tais que $a_{ij} \cdot a_{ji} < 0$. Por outro lado, ao suprimirmos uma aresta de \bar{G}_A , pelo fato de A ser acíclica-3 e indecomponível, estamos separando o grafo \bar{G}_A em dois sub-grafos fortemente conexos de \bar{G}_A . Portanto o grafo, não conexo, \bar{G}_{A^+} (associado à matriz A^+) será formado de sub-grafos conexos de \bar{G}_A .

Como a cada sub-grafo de \bar{G}_A corresponde uma sub-matriz principal de A [16], portanto a partir de uma transformação de similaridade PA^+P^{-1} dada por uma matriz de permutação P (que não altera os valores dos menores principais de A^+ [38]), poderemos escrever A^+ (matriz redutível) em forma bloco diago-

nal com k blocos irredutíveis ($k > 1$) A_i^+ ; $i = 1, 2, \dots, k$ onde cada um dos blocos A_i^+ é uma sub-matriz principal de A .

Desde que foi mostrado que todos os menores principais de A , de ordem par são positivos e os de ordem ímpar negativos, isto também é válido para cada uma das sub-matrizes principais A_i^+ de A .

Dado que os menores principais de A^+ são formados a partir de produtos de menores principais das sub-matrizes A_i^+ (ou são os próprios menores de cada sub-matriz A_i^+) tem-se que todos os menores principais de A^+ de ordem ímpar são negativos e os de ordem par positivos, portanto decorre que $(-1)^i d_i(A^+) > 0$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Sobre o resultado acima, podemos destacar os seguintes pontos:

- (a) Sobre as condições para que uma matriz $A = (a_{ij})$ indecomponível acíclica-3 pertença à classe \mathcal{D} , nota-se que são de simples verificação: basta suprimir (zerar) os elementos a_{ij} tais que $a_{ij} \cdot a_{ji} < 0$ determinando assim a matriz A^+ (geralmente decomponível) à qual aplica-se o teste dos determinantes i.e., $(-1)^i \det_i(A^+) > 0$, o que geralmente é facilitado pelo fato de A^+ ser decomponível pois o teste pode ser feito bloco por bloco, separadamente.

(b) Uma vez verificada a condição acima, uma matriz diagonal que satisfaz a equação de Lyapunov (III.1) é dada pela solução do sistema (III.3).

O Teorema III.3 evidentemente aplica-se às matrizes Jacobi com diagonal estritamente negativa, ou seja:

Corolário III.1: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de Jacobi não decomponível, então $A \in \mathcal{D}$ se e somente se $(-1)^i \det_i(A^+) > 0$; $i = 1, 2, \dots, n$ e a matriz $D > 0$ diagonal correspondente, que satisfaz a equação de Lyapunov (III.1) é dada pela solução do sistema de $n - 1$ equações a n incógnitas $(d_i, i = 1, 2, \dots, n)$ dado por

$$d_i |a_{i,i+1}| - d_{i+1} |a_{i+1,i}| = 0 \quad (\text{III.11})$$

(que pode ser resolvido de uma maneira recorrente arbitrando-se por exemplo $d_1 = 1$).

Obs: O Corolário III.1 será importante nos critérios de estabilidade desenvolvidos no capítulo V uma vez que estes se baseiam em realizações sob estrutura Jacobi.

III.3 - MATRIZES D-ANTI-SIMÉTRICAS

As matrizes D-anti-simétricas, definidas abaixo, são importantes por apresentarem estrutura favorável (cf. Definição II.10) e mais, caracterizam a classe \mathcal{D}_2 , de importância relacionada aos Teoremas II.7 e IV.2c e cujas propriedades foram uti

lizadas para determinar os resultados de estabilidade absoluta de sistemas de energia elétrica tratados no capítulo VI.

Definição III.20: Dizemos que uma matriz $A = (a_{ij})$ real $n \times n$ é anti-simétrica se e somente se $A_0 = -A_0'$; onde $A_0 = A - \text{diag}(a_{ii})$.

Obs: Chamamos a atenção para o fato de que esta não é a definição usual de matriz anti-simétrica ^[12].

Definição III.21: Dizemos que uma matriz $A = (a_{ij})$ real $n \times n$ é D-anti-simétrica se e somente se existe uma matriz $D > 0$ diagonal tal que DA é anti-simétrica.

Utilizando as definições acima podemos enunciar o seguinte:

Teorema III.5: As condições necessárias e suficientes para que uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{D}_2$ são:

- (i) A tenha diagonal estritamente negativa
- (ii) A seja D-anti-simétrica.

Prova:

Suficiência: Se existe $D = \text{diag}(d_i) > 0$ tal que $DA = \hat{A}$, \hat{A} anti-simétrica e $a_{ij} < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ então temos que:

$$\tilde{A} + \tilde{A}' = -Q \quad (\text{III.12})$$

onde $Q = 2\text{diag}(-a_{ii} \cdot d_i) > 0$

(III.12) pode ser escrita

$$D(D^{-1}\tilde{A}) + (\tilde{A}'D^{-1})D = DA + A'D = -Q < 0 \text{ e portanto } A \in \mathcal{D}_2$$

Necessidade: Se $A \in \mathcal{D}_2$ então existem matrizes diagonais $P > 0$ e $Q > 0$ tais que a equação de Lyapunov (III.1) é satisfeita i.e.

$$PA + A'P = -Q \quad (\text{III.13})$$

(III.13) pode ser escrita na forma

$$PA + (PA)' = -Q$$

e para que tenhamos $Q = \text{diag}(q_i) > 0$ necessariamente PA é anti-simétrica e portanto existe uma matriz diagonal ($P > 0$) tal que PA é anti-simétrica e como $q_i = -2p_i \cdot a_{ii} > 0$ então necessariamente $a_{ii} < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Ainda relativamente às matrizes D-anti-simétricas são úteis os seguintes resultados:

Lema III.9: Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz indecomponível $n \times n$ então temos que $A \in \mathcal{D}_2$ se e somente se $B A \in \mathcal{D}_2$ (ou equivalentemente $A B \in \mathcal{D}_2$) para toda matriz $B > 0$ diagonal.

Prova:

Suficiência: Se $A \in \mathcal{D}_2$ então existem matrizes $P > 0$ e $Q > 0$ diagonais tais que:

$$PA + A'P = -Q$$

Seja $B > 0$ diagonal então:

$$PB^{-1}BA + A'BB^{-1}P = (PB^{-1})(BA) + (BA)'(PB^{-1}) = -Q$$

como PB^{-1} é diagonal e $(PB^{-1}) > 0$ então $BA \in \mathcal{D}_2$.

Necessidade: Se $BA \in \mathcal{D}_2$ com $B > 0$ diagonal então existem matrizes $S > 0$, $T > 0$ diagonais tais que

$$S(BA) + (BA)'S = -T$$

ou

$$SBA + A'SB = (SB)A + A'(SB) = -T$$

como SB é diagonal e $(SB) > 0$ então $A \in \mathcal{D}_2$

Lema III.10: Se a matriz $A = (a_{ij})$, $n \times n$ é D-anti-simétrica com diagonal estritamente negativa então existe uma transformação de similaridade dada por uma matriz T diagonal (não singular) tal que $T^{-1}AT$ é anti-simétrica e a matriz T é dada a partir da rela

ção $T^2 = D^{-1}$.

Prova: Como A é D -anti-simétrica então $\exists D > 0$ tal que: $(DA) + (DA)' = -Q$ onde $Q > 0$ é diagonal.

Da equação acima podemos escrever:

$$DA + A'D = -Q \quad (\text{III.14})$$

pré e pós-multiplicando (III.4) por T , T diagonal temos:

$$TDAT + TA'DT = TDAT + TA'TD = -TQT$$

$$(TDAT) + (TDAT)' = -TQT$$

Fazendo $TD = T^{-1}$ (ou $D = (T^{-1})^2$) temos que:

$$T^{-1}AT + (T^{-1}AT)' = -TQT \quad (\text{III.15})$$

Como $TQT < 0$ é diagonal, $T^{-1}AT$ é anti-simétrica e portanto existe a matriz de transformação T diagonal não singular dada por $T = (\sqrt{D})^{-1}$.

Considerando uma matriz $A = (a_{ij})$, $n \times n$ com diagonal estritamente negativa temos:

Lema III.11: Se existe uma transformação de similaridade dada por uma matriz diagonal P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz anti-simé

trica (com diagonal negativa).então a matriz $A = (a_{ij})$ é D-anti-simétrica (com diagonal negativa).

Prova: Se existe P diagonal tal que PAP^{-1} é anti-simétrica com diagonal negativa então

$$P^{-1}AP + (P^{-1}AP)' = -Q; Q > 0 \text{ diagonal}$$

ou

$$(P^{-1})^2 A + A'(P^{-1})^2 = [(P^{-1})^2 A] + [(P^{-1})^2 A]' = -P^{-1}QP^{-1}$$

e portanto A é D-anti-simétrica com $D = (P^{-1})^2$

Como consequência dos Lemas III.10 e III.11 decorre o seguinte:

Teorema III.6: Para que $A = (a_{ij})$, uma matriz real $n \times n$ com diagonal negativa, seja D-anti-simétrica é necessário e suficiente que exista uma transformação de similaridade dada por uma matriz T diagonal, não singular, tal que $T^{-1}AT$ seja anti-simétrica com diagonal negativa.

Analisando o Teorema acima depreende-se que:

- (a) Determinar a matriz $D > 0$ tal que DA seja anti-simétrica é equivalente a achar a matriz diagonal T, não singular, tal que $T^{-1}AT$ seja anti-simétrica, ou ainda, determinar a matriz $D > 0$ que caracteriza o fato de que $A \in \mathcal{D}_2$. ($D > 0$ diagonal

que satisfaz a equação de Lyapunov $DA + A'D = -Q$ com $Q > 0$ diagonal).

(b) A relação entre D e T é dada por $D = (T^{-1})^2$.

Em termos estruturais, ou seja, em termos das características relacionadas ao digrafo associado à matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$, indecomponível, as condições necessárias e suficientes para que $A \in \mathcal{D}_2$ são dadas pelo seguinte:

Corolário III.2: Condições necessárias e suficientes para que tenhamos $A = (a_{ij}) \in \mathcal{D}_2$ são:

(i) A tenha todos os ciclos de ordem 1 negativos

(ii) A seja anti-simétrica em sinais ($\text{sgn} a_{ij} = -\text{sgn} a_{ji}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$).

(iii) Todos os ciclos de ordem $k \geq 2$ de A verifiquem a relação:

$$a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{k-1} i_k} \cdot a_{i_k i_1} = (-1)^k a_{i_1 i_k} \cdot a_{i_k i_{k-1}} \cdots a_{i_3 i_2} \cdot a_{i_2 i_1}$$

(i_1, i_2, \dots, i_k distintos).

Prova: Basta mostrar que as condições (i), (ii) e (iii) acima são equivalentes às condições do Teorema III.5. Claramente a condição (i) é equivalente a $a_{ii} < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Vamos mostrar que as condições (ii) e (iii) são equivalentes a A ser

D- anti-simétrica.

Definindo $\hat{N} = \{(i, j) \mid i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n \text{ e } a_{ij} \cdot a_{ji} \neq 0\}$ onde \hat{N} tem no máximo $\frac{n(n-1)}{2}$ e no mínimo $(n-1)$ elementos (caso que corresponde a uma matriz acíclica-3, indecomponível).

Se A é D-anti-simétrica \rightarrow (ii) e (iii):

Se A é D-anti-simétrica, i.e., $DA_0 = -A_0'D$ (cf. Definição III.21) então existem números reais $d_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ ($D = \text{diag}(d_i)$) tais que:

$$d_i a_{ij} = -a_{ji} d_j \quad (\text{III.16})$$

para todo par $(i, j) \in \hat{N}$ ou equivalentemente

$$\left(\frac{d_i}{d_j}\right) a_{ij} = -a_{ji} \quad (\text{III.17})$$

para todo par $(i, j) \in \hat{N}$ e portanto A é anti-simétrica em sinais (condição (ii)).

Tomando-se os ciclos de ordem $k \geq 2$ de DA podemos escrevê-los genericamente na forma:

$$(d_p - a_{pq}) - (d_q - a_{qs}) - (d_s - a_{sm}) \dots (d_r - a_{rp}) \quad (\text{III.18})$$

(p, q, r, s, m distintos)

ou a partir das igualdades (III.16) podemos reescrever (III.18) na forma:

$$(-d_q a_{qp}) \cdot (-d_s a_{sq}) \cdot (-d_m a_{ms}) \dots (-d_p a_{pr}) \quad (\text{III.19})$$

igualando-se (III.18) e (III.19) temos que:

$$a_{pq} \cdot a_{qs} \cdot a_{sm} \dots a_{rp} = (-1)^k a_{qp} \cdot a_{pr} \dots a_{ms} a_{sq} \cdot a_{qp}$$

portanto a condição (iii) se verifica para todo ciclo de ordem $K \geq 2$ de A .

Se (ii) e (iii) $\rightarrow A$ é D -anti-simétrica:

Como a condição suficiente para que A seja D -anti-simétrica é que existam números reais $d_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ tais que:

$$a_{ij} \cdot d_i = -d_j a_{ji}; \quad (i, j) \in \tilde{N} \quad (\text{III.20})$$

vamos mostrar que se (ii) e (iii) se verificam então existe $D = \text{diag}(d_i) > 0$ tal que (III.20) são satisfeitas.

Considerando o caso mais geral em que a matriz A não tem nenhum elemento nulo, vamos estabelecer $n(n-1)/2$ equações do tipo (III.20). Podemos, por conveniência, escrevê-las na forma de um sistema homogêneo

$$\bar{A}d = 0$$

(III.21)

onde:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{21} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{32} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{34} & a_{43} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n-1,n} & a_{n,n-1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{13} & 0 & a_{31} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{24} & 0 & a_{42} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{35} & 0 & a_{53} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & a_{n-2,n} & 0 & a_{n,n-2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ a_{14} & 0 & 0 & a_{41} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{25} & 0 & 0 & a_{52} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{n,1} \end{bmatrix}$$

(III.22)

← (n-1) linhas

← (n-2) linhas

← (n-3) linhas

← 1 linha

$$e \underline{d} = [d_1, d_2, \dots, d_n]'$$

A condição (iii) assegura que o posto da matriz \bar{A} é menor que n . Isto pelo fato de que, quando fazemos as justas

posições de n linhas para testarmos os menores de ordem n de \bar{A} , verifica-se que a condição (iii) assegura que todas estas justaposições de n linhas de \bar{A} produzem matrizes, de ordem n , de determinante nulo.

Observe-se que a cada linha de \bar{A} corresponde um par de ramos (de sentidos opostos) de G_A , na realidade, quando fazemos a justaposição de n linhas, das $n(n-1)/2$ de \bar{A} , para formarmos matrizes de ordem n ; a cada uma destas matrizes corresponde um grafo parcial de G_A com um único ciclo de ordem $K > 2$ de A . Com este procedimento, estaremos, equivalentemente, verificando a condição (iii).

Como nestas condições o posto de \bar{A} é menor que n então existe uma solução não trivial para (III.21).

Para mostrarmos que existe uma solução tal que $\underline{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)'$ com $d_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ usamos o mesmo argumento do Lema III.3, ou seja, do digrafo G_A tomamos um grafo parcial ^[16] fortemente conexo e acíclico-3, o que corresponde a um sistema do tipo (III.21) com $(n-1)$ equações e n incógnitas, como $a_{ij} \cdot a_{ji} < 0$ (condição (ii)) decorre pelos mesmos argumentos da prova do Lema III.3 que existe uma solução \underline{d} com $d_i > 0$ para o sistema de $(n-1)$ equações e conseqüentemente para (III.21), logo A é D-anti-simétrica.

Como consequência do resultado anterior temos o seguinte:

Corolário III.3: Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ indecomponível, acíclica-3, $A \in \mathcal{D}_2$ se e somente se A for anti-simétrica em sinais com diagonal negativa.

Prova: Como A é acíclica-3, a condição (iii) do Corolário III.2 é automaticamente satisfeita e a prova é imediata utilizando-se o referido Corolário.

Obs: O resultado acima fornece condições puramente qualitativas para que uma matriz acíclica-3 pertença à classe \mathcal{D}_2 . Como decorrência, estas são condições suficientes para que a matriz acíclica-3 seja "qualitativamente estável" (vide Definição III.24 e Teorema III.7).

Considerando o Teorema III.6 e a prova do Corolário III.2, dada uma matriz $A = (a_{ij})$, indecomponível com diagonal negativa, para determinarmos a matriz T diagonal tal que $T^{-1}AT$ é anti-simétrica ou equivalentemente a matriz $D = \text{diag}(d_i) > 0$ tal que DA é anti-simétrica, ou ainda, a matriz D que satisfaz a equação de Lyapunov (III.1) e que caracteriza o fato de $A \in \mathcal{D}_2$, podemos proceder da seguinte forma:

Passo 1: Verificamos se $A = (a_{ij})$ é anti-simétrica em sinais i.e. se $\text{sgn } a_{ij} = -\text{sgn } a_{ji}$; $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Passo 2: A partir da matriz A tomamos $n-1$ pares de elementos $a_{ij} \cdot a_{ji} \neq 0$; $i \neq j$ tal que estes $n-1$ pares determinem uma matriz acíclica-3 indecomponível (correspondendo a um digrafo

parcial indecomponível e acíclico-3 de G_A).

Passo 3: A partir dos $n-1$ pares determinados acima estabelecemos o sistema de $(n-1)$ equações a n incógnitas $(d_i, i = 1, 2, \dots, n)$ do tipo (III.16), ou seja:

$$d_i a_{ij} + d_j a_{ji} = 0$$

Passo 4: Resolvendo o sistema acima (pelo Corolário III.3 esta solução existe) com $d_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ passamos ao

Passo 5: Verificamos se a partir da matriz $D = \text{diag}(d_i)$ assim obtida DA é anti-simétrica. Se for, então A é D -anti-simétrica, caso contrário A não será D -anti-simétrica.

Ainda sobre o Corolário III.2 podemos dizer que, evidentemente para o caso de dimensão elevada, a verificação da condição (iii) é extremamente trabalhosa, todavia em casos de dimensão reduzida isto não ocorre, tal verificação é relativamente simples como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo III.1: Seja

$$A = \begin{bmatrix} -1 & +2 & +1 & -2 \\ -6 & -3 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & -2 & +5 \\ +4 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

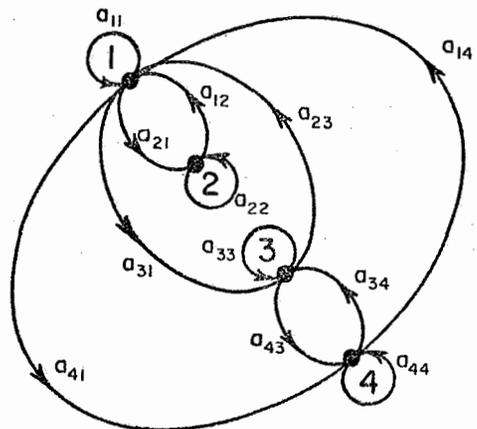


Fig. (III.1)

Analisando-se a matriz indecomponível A temos:

(a) A tem diagonal negativa

(b) A é anti-simétrica em sinais

(c) os únicos ciclos de ordem $k > 2$ são $a_{13}a_{34}a_{41}$ e $a_{14}a_{43}a_{31}$

$$a_{13}a_{34}a_{41} = (+1) (+5) (+4) = 20$$

$$a_{14}a_{43}a_{31} = (-2) (-1) (-10) = -20$$

Logo, pelo Corolário III.2 existe uma matriz $D > 0$ diagonal tal que DA é anti-simétrica e podemos utilizar o procedimento acima para determinarmos a matriz D , senão vejamos: tomando um grafo parcial de G_A indecomponível e acíclico - 2 dado pela matriz de adjacência \tilde{A} , onde:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & +2 & +1 & -2 \\ -6 & -3 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & -2 & 0 \\ +4 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e temos o seguinte sistema do tipo (III.16) associado à matriz \tilde{A} :

$$2d_1 - 6d_2 = 0$$

$$+d_1 - 10d_3 = 0$$

$$-2d_1 + 4d_4 = 0$$

arbitrando (por exemplo) $d_1 = 1$ obtemos:

$$d_2 = 1/3; d_3 = 1/10; d_4 = 1/2$$

Logo $D = \text{diag}[d_1, d_2, d_3, d_4] = \text{diag}[1, 1/3, 1/10, 1/2]$ e

$$DA = \begin{bmatrix} -1 & +2 & +1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{3} & +\frac{1}{2} \\ +2 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Confirmando que A é D -anti-simétrica e a matriz de transformação T diagonal, tal que $T^{-1}AT$ é anti-simétrica é dada por $T = (\sqrt{D})^{-1}$. Donde uma solução será $T = \text{diag}[1, \sqrt{3}, \sqrt{10}, \sqrt{2}]$ e

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{\sqrt{3}}{3} & & \\ & & \frac{\sqrt{10}}{10} & \\ & & & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & +2 & +1 & -2 \\ -6 & -3 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & -2 & +5 \\ +4 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \sqrt{3} & & \\ & & \sqrt{10} & \\ & & & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & +2\sqrt{3} & +10 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{3} & -3 & 0 & 0 \\ -\sqrt{10} & 0 & -2 & +\sqrt{5} \\ +2\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{5} & -1 \end{bmatrix}$$

Outra observação pertinente às matrizes D-anti-simétricas é o fato de que a condição (iii) do Corolário III.2 é uma condição "não robusta" difícil de ocorrer no caso geral de matrizes com vários ciclos de ordem $k \geq 3$; todavia ela pode estar determinada pela natureza do problema como é, por exemplo, o caso do sistema de energia elétrica tratado na Seção VI.1.

III.4 - MATRIZES SIGN STABLE

Uma classe de matrizes inicialmente definida e estudada por Quirk e Ruppert [88] e que teve sua origem no estudo da estabilidade qualitativa de sistemas econômicos [93], [34] mostrou ser de importância no estudo estrutural de sistemas não-lineares propostos no presente trabalho.

Esta classe de matrizes é chamada de "sign stable" (ou qualitativamente estável) e será tratada em seguida. A sua importância relativamente a estabilidade de sistemas não-lineares reside no fato de que as matrizes sign stable têm características estruturais favoráveis (segundo a Definição II.9) e mais, possibilitam a obtenção de resultados estruturais puramente qualitativos (Teorema IV.1 e Corolário IV.4).

Como foi mencionado anteriormente, o estudo de matrizes "sign stable" originou-se do fato de que em sistemas econômicos os valores numéricos de certos parâmetros são difíceis de serem determinados e a única informação disponível, na maioria das vezes, é relativa aos sinais de malhas de realimentação do sistema que é sabido serem positivos ou negativos |⁹³|.

A partir deste fato Quirk e Ruppert |⁸⁸| iniciaram o estudo da estabilidade qualitativa de sistemas lineares autônomos $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ nos quais a matriz $A = (a_{ij})$ é dada apenas pelo conhecimento dos sinais dos seus elementos i.e., sabe-se apenas quais são os positivos, negativos ou nulos.

Definição III.22: Para uma matriz real $n \times n$ $A = (a_{ij})$ definimos $\text{sgn } A = (\text{sgn } a_{ij})$, onde

$$\text{sgn } a_{ij} = "+" \text{ se } a_{ij} > 0$$

$$\text{sgn } a_{ij} = "-" \text{ se } a_{ij} < 0$$

$$\text{sgn } a_{ij} = "0" \text{ se } a_{ij} = 0$$

Obs: Dizemos que $\text{sgn } A$, como acima definida, determina uma "matriz qualitativa" ou equivalentemente, determina uma "estrutura qualitativa" cf. Definição III.6.

Definição III.23: Sejam $A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$ duas matrizes reais $n \times n$; dizemos que A e B são similares em sinal se $\text{sgn } A = \text{sgn } B$, ou seja $\text{sgn } a_{ij} = \text{sgn } b_{ij}$; $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Chamando $Q(A) = \{\tilde{A} \mid \text{sgn } \tilde{A} = \text{sgn } A\}$, que é uma classe de equivalência de matrizes similares em sinal a uma dada matriz real $A = (a_{ij})_{n \times n}$, temos:

Definição III.24: $A = (a_{ij})$ uma matriz real $n \times n$ é "sign stable" (qualitativamente estável) se e somente se $\forall \tilde{A} \in Q(A) \rightarrow \tilde{A}$ é estável.

Ou seja, a matriz A é dita sign stable se e somente se toda a classe de matrizes similares em sinal a A é estável.

Obs: Segundo a definição de estabilidade qualitativa acima, podemos considerar que os resultados de Perron-Frobenius [32] são resultados qualitativos, de vez que referem-se a matrizes "positivas", ou seja, matrizes tais que $a_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Um aspecto interessante de se salientar é o de que resultados como os de Perron-Frobenius assim como os de "sign stability" (dados abaixo), associados à estabilidade do sistema $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$, são resultados intimamente relacionados à representação que é dada a este sistema, ou seja, não são resultados "livres de coordenadas".

Os resultados iniciais de Quirk e Ruppert [88] (Teorema III.8), dando condições necessárias e suficientes para "sign stability", foi mostrado independentemente por Jeffries [43] e Kaszkurewicz e Hsu [55] não estarem completamente corretos (vide Apêndice A1). Dos resultados de Quirk e Ruppert, foi verificado, estarem corretos apenas aqueles referentes a matrizes com diagonal estritamente negativa.

Mais recentemente Jeffries, Klee e Driessche [44] desenvolveram novas condições necessárias e suficientes para "sign stability" baseadas em teoria de grafos e em um conceito de "coloring". Uma maneira alternativa de se obter as condições necessárias e suficientes para sign stability é demonstrada nesta seção (Teorema III.11) baseada no conceito de observabilidade.

Tomando o caso em que os resultados de Quirk e Ruppert são válidos, vamos enunciar o Teorema correspondente, apresentando uma prova alternativa no caso da suficiência das condições dadas em [88].

Teorema III.7: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz indecomponível tal que $a_{ij} < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$; as condições necessárias e suficientes para que A seja "sign stable" são:

(i) A tem estrutura acíclica-3

(ii) $\text{sgn } A_0 = \text{sgn}(-A_0)'$; ($A_0 = A - \text{diag}(a_{ii})$)

Obs: No caso de A ser decomponível a condição (ii) é substituída por $a_{ij} \cdot a_{ji} \leq 0$. η

Prova:

Suficiência: Se A satisfaz às condições (i) e (ii) pelo Corolário III.3 $A \in \mathcal{D}_2$ e portanto pelo Teorema III.2 (Lyapunov) A é estável. Dado que qualquer que seja \bar{A} tal que $\text{sgn } \bar{A} = \text{sgn } A$ as con

dições (i) e (ii) implicam em que \bar{A} é estável, portanto pela Definição III.24 A é "sign stable".

Necessidade: Curiosamente a necessidade das condições (i) e (ii) aparentemente não é óbvia a partir do Teorema de Lyapunov (Teorema III.2). A necessidade foi demonstrada em [88] baseada nas condições de Hurwitz [32]. A seguir é dada uma síntese desta demonstração:

Condição (ii): Se A é sign stable, pelas condições de Hurwitz [32] todos os coeficientes α_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ($\alpha_0 = 1$) do polinômio característico de A dado por

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda^{(n-i)}$$

tem de ser positivos independentemente dos valores numéricos dos elementos de A . Como $\alpha_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j<i} (a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji})$ e $a_{ii} < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, devemos ter $a_{ij} \cdot a_{ji} \leq 0$, caso contrário poderá haver valores de a_{ij} e a_{ji} tais que α_2 seja negativo.

Obs: Pelo fato de $A = (a_{ij})$ ser indecomponível a condição $a_{ij} \cdot a_{ji} \leq 0$ em presença da condição (i) é equivalente a $\text{sgn } A_0 = \text{sgn } (-A_0)'$.

Condição (i): Se A é sign stable então todos os coeficientes α_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ são positivos, e mais, os determinantes de Hurwitz, também são positivos independentemente dos valores numéricos

ricos dos elementos de $A = (a_{ij})$. Nestes termos a demonstração da necessidade da condição (i) é dada em [88] e um exemplo de 3ª ordem ilustra o procedimento:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = (-1) (a_{11} + a_{22} + a_{33})$$

$$\alpha_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} + a_{23}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$\alpha_3 = (-1) (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{33}a_{12}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{32})$$

A condição de Hurwitz $\alpha_3 > 0$ pode ser satisfeita, baseada apenas nos sinais dos elementos de A , se tivermos $a_{12}a_{23}a_{31} \leq 0$ e $a_{13}a_{32}a_{21} \leq 0$. Todavia a condição do determinante de Hurwitz

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ 1 & \alpha_2 \end{vmatrix} > 0$$

implica que devemos ter $a_{12}a_{23}a_{31} \geq 0$ e $a_{13}a_{32}a_{21} \geq 0$, portanto uma condição necessária para que A seja estável independentemente dos valores numéricos de a_{ij} (no caso 3×3) e que ao menos um dos elementos a_{12} , a_{23} , a_{31} e ao menos um dos elementos a_{13} ,

a_{32} , a_{21} seja nulo, ou equivalentemente que na matriz A não haja ciclos de ordem 3.

Mostra-se que tal fato se verifica para matrizes de ordem superior a 3 ^[88].

Obs: A determinação da necessidade das condições (i) e (ii) para "sign stability" de A a partir da utilização do Teorema de Lyapunov (Teorema III.2) não parece ser imediata.

A partir do Teorema acima podemos estabelecer o seguinte Corolário:

Corolário III.4: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ indecomponível com diagonal negativa ($a_{ii} < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$), então temos que: se A é sign stable então $A \in \mathcal{D}_2$ e a matriz diagonal $D = \text{diag}(d_i)$ correspondente é dada pela solução das $n-1$ equações do tipo (III.16):

$$d_i a_{ij} + d_j a_{ji} = 0 ; (i, j) \in \bar{N} \quad (\text{III.23})$$

Prova: Pelo Teorema III.7 se A é sign stable então se verificam as condições (i) e (ii) o que por sua vez, pelo Corolário III.3 implica em que $A \in \mathcal{D}_2$.

Como $A \in \mathcal{D}_2$, pelo Teorema III.5 A é D -anti-simétrica, então existem n -números reais $d_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ tais que (III.23) é satisfeita, ou equivalentemente $DA + A'D = -Q$ on

de $D = \text{diag}(d_i > 0)$ e $Q = \text{diag}(q_i) > 0$. Pelo fato de A ser acíclica-3 \bar{N} tem $(n-1)$ elementos.

Note-se que a identificação de uma matriz ou estrutura sign stable (com diagonal negativa) pode ser feita quase que por simples inspeção, basicamente utilizando o Teorema III.3 para verificar a condição (i) do Teorema III.7 (ser acíclica-3) visto que a verificação da condição (ii) é imediata.

Sabe-se que a condição $a_{ij} < 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ não é uma condição necessária para "sign stability", de vez que para que tenhamos $\alpha_1 = (-1) \sum_{i=1}^n a_{ii} > 0$ independentemente dos valores numéricos de $A = (a_{ij})$ é necessário que tenhamos $a_{ij} \leq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ e que $a_{kk} < 0$ para algum $1 \leq k \leq n$. (Se algum a_{ij} for positivo haverá valores tais que α_1 será negativo) e portanto em termos dos elementos diagonais esta é a condição necessária.

Para o caso em que a diagonal não é estritamente negativa Quirk e Ruppert [88] apresentaram o seguinte:

Teorema III.8 [88], [69], [10]: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz real $n \times n$ indecomponível, então A é sign stable se e somente se:

(i) A é acíclica-3

(ii) $a_{ij} \cdot a_{ji} \leq 0; i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n$

(iii) $a_{ii} \leq 0$ para todo i , $a_{kk} < 0$ para ao menos um k
 $1 \leq k \leq n$

(iv) existe um termo não nulo na expansão de $|A|$.

Claramente o exemplo abaixo $|^{43}|$, $|^{55}|$, constitui-se em um contra-exemplo ao Teorema de Quirk e Ruppert $|^{88}|$ (Teorema III.8).

Exemplo III.2: Seja a matriz $B = (b_{ij})$ dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & +1 & & & \\ -1 & 0 & +1 & & \\ & -1 & -1 & +1 & \\ & & -1 & 0 & +1 \\ & & & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Verifica-se que a matriz acima satisfaz as condições do Teorema III.8 e tem $\pm j$ entre seus auto-valores e não é "sign stable", portanto as condições do Teorema III.8 não são suficientes. Curiosamente o exemplo acima foi achado independentemente por Jeffries $|^{43}|$ e posteriormente por Kaszkurewicz e Hsu $|^{55}|$, sendo que os últimos autores determinaram exatamente o ponto em que Quirk e Ruppert falharam na prova do seu Teorema. (Este ponto está explicitado em $|^{55}|$ e no Apêndice A1).

A razão crucial pela qual o Teorema III.8 não assegura "sign stability" de uma matriz A está ligado ao fato de que a equação de Lyapunov $PA + A'P = -Q$ com $P > 0$ e $Q \geq 0$ (semi-definida positiva) não assegura a estabilidade da matriz A , condições adicionais são exigidas neste caso.

Como no caso em que a matriz $A = (a_{ij})$ (com diagonal não estritamente negativa) satisfaz as condições do Teorema III.8 ^[88], a equação de Lyapunov é satisfeita com $P > 0$; diagonal dada pela solução do sistema (III.23) e $Q \geq 0$ (diagonal), isto em certos casos não é suficiente para assegurar estabilidade assintótica como é o caso do exemplo (III.2).

Baseando-se no Teorema de LaSalle ^[64] (Teorema II.4) e no conceito de observabilidade, dá-se a seguir uma maneira de determinar as condições necessárias e suficientes para sign stability no caso em que a matriz não tem diagonal estritamente negativa.

Considerando-se o sistema linear abaixo:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} \quad (III.24)$$

$$\underline{y} = C\underline{x}$$

com $\underline{x} \in R^n$; $\underline{y} \in R^m$; $m \leq n$; A e C matrizes reais constantes ($n \times n$) e ($m \times n$) respectivamente, temos o seguinte:

Lema III.12: No sistema (III.24) $\underline{y}(t) = 0, \forall t \geq 0$ implica em que $\underline{x}(t) = 0 \forall t \geq 0$ se e somente se o par (A, C) é observável.

Prova: Tomando $\underline{y}(t) = C\underline{x}(t)$ e derivando $(n-1)$ vezes sucessivas temos:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{y}}(t) &= CA\underline{x}(t) \\ \ddot{\underline{y}}(t) &= CA^2\underline{x}(t) \\ &\vdots \\ \underline{y}^{(n-1)}(t) &= CA^{n-1}\underline{x}(t) \end{aligned} \tag{III.25}$$

podemos escrever (III.25) na forma

$$\tilde{\underline{y}}(t) = K \underline{x}(t) \tag{III.26}$$

onde $\tilde{\underline{y}}(t) = [\underline{y}'(t), \dot{\underline{y}}'(t), \dots, (\underline{y}^{(n-1)}(t))']'$

e

$$K = [C \ ; \ CA \ ; \ \dots \ ; \ CA^{n-1}]'$$

Se $\underline{y}(t) = 0, \forall t \geq 0$ implica em $\underline{x}(t) = 0 \forall t \geq 0$; de (III.26) isto ocorre se e somente se o posto de K é n , o que equivale ao par (A, C) ser observável.

Utilizando o resultado acima podemos enunciar o seguinte:

Teorema III.9: Seja o sistema linear autônomo $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$; $A = (a_{ij})$ $n \times n$ tal que a equação de Lyapunov $PA + A'P = -LL'$ é satisfeita para $P > 0$ simétrica e $LL' \geq 0$, então A é estável se e somente se o par (A, L') é observável.

Prova:

Suficiência: Considerando a função de Lyapunov para o sistema $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ dada por $V(\underline{x}) = \underline{x}'P\underline{x}$, temos que $V(\underline{x}) > 0$ e $\dot{V}(\underline{x}) = \underline{x}'LL'\underline{x} \leq 0$. Chamando $Z = \{\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(\underline{x}) = 0, \forall t \geq 0\}$ temos o seguinte:

Como $\dot{V}(\underline{x}) = \underline{x}'LL'\underline{x} = 0$ e $LL' \geq 0$, chamando $L'\underline{x} = \underline{y}$ temos que $\underline{y}'\underline{y} = 0$ se e somente se $\underline{y} = 0$ logo $Z = \{\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n \mid L'\underline{x}(t) = 0, \forall t \geq 0\}$

Dado que (A, L') é observável, pelo Lema III.12 temos que $\underline{y}(t) = 0, \forall t \geq 0$ implica em que $\underline{x}(t) = 0, \forall t \geq 0$ i. e., $Z = \{0\}$ e pelo Teorema II.4, $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ é globalmente assintoticamente estável e portanto A é estável.

Necessidade: Sendo λ_i, λ_j auto-valores de A , se A é estável então $\lambda_i + \lambda_j \neq 0, i, j = 1, 2, \dots, n$ e a solução de $PA + A'P = -LL'$ (no caso $P > 0$) pode ser escrita na forma ^[13] da integral:

$$P = \int_0^{\infty} e^{A't} LL' e^{At} dt > 0 \quad (\text{III.27})$$

Supondo que (A, L') não é observável, então existe um vetor $\underline{x}(0) \neq 0$ tal que $L'.e^{At}.\underline{x}(0) = 0, \forall t \geq 0$, e portan-

to de (III.27), para este vetor temos que:

$$\underline{x}'(0) P \underline{x}(0) = \int_0^{\infty} \underline{x}'(0) e^{A't} L L' e^{At} \underline{x}(0) dt = 0$$

o que contraria (III.27)

Neste ponto introduzimos o conceito de "observabilidade qualitativa" que embora possa lembrar o conceito de "observabilidade (controlabilidade) estrutural", introduzida por C. T. Lin [66] e utilizada por outros autores [99], [33], na realidade é distinta como é visto a seguir:

Considerando dois sistemas do tipo (III.24) dados pelos pares (A_1, C_1) e (A_2, C_2) de mesmas dimensões, dizemos que eles têm a mesma estrutura qualitativa se A_1 e A_2 bem como C_1 e C_2 são respectivamente "similares em sinal".

Definição III.25: Dizemos que um par (A, C) é "qualitativamente observável" se são observáveis (no sentido usual) todos os pares similares em sinal a (A, C) .

Chamando de A_0 a matriz obtida a partir de uma matriz $A = (a_{ij})$ $n \times n$ tal que $A_0 = A - \text{diag}(a_{ii})$ e chamando de L' a matriz $(r \times n)$ tal que suas r linhas são as r linhas de $\text{diag}(-a_{ii})$ tais que $a_{ii} \neq 0$, podemos enunciar o seguinte:

Teorema III.10: Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ $n \times n$ indecomponível, as condições necessárias e suficientes para que A seja "sign stable" são:

$$(i) \quad \text{sgn } A_0 = \text{sgn}(-A_0)'$$

(ii) A é acíclica-3

(iii) $a_{ii} \leq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$, e existe ao menos um $a_{kk} < 0$ para $1 \leq k \leq n$.

(iv) (A, L') é qualitativamente observável.

Prova:

Suficiência: Se (i), (ii) e (iii) então a partir do Corolário III.4 mostra-se que para toda matriz \tilde{A} similar em sinal a A existem matrizes $\tilde{P} > 0$ e $\tilde{Q} \geq 0$ diagonais (onde $\tilde{Q} = \tilde{L}\tilde{L}'$ e \tilde{L}' similar em sinal a L') tais que

$$\tilde{P}\tilde{A} + \tilde{A}'\tilde{P} = -\tilde{Q} \quad (\text{III.28})$$

é satisfeita. Se ainda o par (A, L') é qualitativamente observável então todo par (\tilde{A}, \tilde{L}') similar em sinal a (A, L') é observável e pelo Teorema III.9 toda matriz \tilde{A} similar em sinal a A é sign stable.

Necessidade: A necessidade das condições (i), (ii) e (iii) é vista nos Teoremas III.7 e III.8, mostramos a seguir a necessidade da condição (iv). Sendo A "sign stable" então para todas as matrizes \tilde{A} similares em sinal a A temos que $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Supondo por hipótese que existe um par (\tilde{A}, \tilde{L}') similar em sinal a (A, L') tal que (\tilde{A}, \tilde{L}') não é observável, ou seja, (A, L') não é qualitativamente observável. Neste caso (pelo Teorema III.12) existe uma solução $\underline{x}(t)$ não identicamente nula para o sistema $\dot{\underline{x}} = \tilde{A}\underline{x}$, dada por

$$\underline{x}(t) = e^{\tilde{A}t} \underline{x}(0) \quad (\text{III.29.a})$$

tal que

$$\underline{y}(t) = \tilde{L}' e^{\tilde{A}t} \underline{x}(0) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{III.29.b})$$

A partir da definição de L' , $\underline{y}(t) = 0 \rightarrow x_k(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$; $x_k(t)$ correspondentes aos índices k tais que $a_{kk} < 0$. Chamando de $\underline{x}_{\sim\text{II}}$ ao vetor formado por estas variáveis, reindexando-as convenientemente podemos reescrever o sistema $\dot{\underline{x}} = \tilde{A}\underline{x}$ na forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}_{\sim\text{I}}} \\ \dot{\underline{x}_{\sim\text{II}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \vdots & \tilde{A}_{12} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \tilde{A}_{21} & \vdots & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_{\sim\text{I}} \\ \underline{x}_{\sim\text{II}} \end{bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

Neste caso temos as seguintes implicações para todo $t \geq 0$:

$(\underline{y}(t) = 0 \rightarrow \underline{x}_{II}(t) = 0)$ e $(\underline{x}_{II}(t) = 0 \rightarrow \dot{\underline{x}}_{II}(t) = 0)$ e o sistema (III.30) fica reduzido a

$$\dot{\underline{x}}_I = \tilde{A}_{11} \underline{x}_I \tag{III.31}$$

$$0 = \tilde{A}_{21} \underline{x}_I$$

e como por hipótese existe uma solução (III.29.a), satisfazendo (III.29.b), esta solução necessariamente será dada pelo sistema (III.31). Como todavia a matriz \tilde{A}_{11} tem diagonal nula, isto implicará que a solução (III.29.a) terá modos (λ_i) tais que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ (onde k é o número de elementos não nulos de A) o que contradiz o fato de \tilde{A} ser estável. Portanto se A é sign stable necessariamente o par (A, L') é qualitativamente observável.

Sobre o Teorema acima podemos colocar os seguintes pontos:

- (a) embora o Teorema III.10 caracterize as matrizes sign stable no caso geral, recai-se no problema de caracterizar (para as matrizes acíclicas-3) a observabilidade qualitativa.
- (b) recentemente Jeffries, Klee e Driessche [44] deram as condições necessárias e suficientes para sign stability (as condições (i) a (iii) são as mesmas). Destas, as condições equi-

valentes (duas) a condição (iv) do Teorema III.10 são dadas em termos do grafo G_A associado a matriz A , uma baseada no conceito de "coloring" do referido grafo e a outra relativa ao conceito de "complete matching" associado ao grafo G_A (esta correspondendo a condição (iv) do Teorema III.8).

(c) no caso da matriz $A = (a_{ij})$ ser decomponível, identifica-se os blocos decomponíveis e aplica-se o Teorema III.10 a cada um dos blocos.

Embora para o caso de matrizes acíclicas-3, (comentário (a)) a caracterização da observabilidade qualitativa ainda esteja em estudo, assim como sua relação com a observabilidade estrutural, para o caso de matrizes Jacobi podemos estabelecer as condições de observabilidade qualitativa do par (A, L') e portanto pelo Teorema III.10 estabelecer as condições de sign stability para o caso Jacobi a partir dos resultados seguintes:

Definição III.26: Dada uma matriz Jacobi $A = (a_{ij})_{n \times n}$, chamamos de "blocos de ordem $(p + 1)$ da matriz A " a toda sub-matriz principal de A de ordem $(p + 1) \times (p + 1)$ cuja diagonal principal é formada por elementos diagonais consecutivos de A i.e., $a_{k,k}, a_{k+1,k+1}, \dots, a_{k+p,k+p}$ com $1 \leq k \leq n$ e $1 \leq p \leq n-1$ sendo que os elementos fora da diagonal são os mesmos elementos da matriz A que restam ao se eliminar todas as linhas e colunas correspondentes aos índices $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tais que $j \notin \{k, k+1, \dots, k+p\}$.

Definição III.27: Chamamos de "bloco zero de ordem p" da matriz $A = (a_{ij})$ a todo bloco de ordem p que tem p elementos diagonais nulos consecutivos de A compreendidos entre dois elementos diagonais não nulos de A. Caso $a_{11} = 0$ o "bloco zero inicial" corresponde aos elementos diagonais $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{kk} = 0$ com $a_{k+1,k+1} \neq 0$. Analogamente, se $a_{n,n} = 0$ definimos o bloco zero final. Caso $A = (a_{ij})$ tenha diagonal nula, A terá um único "bloco zero" que coincide com a matriz A.

Lema III.13: Sejam os pares (\bar{A}, \bar{c}) e (\bar{A}, \tilde{c}) tais que \bar{A} é uma matriz Jacobi (nxn) indecomponível e

$$\bar{c} = [0, 0, 0, \dots, 0, \bar{c}_n]; \bar{c}_n \neq 0$$

$$\tilde{c} = [\tilde{c}_1, 0, 0, \dots, 0]; \tilde{c}_1 \neq 0$$

então ambos pares são qualitativamente observáveis.

Prova: Seja o sistema

$$\dot{\underline{x}} = \bar{A} \underline{x}$$

(III.32)

$$y = \tilde{c} \underline{x}$$

nas condições acima, considerando o primeiro par, podemos escrever (III.32) explicitamente na forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 \\
\dot{x}_2 &= \tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 \\
\dot{x}_3 &= \tilde{a}_{32}x_2 + \tilde{a}_{33}x_3 + \tilde{a}_{34}x_4 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= \tilde{a}_{n-1,n-2}x_{n-2} + \tilde{a}_{n-1,n-1}x_{n-1} + \tilde{a}_{n-1,n}x_n \\
\dot{x}_n &= \tilde{a}_{n-1}x_{n-1} + \tilde{a}_{n,n}x_n
\end{aligned}
\tag{III.33}$$

$$y = [0, 0, \dots, \tilde{c}_n] \underline{x}$$

Claramente, pelas equações (III.33) ($y(t) = 0 \forall t \geq 0 \rightarrow \underline{x}(t) = 0 \forall t \geq 0$) pois sucessivamente ($y(t) = c_n x_n(t) = 0 \rightarrow (\dot{x}_n(t) = 0) \rightarrow (x_{n-1}(t) = 0) \rightarrow (\dot{x}_{n-1}(t) = 0) \dots \rightarrow (x_1(t) = 0)$, $\forall t \geq 0$ e portanto pelo Lema III.12 (\tilde{A}, \tilde{c}) é observável. Como todavia isto ocorre independentemente dos valores numéricos de \tilde{c}_n e \tilde{a}_{ij} , (\tilde{A}, \tilde{c}) é qualitativamente observável. Observe-se que isto ocorre independentemente de \tilde{A} ter diagonal toda nula ou não (no caso (\tilde{A}, \tilde{c}) a prova é idêntica). •

Dada uma matriz de Jacobi $A = (a_{ij})_{n \times n}$ indecomponível tal que $a_{ij} \leq 0$ (com ao menos um elemento diagonal nulo) definimos:

n_b : número de "blocos zero" de A

n_d : número de elementos diagonais não nulos de A

L' : cf. definição utilizada no Teorema III.10.

A partir das definições acima podemos enunciar:

Lema III.14: Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ Jacobi ($n \times n$) indecomponível tal que $a_{ij} \leq 0$, (com ao menos um elemento diagonal não nulo) se $n_d = n_b$ então (A, L') é qualitativamente observável.

Prova: Seja o sistema

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A\underline{x} \\ \underline{y} &= L'\underline{x} \end{aligned} \tag{III.34}$$

onde $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ e $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$

Se $n_d = n_b$ então necessariamente uma das seguintes situações (ou ambas) ocorre na matriz A :

- (a) existe um elemento diagonal negativo a_{kk} , tal que $a_{kk} < 0$ para $k = 1$ ou $k = n$.
- (b) existem dois índices consecutivos (k e $k+1$) tais que $a_{k,k}$ e $a_{k+1,k+1}$ são negativos.

No caso (a) pelo Lema III.13 (A, L') é qualitativamente observável.

No caso (b), supondo que os índices k e $k+1$ são distintos de $(1$ e $2)$ e $(n-1$ e $n)$ respectivamente (caso contrário

Se $y_k^+(t) = y_{k+1}^+(t) = 0$ então $y_I^+(t) = y_{II}^+(t) = 0$ (pois $y_I^+(t) = \dot{y}_k^+(t)$ e $y_{II}^+(t) = \dot{y}_{k+1}^+(t)$) logo como os sistemas (III.35.a) e (III.35.b) são qualitativamente observáveis (pelo Lema III.13) então $(\underline{y}^+(t) = 0) \rightarrow (\underline{x}^+(t) = 0)$ e portanto pelo Lema III.12 (A, L') é observável. Como todavia a observabilidade se verifica independentemente dos valores numéricos de (A, L') então (A, L') é qualitativamente observável. \bullet

Obs: É fácil ver que se $n_d > n_b$, utilizando o mesmo raciocínio mostra-se que (A, L') também será qualitativamente observável.

Lema III.15: Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ Jacobi tal que $a_{i,i+1} \cdot a_{i+1,i} < 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ e $a_{jj} \leq 0$; $j = 1, 2, \dots, n$ (com ao menos um elemento diagonal não nulo) então temos que: se não existem blocos zero de ordem r ($r \geq 2$) em presença de blocos zero de ordem 1 então $n_d = n_b$ é uma condição necessária para que o par (A, L') seja qualitativamente observável.

Prova: Supondo que $n_d < n_b$ ($(n_d)_{\min} = n_b - 1$), neste caso não poderão ocorrer os casos em que $a_{kk} < 0$ para $k = 1$ ou $k = n$.

Vamos utilizar o Lema III.12 para mostrar que neste caso o sistema (III.34) apresenta valores numéricos para o par (A, L') tais que $(\underline{y}^+(t) = 0 \not\rightarrow \underline{x}^+(t) = 0)$, ou seja, que o par (A, L') não é qualitativamente observável.

Impondo $\underline{y}^+(t) = 0$ o sistema (III.34) pode ser escrito na forma de n_b sistemas Jacobi (blocos zero) acoplados

dois a dois pelas saídas escalares \tilde{y}_i , $i = 1, 2, \dots, n_b - 1$, como abaixo:

$$\dot{\tilde{x}}_I = A_I \tilde{x}_I$$

$$\tilde{y}_1 = [0, 0, \dots, *, *, 0, 0, \dots, 0] \tilde{x}$$

$$\dot{\tilde{x}}_{II} = A_I \tilde{x}_{II}$$

$$\tilde{y}_2 = [0, 0, \dots, \dots, *, *, \dots, 0] \tilde{x}$$

(III.36)

$$\dot{\tilde{x}}_{\Pi-I} = A_{\Pi-I} \tilde{x}_{\Pi-I}$$

$$\tilde{y}_{(n_b-1)} = [0, 0, \dots, \dots, *, *, 0, \dots, 0] \tilde{x}$$

$$\dot{\tilde{x}}_{\Pi} = A_{\Pi} \tilde{x}_{\Pi}$$

onde $\tilde{x} = [\tilde{x}_I, \tilde{x}_{II}, \dots, \tilde{x}_{\Pi}]$; ($\Pi = n_b$)

Obs: "*" indica um elemento não nulo.

Se mostrarmos que nestas condições, com $n_d < n_b$, existem valores numéricos para A tais que $(\tilde{y}_i^+(t) = 0; i = 1, 2, \dots, n_b - 1) \rightarrow \tilde{x}^+(t) = 0$ então (A, L') não será qualitativa-mente observável.

Vamos considerar separadamente os casos em que:

(a) todos os blocos zero (A_i) $i = I, II, \dots, \pi = n_b$ são de ordem r tal que $r \geq 2$.

(b) existe um bloco zero A_k de ordem 1 e todos os A_i , $i = I, II, \dots, \pi = n_b$ são de ordem ímpar.

Caso (a): Analisemos primeiramente o caso em que há apenas dois blocos zero de ordem $n \geq 2$, i.e., $a_{kk} < 0$ é único. Se em (III.34) $(y^+(t) = 0)$ então podemos escrever o sistema na forma (III.36), ou seja,

$$\dot{\underline{x}}_I = A_I \underline{x}_I \quad (\text{III.37.a})$$

$$\tilde{y} = [0, \dots, a_{k,k-1}, a_{k,k+1}, \dots, 0] \tilde{x}$$

$$\dot{\underline{x}}_{II} = A_{II} \underline{x}_{II} \quad (\text{III.37.b})$$

onde $\underline{x}_I = [x_1, x_2, \dots, x_{k-1}]'$;

$$\underline{x}_{II} = [x_{k+1}, \dots, x_n]', \quad \tilde{x} = [\underline{x}_I', \underline{x}_{II}']'$$

Temos que $(y^+(t) = 0) \rightarrow (\tilde{y}^+(t) = 0)$

$$\text{se } (\tilde{y}^+(t) = 0) \rightarrow a_{k,k-1} x_{k-1}^+(t) = -a_{k,k+1} x_{k+1}^+(t) \quad (\text{III.38})$$

Mostra-se a seguir que é possível determinar valores numéricos em A tais que (III.37) e (III.38) podem ser satis-

feitas $\forall t \geq 0$ para $x_{k-1}^+(t)$ e $x_{k+1}^+(t)$ não identicamente nulos.

Os sistemas (III.37), acima, formados pelos blocos zero A_I e A_{II} têm as soluções dadas respectivamente por:

$$\underline{x}_I(t) = \sum_{i=1}^{(k-1)} C_{I_i} \underline{v}_{I_i} e^{\lambda_{I_i} t} \quad (\text{III.39})$$

$$\underline{x}_{II}(t) = \sum_{i=1}^n C_{II_i} \underline{v}_{II_i} e^{\lambda_{II_i} t}$$

onde: C_{I_i}, C_{II_i} : são constantes que dependem das condições iniciais $\underline{x}_I(0)$ e $\underline{x}_{II}(0)$ respectivamente.

$\underline{v}_{I_i}, \underline{v}_{II_i}$: são os auto-vetores correspondentes aos auto-valores λ_{I_i} e λ_{II_i} respectivamente de A_I e A_{II} .

Como as matrizes A_I e A_{II} são blocos zero de ordem $n \geq 2$ pelo Lema A 2.1 (Apêndice A2) é sempre possível arbitrar valores numéricos a seus elementos de modo que ambas (A_I e A_{II}) tenham os mesmos auto-valores imaginários puros (λ_0 e $-\lambda_0$) distintos dos demais.

Sejam \underline{v}_I e \underline{v}_I^* (\underline{v}_{II} e \underline{v}_{II}^*) os auto-vetores (pares complexos conjugados) de A_I (A_{II}) relativos aos auto-valores λ_0 e $-\lambda_0$ respectivamente.

Desde que:

$$\underline{x}_I(t) = C_I \underline{v}_I e^{\lambda_0 t} + C_I^* \underline{v}_I^* e^{-\lambda_0 t}$$

$$x_{II}(t) = C_{II} \underline{v}_{II} e^{\lambda_0 t} + C_{II}^* \underline{v}_{II}^* e^{-\lambda_0 t}$$

são respectivamente soluções de $\dot{\underline{x}}_I = A_I \underline{x}_I$ e $\dot{\underline{x}}_{II} = A_{II} \underline{x}_{II}$ para C_I e C_{II} constantes (complexas) arbitrárias. No caso, C_I e C_{II} podem ser escolhidos de modo a que (III.38) seja verificada. Isto pode ser obtido fazendo-se

$$C_I \cdot v_{k-1} = - \frac{a_{k,k+1}}{a_{k,k-1}} C_{II} \cdot v_{k+1} \text{ onde}$$

$$\underline{v}_I = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}]'$$

$$\underline{v}_{II} = [v_{k+1}, \dots, v_n]'$$

o que é sempre possível para C_I e $C_{II} \neq 0$ pois pelo Lema A2.2 (Apêndice A2) $v_{k-1} \neq 0$ e $v_{k+1} \neq 0$.

Portanto existem valores para os elementos de A tais que $(y^+(t) = 0) \not\rightarrow (\underline{x}(t)^+ = 0)$, donde (A, L') não é qualitativamente observável.

Considerando o caso geral quando (III.37) é formado de $n_b > 2$ blocos zero, chega-se por argumentos análogos a n_b sistemas do tipo:

$$\dot{\underline{x}}_J = A_J \underline{x}_J \quad (J = I, II, \dots, \pi = n_b) \quad (\text{III.40})$$

e ao invés de (III.38) considerando $\underline{y}^+(t) = 0$ teremos $(n_b - 1)$ relações

$$x_{j-1}^+(t) = - \frac{a_{j,j+1}}{a_{j,j-1}} x_{j+1}^+(t) \quad (\text{III.41})$$

para $(j = k_1, k_2, \dots, k_{(n_b-1)})$ onde $k_1, k_2, \dots, k_{(n_b-1)}$ são os índices correspondentes aos elementos diagonais negativos.

A cada um dos blocos A_j podem ser atribuídos valores numéricos tais que todos blocos tenham os auto-valores λ_0 e $-\lambda_0$ em comum. Por procedimento análogo ao caso de dois blocos é possível satisfazer todas as $(n_b - 1)$ relações (III.41), mostrando desta forma que neste caso (A, L') não é qualitativamente observável, portanto $n_d = n_b$ é uma condição necessária para observabilidade qualitativa de (A, L') .

Caso (b): A prova é análoga ao caso (a) somente que nesta situação a solução $\underline{x}^+(t) \neq 0$ que existe para $\underline{y}^+(t) = 0$, é dada por um valor constante ($\underline{x}^+(t) = C \neq 0$). Pelo fato de todos os blocos A_j em (III.36) serem de ordem ímpar, eles possuem o autovalor ($\lambda = 0$) em comum. Por procedimento análogo ao caso (a) mostra-se que as relações do tipo (III.41) podem ser satisfeitas e portanto o par (A, L') não será qualitativamente observável.

Lema III.16: Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ Jacobi tal que $a_{i,i+1} \cdot a_{i+1,i} < 0$; $i = 1, 2, \dots, n-1$ e $a_{jj} \leq 0$, $j=1, 2, \dots, n$,

(com ao menos um elemento diagonal não nulo). Se existem blocos zero de ordem par em presença de blocos zero de ordem 1 então (A, L') é qualitativamente observável.

Prova: Considerando $n_d < n_b$ (caso contrário de imediato pelo Lema III.14 (A, L') seria qualitativamente observável). Novamente utilizaremos o Lema III.12 ou seja vamos mostrar que neste caso no sistema (III.34) $(\underline{y}^+(t) = 0) \rightarrow (\underline{x}^+(t) = 0)$ para quaisquer valores numéricos do par (A, L') .

Assumindo $\underline{y}^+(t) = 0$ em (III.34) recaímos no sistema (III.36) com π blocos zero ($\pi = n_b$). Supondo primeiramente como na prova do Lema anterior que temos apenas dois blocos zero, um de ordem par e um bloco zero de ordem 1, ou seja,

$$\dot{x}_1 = 0 \quad x_1$$

$$\tilde{y} = [a_{21}, a_{23}, 0, \dots, 0] \underline{x}$$

$$\dot{\underline{x}}_{II} = A_{II} \underline{x}_{II} \quad (\text{III.42})$$

onde $\underline{x} = [x_1, \underline{x}'_{II}]'$; $\underline{x}_{II} = [x_3, x_4, \dots, x_n]'$

$$\text{neste caso } (\tilde{y}^+(t) = 0) \rightarrow a_{21} x_1^+(t) = -a_{23} x_3^+(t) \quad (\text{III.43})$$

Veremos que se $\underline{y}^+(t) = 0$, nestas condições (III.43) não pode ser satisfeita $\forall t \geq 0$. Claramente o bloco zero de ordem 1 tem um único auto-valor $\lambda = 0$ e portanto $x_1^+(t) \neq 0$

somente poderá ser tal que $x_1^+(t) = \text{cte} = x_1(0)$. Como o bloco zero A_{II} é de ordem par, este somente poderá ter raízes em pares complexos conjugados, logo (III.43) somente poderá ser verificada se $x_1^+(t) = x_2^+(t) = 0$. Pelo Lema III.13 ($x_2^+(t) = 0$) \rightarrow ($x_{II}^+(t) = 0$) e portanto ($y^+ = 0$) \rightarrow ($x^+(t) = 0$), logo no caso de um bloco zero de ordem 1, em presença de um bloco zero de ordem par, (A, L') é qualitativamente observável. Pelo fato de que o bloco zero de ordem 1 somente admite $x^+(t) \neq 0$ se $x^+(t) = \text{cte}$, implica em que no caso geral, os blocos de ordem ímpar podem satisfazer às condições do tipo (III.43). Todavia é fácil verificar que a presença de um bloco par, pelo exposto acima, impede que as $(n_b - 1)$ relações do tipo (III.4) se verifiquem para soluções não identicamente nulas, quaisquer que sejam os valores numéricos atribuídos ao par (A, L') , portanto ($y^+(t) = 0$) \rightarrow ($x^+(t) = 0$) e (A, L') é qualitativamente observável. \bullet

A partir dos Lemas (III.14), (III.15) e (III.16) podemos enunciar o seguinte:

Teorema III.11: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz Jacobi $n \times n$ indecomponível, A é sign stable se e somente se:

$$(i) \quad a_{i,i+1} \cdot a_{i+1,i} < 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$(ii) \quad a_{ii} \leq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \text{ e existe ao menos um } a_{kk} < 0 \text{ para } 1 \leq k \leq n.$$

(iii) ao menos uma das condições abaixo se verifica:

$$(iii)_a \quad n_d = n_b$$

$(iii)_b$ existe ao menos um bloco zero de ordem 1 em presença de um bloco zero de ordem par.

Prova: A suficiência é dada a partir do Teorema III.10 juntamente com os Lemas III.14 e III.16.

A necessidade é dada pelo Teorema III.10 juntamente com o Lema III.15

Considerando o Exemplo III.2 vê-se claramente que $n_d = 1$ e $n_b = 2$ e não existindo blocos zero de ordem 1 em presença de blocos de ordem par a matriz B não é sign stable.

No Teorema III.11 acima as condições $(iii)_a$ e $(iii)_b$ são equivalentes à observabilidade qualitativa do par (A, L') , crê-se que para o caso mais geral em que a matriz A é acíclica-3, condições semelhantes possam ser obtidas a partir da utilização do Lema III.12, como foi feito no caso Jacobi, ou de alguma outra maneira equivalente que seja menos trabalhosa.

Considerando que a partir do Teorema III.11 é possível identificar as matrizes Jacobi sign stable, podemos estabelecer a seguinte conjectura para o caso não-linear.

"O sistema $\dot{x} = A f(x)$ ($f(\cdot)$ é tal como no Teorema II.5) onde A é Jacobi sign stable (com diagonal não estritamente negativa) é absolutamente estável A_∞ ".

A partir da utilização de uma função de Lyapunov do tipo (II.7) onde os coeficientes a_i são obtidos de (III.11) recai-se em uma função $\dot{V}(x) \leq 0$ (semi-definida negativa). Todavia crê-se que, com a utilização do Teorema de LaSalle e do Teorema III.11, será possível provar a conjectura acima.

A classe das matrizes \mathcal{D} no contexto deste trabalho caracteriza as estruturas favoráveis e como foi mencionado no início deste capítulo, esta classe foi recentemente caracterizada [9] porém por condições de difícil verificação, daí a razão do desenvolvimento dos resultados deste capítulo visando a obtenção de condições relativamente simples em termos algébricos e/ou estruturais que caracterizassem sub-classes de \mathcal{D} . Ativemo-nos ao caso das matrizes acíclicas-3, D-anti-simétricas e sign-stable. A partir da caracterização de suas propriedades são determinados os resultados contidos nos capítulos IV, V e VI.

Considerando-se que à classe \mathcal{D} pertencem outros tipos de matrizes com propriedades conhecidas, como é o caso das matrizes quase-dominantes [12], os resultados dos capítulos subsequentes podem ser perfeitamente estendidos para estes tipos de matrizes.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS EM TERMOS ESTRUTURAIS

A partir dos resultados dos capítulos II e III, neste capítulo são dados os resultados de estabilidade absoluta dos sistemas do tipo (II.2) em termos estruturais, segundo a definição de estrutura utilizada no âmbito deste trabalho. Na sua maior parte os resultados apresentados neste capítulo são consequência direta dos resultados dos capítulos II e III.

Do ponto de vista estrutural são considerados com maior ênfase os sistemas do tipo Lur'e-Postnikov, dado a importância que apresentam no estudo de sistemas de controle não-lineares [2], [51], [65].

Na parte final do capítulo, utilizando a abordagem estrutural proposta, são analisados exemplos classicamente abordados pelo método de "sistemas interconectados" que geralmente utiliza funções de Lyapunov vetoriais para análise de estabilidade [6], [14], [73], [96]. Mostra-se que no caso de sistemas interconectados também é importante a consideração das propriedades estruturais do sistema, posto que, a partir de considerações sobre a estrutura dos sistemas, consegue-se obter condições de estabilidade sensivelmente menos conservativas do que aquelas obtidas pelos métodos usualmente conhecidos.

IV.1 - RESULTADOS ESTRUTURAIS RELATIVOS AOS SISTEMAS DO TIPO (II.2).

Nesta seção são apresentados alguns resultados de estabilidade absoluta considerados importantes em termos estruturais e também pelo fato de caracterizarem a filosofia que norteia a análise de estabilidade de sistemas não-lineares em termos estruturais, a qual basicamente busca a obtenção de condições algébricas ligadas à estrutura e relativamente simples de serem testadas.

Combinando os resultados dos capítulos II e III podemos enunciar uma série de resultados estruturais deles decorrente, todavia cremos que um estudo exaustivo neste sentido estaria fora dos limites deste trabalho. Nos ateremos com maior detalhe aos resultados estruturais relativos aos sistemas tipo Lur'e que são tratadas na seção seguinte.

Considerando os sistemas de estrutura fortemente conexa, ou seja, sistemas não decomponíveis (vide seção III.1) e em particular sistemas com estrutura acíclica-3 (cf. Definição III.11), podemos enunciar os resultados abaixo:

Teorema IV.1a: Se o sistema (II.5) tem "estrutura sign stable" ($R = (r_{ij})$ é sign stable com diagonal estritamente negativa) então o equilíbrio $\underline{x} = 0$ é absolutamente estável A_∞ .

Prova: Decorrencia do Corolário II.1 e Corolário III.4, pois neste caso $R \in \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}$.

Teorema IV.1b: Se o sistema (II.12) tem estrutura "sign stable" ($A = (a_{ij})$ sign stable com diagonal estritamente negativa) então o equilíbrio $\underline{x} = 0$ é absolutamente estável A_∞ .

Prova: Decorrencia do Teorema II.6 e Corolário III.4, pois como no Teorema anterior $A \in \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}$.

Teorema IV.1c: Se o sistema (II.14) tem estrutura "sign stable" ($C = (A_0 + D)$ sign stable com diagonal estritamente negativa) então o equilíbrio $\underline{x} = 0$ é absolutamente estável A_∞ .

Prova: Decorrencia do Teorema II.7 e Corolário III.4, pois neste caso $C \in \mathcal{D}_2$.

Sobre os resultados acima cabe ressaltar os seguintes pontos:

- (a) a condição imposta sobre as estruturas dos sistemas (II.5) (II.12) e (II.14) de modo que estas tenham diagonais estritamente negativas, conjecturamos que poderá ser relaxada utilizando-se o Teorema de LaSalle (Teorema II.4), visto que neste caso as derivadas temporais das funções de Lyapunov utilizadas passariam a ser apenas semi-definidas negativas (isto é feito no caso do Exemplo IV.2).

(b) sobre a verificação da condição de estrutura sign stable, como foi mostrado na seção III.3, ela é relativamente simples de ser testada e portanto é relativamente simples identificar as classes de sistemas que satisfazem as condições dos Teoremas acima.

(c) note-se que os resultados acima têm a característica de serem puramente qualitativos, i.e.: a estabilidade absoluta é determinada a partir da "estrutura qualitativa" destes sistemas, ou seja, é determinada simplesmente a partir do digrafo "signed" do sistema ou ainda, é determinada simplesmente a partir dos sinais das interconexões entre os estados do sistema independentemente dos valores numéricos dos parâmetros, bastando que a estrutura seja "sign stable" e as não-linearidades pertençam a A_∞ . Estes resultados vem mostrar que a conjectura feita no início deste trabalho, para uma certa classe de sistemas, mostrou ser verdadeira. Realmente, para esta classe de sistemas, a estrutura qualitativa, por si só, pode determinar a estabilidade absoluta do sistema não-linear.

(d) Quirk e Ruppert [88] em seu trabalho inicial sobre "sign stability" chamaram a atenção para a dificuldade da determinação da estabilidade qualitativa de sistemas dinâmicos em termos globais. Destacamos que o Teorema IV.1 acima, constituiu-se em uma extensão dos resultados de "sign stability" para o caso de uma classe de sistemas não-lineares e em termos globais.

Com base nos resultados dos capítulos II e III podemos ainda estabelecer os seguintes resultados referentes aos sistemas (II.5), (II.12) e (II.14). Como foi estabelecido no início desta seção estamos considerando sistemas não-decomponíveis e em particular sistemas com estrutura acíclica-3 (cf. Definição III.11).

Teorema IV.2a: Se o sistema (II.5) tem estrutura acíclica-3 (R não possui ciclos de ordem k para $k \geq 3$) e satisfaz $(-1)^i \det_i(R^+) > 0$ $i = 1, 2, \dots, n$, então $\underline{x} = 0$ é absolutamente estável A_∞ .

Prova: Decorrencia do Corolário II.1 e Teorema III.4, neste caso $R \in D$.

Teorema IV.2b: Se o sistema (II.12) tem estrutura acíclica-3 e a matriz A satisfaz $(-1)^i \det_i(A^+) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ então $\underline{x} = 0$ é absolutamente estável A_∞ .

Prova: Decorrencia dos Teoremas II.6 e III.4

Teorema IV.2c: Se o sistema (II.14) tem estrutura D -anti-simétrica (C é D -anti-simétrica cf. Definição III.21) $\underline{x} = 0$ é absolutamente estável A_∞ .

Prova: Decorrencia dos Teoremas II.7 e III.15.

Sobre os resultados acima ressaltamos o seguinte:

- (i) note que o Teorema IV.2c não requer a característica acíclica do sistema II.14. Pelo Corolário III.2 podemos caracterizar as condições necessárias e suficientes (em termos de ciclos de C) para caracterizar uma estrutura D -anti-simétrica.
- (ii) os resultados acima, baseados na estrutura dos sistemas não lineares considerados, embora quantitativos são simples de serem verificados. As condições de estabilidade absoluta são puramente algébricas baseadas na verificação de características de matrizes (ou grafos).

Exemplos de utilização destes resultados encontram-se na seção IV.4 e nos capítulos subsequentes.

IV.2 - SISTEMAS TIPO LUR'E-POSTNIKOV

Nesta seção, visando a obtenção de condições de estabilidade absoluta, serão abordadas as características estruturais dos sistemas do tipo Lur'e-Postnikov [2], [51] com uma única não-linearidade, descritos pelas equações abaixo:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + bu$$

$$y = c\underline{x}$$

$$u = f(y)$$

(IV.1)

onde $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados. $A(n \times n)$, $b(n \times 1)$, $c(1 \times n)$ são matrizes constantes e $f(\cdot)$ é uma função real não-linear, sem memória, contínua, satisfazendo:

$$f(\tau) \cdot \tau > 0 \quad (\tau \neq 0); \quad f(0) = 0.$$

(condição de setor positivo infinito) (IV.2a)

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y f(\tau) d\tau = \infty \quad (\text{IV.2b})$$

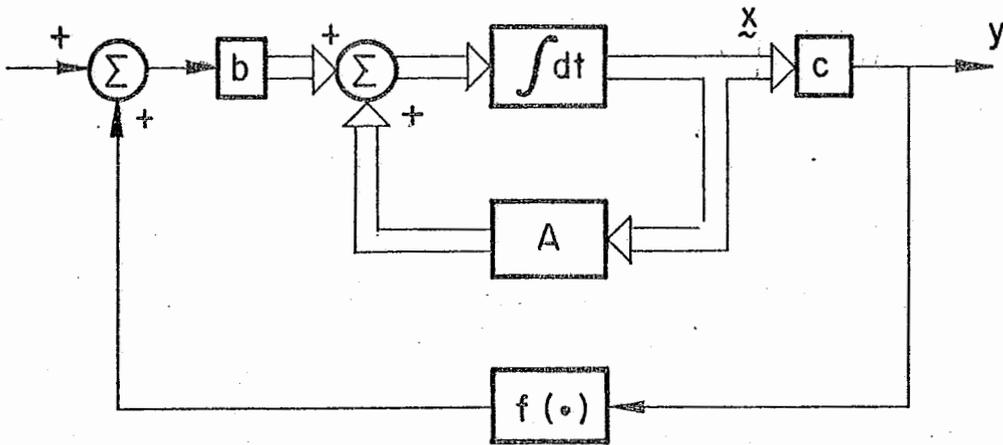


Fig. (IV.1) - Sistema do tipo Lur'e Postnikov: diagrama de blocos

Como na Definição II.7a chamaremos de A_∞ a classe de funções $f(\cdot)$ reais, contínuas, sem memória que satisfazem (IV.2a) e (IV.2b).

Diremos, como na Definição II.6b, que $\dot{x} = 0$ do sistema IV.1 é absolutamente estável A_∞ se $f(.) \in A_\infty$ for globalmente assintoticamente estável para toda $f(.) \in A_\infty$.

Na análise da estabilidade de sistemas do tipo (IV.1) pela utilização dos resultados dos capítulos precedentes e mais especificamente pela utilização de uma abordagem estrutural é necessário que o sistema IV.1 pertença a uma classe similar à dos sistemas (II.2). Todavia, como em geral este não é o caso, nos restringiremos aos sistemas do tipo (IV.1) com características particulares, como é visto a seguir. Por outro lado veremos no capítulo seguinte que o fato de sistemas do tipo (IV.1) não pertencerem à classe (II.2) pode ser apenas uma questão de representação matemática.

Considerando os sistemas do tipo (IV.1) vamos determinar condições, em termos estruturais, que assegurem estabilidade absoluta no setor positivo infinito. Para podermos utilizar funções de Lyapunov do tipo (II.7) para o sistema (IV.1) consideraremos casos particulares em que o argumento da função $f(.)$ é formado a partir de uma única variável de estado, ou seja, a matriz $c = [c_1, c_2, \dots, c_n]$ será suposta ter uma única componente não nula. Tendo em mente esta hipótese, necessitaremos ainda das seguintes definições:

Definição IV.1: Sejam $M = (m_{ij})$ e $N = (n_{ij})$ duas matrizes reais $n \times n$ tais que $m_{ij} \cdot n_{ij} \geq 0$ para todo par (i, j) . Então definiremos a operação "*" entre as matrizes M e N dada por $[M * N] = M + N$.

Definição IV.2: Dizemos que o sistema IV.1 satisfaz a "condição (*)" se e somente se a matriz $C = [A * bc]$ é definida.

Definição IV.3: Diremos que a matriz $C = [A * bc]$ determina a "estrutura do sistema (IV.1)" ou equivalentemente o digrafo associado à matriz C (cf. Definição III.4) determina a estrutura do sistema (IV.1).

Obs: Note-se que a condição (*) é uma condição que assegura estarmos somando funções contidas no mesmo setor infinito, positivo ou negativo. Resultando esta operação em uma nova função também contida no setor infinito positivo ou negativo respectivamente.

Serão tratados sistemas (IV.1) nos quais a matriz $[A * bc]$ tem características estruturais peculiares. Tal qual na seção IV.1 não será feito um estudo exaustivo das estruturas que favorecem a estabilidade absoluta de (IV.1); ater-nos-emos a alguns casos considerados mais importantes e que mostram como a consideração da estrutura auxilia na obtenção de resultados de estabilidade absoluta. Novamente, assim como na seção anterior, os casos mais importantes estarão relacionados a sistemas não decomponíveis e com estrutura acíclica-3 (cf. Definição III.1).

Consideramos ainda (sem perda de generalidade) que a matriz $[A * bc]$ tem a mesma estrutura da matriz A , ou em outras palavras, a operação (*) não introduz novos arcos ao digrafo associado à matriz A . Esta condição no entanto não é as-

sencial e pode ser relaxada na maioria dos casos tratados. Dado este fato, por vezes no referiremos indistintamente às propriedades estruturais da matriz A , assim como às propriedades estruturais da matriz $C = [A * bc]$. Assumimos ainda que a matriz $A = (a_{ij})$ tem diagonal estritamente negativa.

Nestes termos, dentre as possibilidades que se pode encontrar para as características estruturais do sistema (IV.1), foram tratados os seguintes casos referentes às matrizes $A = (a_{ij})$, $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]'$ e $c = [c_1, c_2, \dots, c_n]$:

Caso I: $b_k \neq 0$, $c_k \neq 0$ para um dado k , $1 \leq k \leq n$; $b_j = c_j = 0$ para todo $j \neq k$. Neste caso temos:

Teorema IV.3: No caso I, $\underline{x} = 0$ é absolutamente estável A_∞ se o sistema (IV.1) é tal que:

(i) satisfaz a condição (*)

(ii) A tem estrutura favorável ($A \in \mathcal{D}$).

Prova: Utilizando a função de Lyapunov quadrática $V(\underline{x}) = \underline{x}'P\underline{x}$ onde $PA + A'P = -Q < 0$ com $P = \text{diag}[P_1, P_2, \dots, P_n] > 0$ (cond. (ii)), neste caso:

$$\dot{V}(\underline{x}) = 2\underline{x}'P[A\underline{x} + bf(c\underline{x})]$$

$$\dot{V}(\underline{x}) = \underline{x}'(PA+A'P)\underline{x} + 2p_k \cdot b_k \cdot f(c_k x_k) \cdot x_k < 0 \quad (\text{defini-$$

da negativa)

Obs: O resultado acima pode ser generalizado para o caso de várias não-linearidades (vide Teorema IV.7).

Para os casos em que a matriz $A = (a_{ij})$ é indecomponível e tem todos elementos diagonais negativos, podemos enunciar os seguintes Corolários do Teorema acima:

Corolário IV.1: No caso I, $\underline{x} = 0$ é absolutamente estável A_∞ se o sistema (IV.1) é tal que:

(i) satisfaz a condição (*)

(ii) tem estrutura sign stable

Prova: Se A é sign stable, pelo Corolário III.4 $A \in \mathcal{D}_2$ e a estabilidade absoluta pode ser demonstrada a partir da função de Lyapunov quadrática como no Teorema IV.3.

Obs: No caso específico em que a matriz é Jacobi sign stable, a função de Lyapunov que neste caso garante a estabilidade absoluta A_∞ do sistema (IV.1) é dada por:

$$V(\underline{x}) = \underline{x}' P \underline{x}$$

onde: $P = \text{diag}[p_1, p_2, \dots, p_n]$

$$p_1 = 1, p_k = (-1)^{k-1} \prod_{i=2}^k \frac{a_{i-1,i}}{a_{i,i-1}} \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

Corolário IV.2: No caso I, $\underline{x} = 0$ é absolutamente estável A_∞ se o sistema (IV.1) é tal que:

- (i) satisfaz a condição (*)
- (ii) tem estrutura acíclica-3
- (iii) $(-1)^i \det_i(A^+) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Prova: Consequência do Teorema IV.2 e Teorema III.4

Interpretando os resultados do Caso I podemos concluir que: desde que a matriz A do sistema (IV.1) tenha "estrutura favorável" e a realimentação da não-linearidade $f(\cdot)$ é feita na "posição diagonal", satisfazendo a condição (*), o sistema será absolutamente estável A_∞ . Veremos que este fato também se verifica para o caso de várias não-linearidades (Teorema IV.7); mostra-se que nestes casos é possível estabelecer a conexão entre o conceito de sistema de estrutura favorável com os conceitos de sistemas passivos e hiperestáveis (vide seção V.4).

Caso II: $c_k \neq 0$ e a matriz b tem elementos $b_\ell \neq 0$ onde $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\ell \neq k$.

Neste caso, em geral, o procedimento básico para uma análise estrutural é o seguinte:

- (i) a partir do sistema (IV.1) definem-se as funções $\phi_j(x_j) =$

$a_{lj}x_j + b_l f(c_j x_j)$ e procura-se recair em sistemas do tipo (II.5), (II.12), (II.13) ou (II.14).

(ii) a partir das características da matriz $[A * bc]$ ou do digrafo a ela associado, procura-se determinar condições de estabilidade absoluta utilizando os resultados dos capítulos II e III.

Tal procedimento é mostrado a seguir no caso de sistemas do tipo (IV.1) com estrutura não decomponível.

O Caso II consideraremos como sendo subdividido em diferentes sub-casos:

Caso IIa: A matriz $C = (c_{ij}) = [A * bc]$ é tal que:

II.a1: $c_{l,k}$ e $c_{k,l}$ são os únicos elementos não nulos fora da diagonal principal na coluna e linha k respectivamente.

II.a2: $c_{k,l}$ e $c_{l,k}$ são os únicos elementos não nulos fora da diagonal principal na coluna e linha l respectivamente.

Caso IIb: Engloba os casos relativos ao Caso II e que não se enquadram no Caso IIa.

Obs. 1: ao índice k corresponde a componente c_k de c tal que $c_k \neq 0$ e os índices l correspondem às componentes b_l de b tais que $b_l \neq 0$.

Obs. 2: note que o caso I é um caso particular do Caso II.

Neste ponto é conveniente introduzirmos as seguintes definições.

Definição IV.4: Dizemos que x_r , $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, é um "estado terminal" do sistema (IV.1) se e somente se no digrafo (fortemente conexo) associado à matriz A (ou $[A * bc]$), conforme as Definições II.8 e III.4, a x_r corresponde um nó que está conectado a um único estado (nó) x_s ($s \neq r$) deste digrafo.

Definição IV.5: Dizemos a partir da Definição acima que neste caso os arcos (x_r, x_s) ou (x_s, x_r) são arcos terminais do digrafo associado ao sistema (IV.1).

No caso II.a, analisando a estrutura do sistema, a matriz $[A * bc]$ corresponde um digrafo tal que o estado x_k (ou x_l) é um estado terminal e a não-linearidade está associada a um dos ramos terminais correspondentes, como mostra a figura IV.2.

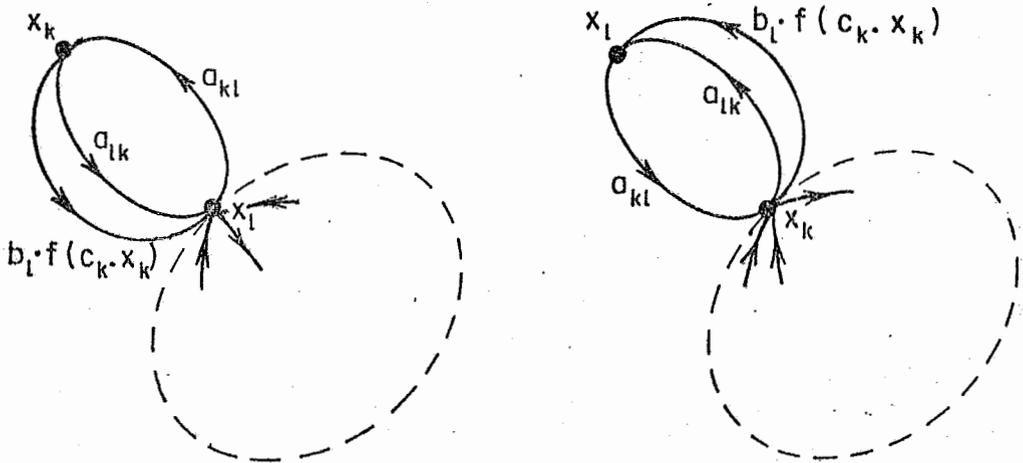


Figura IV.2 - Sistemas de estrutura equivalente (Caso IIa)

Evidentemente o sistema (IV.1) pode ter uma estrutura tal que não apresente estados terminais. Todavia no caso de sistemas com estrutura acíclica (para $n \geq 2$) ao menos dois estados terminais necessariamente existem.

Para considerarmos o problema no Caso IIa, primeiramente vamos mostrar que os Casos II.a1 e II.a2 são equivalentes do seguinte ponto de vista: se mostrarmos a estabilidade absoluta no Caso II.a1 isto implica na estabilidade absoluta no Caso II.a2 e vice-versa.

Considerando que existe ao menos um estado terminal x_k ligado a um estado x_ℓ do sistema (IV.1), (aos quais está associada a não-linearidade $f(c_k x_k)$). Podemos a partir de uma transformação de similaridade, dada por uma matriz de permutação P , encontrar uma representação para o sistema (IV.1) tal que $\bar{x} = Px$; $\bar{A} = PAP'$; $\bar{b} = Pb$; $\bar{c} = cP'$ na qual, ao estado x_k corresponde o estado \bar{x}_1 e ao estado x_ℓ corresponde o estado \bar{x}_2 ; o que corresponde a renumerar as variáveis de estado do sistema (ou reindexar os nós do digrafo).

A partir desta transformação chegamos ao sistema

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{b}f(y) \\ y &= \bar{c}\bar{x} \end{aligned} \tag{IV.3}$$

onde:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{kk} & a_{kl} & 0 & \dots & 0 \\ a_{lk} & a_{ll} & a_{l3} & & a_{ln} \\ 0 & a_{3l} & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n,l} & \dots & & a_{n,n} \end{bmatrix}; \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \bar{c}' = \begin{bmatrix} c_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

\bar{A} é uma matriz indecomponível e $b_l, c_k \neq 0$; o sistema (IV.3) corresponde ao Caso II.a1.

O mesmo procedimento nos levaria ao Caso II.a2 caso renumerássemos as variáveis de modo que a x_l e x_k fizessemos corresponder \bar{x}_1 e \bar{x}_2 respectivamente obtendo o sistema (IV.3) com $\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}'$ dadas por:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{l,l} & a_{lk} & 0 & \dots & 0 \\ a_{kl} & a_{kk} & a_{k3} & & a_{kn} \\ 0 & a_{3k} & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{nk} & \dots & & a_{nn} \end{bmatrix}; \bar{b} = \begin{bmatrix} b_l \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \bar{c}' = \begin{bmatrix} 0 \\ c_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(IV.4)

Computando a função de transferência da parte linear do sistema, $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ (cf. V.3) teremos:

$$\text{no Caso (II.a1): } G_1(s) = c_k b_{\ell} a_{\ell k} \frac{\det(sI_{n-2} - A_{\ell k})}{\det(sI_n - A)}$$

e

$$\text{no Caso (II.a2): } G_2(s) = c_k b_{\ell} a_{\ell k} \frac{\det(sI_{n-2} - A_{\ell k})}{\det(sI_n - A)}$$

onde $A_{\ell k}$ é a matriz obtida a partir da matriz A suprimindo-se as linhas e colunas correspondentes aos índices ℓ e k . Portanto $G_1(s) = G_2(s)$, donde conclui-se que os casos II.a1 e II.a2 são equivalentes para efeito de estabilidade, ou seja, se II.a1 for estável II.a2 também será e vice-versa.

Tomemos (sem perda de generalidade) o caso II.a1 em que arbitramos $k = 1$ e $\ell = 2$. A partir disto podemos demonstrar os seguintes resultados:

Teorema IV.4: No Caso II.a, $x = 0$ é absolutamente estável A_{∞} se o sistema (IV.1) é tal que:

(i) satisfaz a condição (*)

(ii) $A \in \mathcal{D}$ com $a_{12} \cdot a_{21} < 0$

Prova: Tomando-se a função de Lyapunov

$$V(\underline{x}) = \frac{1}{2} \underline{x}' P \underline{x} + \alpha \int_0^y f(\tau) d\tau$$

onde: $P > 0$, $P = \text{diag}[p_1, p_2, \dots, p_n]$ tal que

$$PA + A'P = -Q < 0 \quad (A \in \mathcal{D})$$

e

$$\alpha = - \frac{p_2}{a_{12}} \cdot \frac{b_2}{c_1}$$

pela condição (*), $\text{sgn } b_2 c_1 = \text{sgn } a_{21}$ e como $\text{sgn } a_{12} = -\text{sgn } a_{21}$ teremos $\alpha > 0$. Neste caso:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\underline{x}) &= \underline{x}' P [A \underline{x} + b f(c \underline{x})] + \alpha c_1 f(c_1 x_1) a_{11} x_1 + \alpha c_1 f(c_1 x_1) a_{12} x_2 \\ &= \frac{1}{2} \underline{x}' (PA + A'P) \underline{x} + \alpha \cdot a_{11} f(c_1 x_1) (c_1 x_1) < 0 \end{aligned}$$

Note-se que caso tivéssemos a matriz $b = [b_1, b_2, 0, \dots]$; $b_1, b_2 \neq 0$, a mesma função de Lyapunov poderia ser utilizada para demonstrar a estabilidade absoluta neste caso.

Corolário IV.3: No Caso II.a, $\underline{x} = 0$ é absolutamente estável A_∞ se o sistema (IV.1) é tal que:

(i) satisfaz a condição. (*)

(ii) tem estrutura acíclica-3.

(iii) $a_{12}a_{21} < 0$

(iv) $(-1)^i \det_i(A^+) > 0$, $i = 3, 4, \dots, n$.

Prova: Consequência do Teorema IV.4 e Teorema III.4

Corolário IV.4: No Caso II.a, $\underline{x} = 0$ é absolutamente estável A_∞ se o sistema (IV.1):

(i) satisfaz a condição (*)

(ii) tem estrutura "sign stable"

Prova: Dado que o sistema tem estrutura sign stable, isto implica nas condições (ii), (iii) e (iv) do Corolário IV.3 e a prova decorre diretamente do Corolário IV.3.

Caso o sistema apresente uma estrutura Jacobi sign stable a seguinte função de Lyapunov pode ser utilizada para demonstrar a estabilidade absoluta A_∞ :

$$V(\underline{x}) = \underline{x}' P \underline{x} + \frac{2c_1^{-2}}{-\text{sgn}a_{12}} \int_0^y [a_{21}\tau + b_2c_1f(\tau)] d\tau$$

onde

$$P = \text{diag}[p_1, p_2, \dots, p_n]$$

$$\text{com } p_1 = 0, p_2 = \frac{a_{12}}{\text{sgna}_{12}}; p_k = (-1)^k p_2 \cdot \prod_{i=3}^k \frac{a_{i-1,i}}{a_{i,i-1}}$$

Obs: Observe-se o caráter puramente qualitativo do Corolário IV.4 acima.

Interpretando intuitivamente os resultados do caso II.a podemos resumí-los no seguinte: "Desde que a matriz A (ou $(A * bc)$) ou o digrafo a ela associado tem estrutura favorável e a não-linearidade $f(\cdot)$ esta localizada em um "arco terminal" do digrafo, o sistema (IV.1) será absolutamente estável A_∞ . Analisando-se uma série de exemplos mais gerais em que o mesmo resultado se verifica (Exemplo IV.3), podemos fazer a seguinte conjectura para o caso de várias não-linearidades: "Desde que a matriz A (ou $[A * BC]$) tem estrutura favorável e as não-linearidades se localizam nos arcos terminais do digrafo associado podemos garantir a estabilidade absoluta A_∞ do sistema".

No Caso II.b, dado que a estrutura da matriz $[A * bc]$ é tal que a não-linearidade não estará necessariamente associada a um ramo terminal do sistema, (como exemplifica o sistema (IV.5) abaixo) será necessário (em geral) introduzir uma condição adicional sobre o sistema (IV.1) para derivarmos resultados de estabilidade absoluta utilizando funções de Lyapunov do tipo Lur'e "diagonais". Esta condição chamamos de "condição de proporcionalidade" definida mais abaixo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & \dots & \dots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots \\ \vdots & a_{42} & \vdots & a_{44} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad f(y) \quad (\text{IV.5})$$

$$y = [0, 0, c_3, 0, \dots, 0] \underline{x}$$

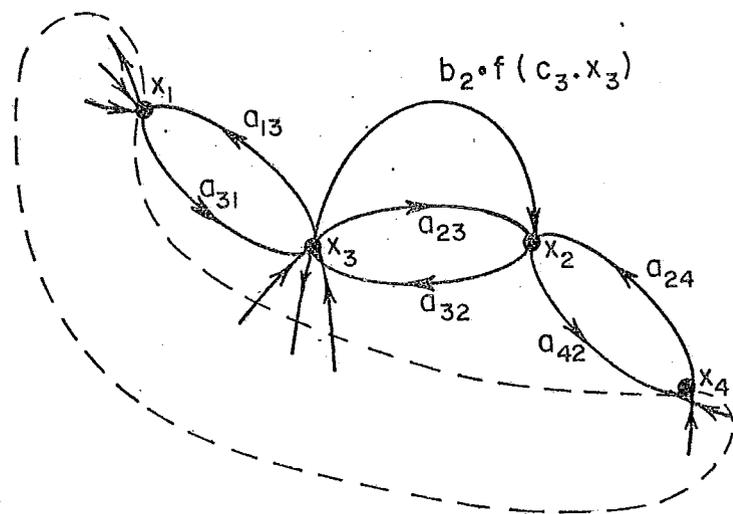


Figura IV.3 - Um exemplo relativo ao Caso II.b; sistema do tipo IV.1

Considerando que a condição (*) se verifica, definimos as funções $a_{jk} \cdot \phi_{jk}(\cdot)$, para todo par (j, k), tal que:

$$\alpha_{jk} \cdot \phi_{jk}(x_k) = [a_{jk}x_k + b_j f(c_k x_k)]$$

onde $\alpha_{jk} = \text{sgn}(a_{jk})$; nestes termos temos que $\phi_{jk}(x_k) \cdot x_k > 0$ e podemos colocar o sistema na forma (II.2) satisfazendo as condições (II.3a) e (II.3b).

Definição IV.6: Diremos que o sistema (IV.1) no Caso Iib satisfaz a "condição de proporcionalidade" se para todo $x_k \neq 0$ as funções $\phi_{jk}(\cdot)$ satisfazem

$$\frac{\phi_{sk}(x_k)}{\phi_{rk}(x_k)} = \beta_{sr} \text{ (constantes) para todo} \\ \text{par } (s,r) (r \neq s) . \quad (\text{IV.6})$$

$$\text{ou } \phi_{sk}(x_k) = \beta_{sr} \cdot \phi_{rk}(x_k)$$

Considerando um sistema (IV.1) que verifica a "condição de proporcionalidade" podemos reescrevê-lo na forma

$$\dot{\underline{x}} = \tilde{A} \underline{\phi}(\underline{x}) + \tilde{D} \underline{f}(\underline{x}) \quad (\text{IV.7})$$

onde

$$\underline{\phi}(\underline{x}) = [x_1, x_2, \dots, \phi_{rk}(x_k), \dots, x_n]^T$$

$$\underline{f}(\underline{x}) = [x_1, x_2, \dots, \phi_{kk}(x_k), \dots, x_n]^T$$

$$(1 \leq k \leq n)$$

$$\hat{D} = \text{diag}[a_{11}, a_{22}, \dots, \alpha_{kk}, \dots, a_{nn}] \quad (1 \leq r \leq n; r \neq k)$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & \alpha_{1,k} \beta_{1,r} & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha_{rk} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \alpha_{nk} \cdot \beta_{nr} & 0 \end{bmatrix}; \quad \phi(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ \vdots \\ \phi_{rk}(x_k) \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Neste caso podemos enunciar o seguinte:

Teorema IV.5: No caso II.b, $\underline{x} = 0$ é absolutamente estável A_∞ se o sistema (IV.1) é tal que:

- (i) satisfaz a condição (*)
- (ii) satisfaz a condição de proporcionalidade
- (iii) $(\bar{A} + \hat{D}) \in \mathcal{D}_2$

Prova: Utilizando o Teorema II.7 e a função de Lyapunov:

$$V(\underline{x}) = \frac{1}{2} \underline{x}' \bar{P} \underline{x} + P_k \int_0^{x_k} \phi_{rk}(\tau) d\tau$$

onde:

$$\widehat{P} = \text{diag}[p_1, p_2, \dots, p_{k-1}, 0, p_{k+1}, \dots, p_n]$$

$$P = \text{diag}[p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_n]$$

Neste caso:

$$\dot{V}(\underline{x}) = \underline{\phi}'(\underline{x}) P [\widehat{A} \underline{\phi}(\underline{x}) + \widehat{D} \underline{f}(\underline{x})]$$

$$\dot{V}(\underline{x}) = \underline{\phi}'(\underline{x}) (P\widehat{A} + \widehat{A}'P) \underline{\phi}(\underline{x}) + \underline{\phi}'(\underline{x}) P\widehat{D} \underline{f}(\underline{x})$$

$$\dot{V}(\underline{x}) = \underline{\phi}'(\underline{x}) Q \underline{\phi}(\underline{x}) + \underline{\phi}(\underline{x}) P\widehat{D} \underline{f}(\underline{x})$$

onde $Q = 0$ e portanto $\dot{V}(\underline{x}) < 0$

Corolário IV.5: No caso II.b, $\underline{x} = 0$ é absolutamente estável A_∞ se o sistema (IV.1) é tal que:

(i) satisfaz a condição (*)

(ii) satisfaz a condição de proporcionalidade

(iii) $(\widehat{A} + \widehat{D})$ tem estrutura sign stable

Prova: Como pelo Corolário III.4 a condição (iii) acima implica na condição (iii) do Teorema IV.5, a prova decorre deste fato. ●

No caso particular em que a matriz A do sistema (IV.1) é uma matriz Jacobi irredutível, (caso tratado no capítulo seguinte visando condições de realizabilidade nesta estrutura) o caso II.b pode ser caracterizado pelas seguintes condições sobre as matrizes b e c do sistema; i.e., $c_k \neq 0$ e $b_i = 0$ para todo $i > k + 1$ ou $i < k - 1$; para um dado k , tal que $2 \leq k \leq n-1$. Definindo

$$\alpha_{k+i} \cdot [a_{k+i,k} \cdot x_k + b_{k+i} \cdot f(c_k x_k)] = \tilde{f}_{k+i,k}(x_k)$$

$$i = (-1, 0, +1)$$

onde $\alpha_{k+i} = \text{sgn}(a_{k+i})$

Se a condição (*) é verificada temos que $\tilde{f}_{k+i,k}(x_k) x_k > 0$ para $x_k \neq 0$; $i = -1, 0, +1$, e assumindo que a condição de proporcionalidade se verifica temos:

$$\tilde{f}_{k-1,k}(x_k) = \beta_k \cdot \tilde{f}_{k+1,k}(x_k), \text{ com } \beta_k > 0; 2 \leq k \leq n-1.$$

A partir daí podemos enunciar o seguinte:

Corolário IV.6: No caso II.b, $\underline{x} = 0$ é absolutamente estável A_∞ se o sistema (IV.1) é tal que:

- (i) satisfaz a condição (*)
- (ii) satisfaz a condição de proporcionalidade

(iii) $[A * bc]$ é Jacobi sign stable.

Prova: Utilizando a função de Lyapunov

$$V(\underline{x}) = \underline{x}' P \underline{x} + 2P_k \int_0^{x_k} \tilde{f}_{k-1,k}(\tau) d\tau$$

onde

$$P_1 = 1; P_\ell = (-1)^{\ell-1} \prod_{i=2}^{\ell} \frac{\delta_{i-1,i}}{\delta_{i,i-1}} \quad (\ell = 2, \dots, n)$$

$\delta_{ij} = -\text{sgn } a_{ji}$ para $i \neq j$ e $j \neq k$; caso contrário $\delta_{ij} = a_{ij}$.

$$P = \text{diag}(1, P_2, \dots, P_{k-1}, 0, \beta_k \cdot P_{k+1}, \beta_k \cdot P_{k+2}, \dots, \beta_k \cdot P_n).$$

A condição adicional introduzida para obtenção de resultados de estabilidade absoluta no caso II.b, ou seja, a "condição de proporcionalidade" poderá a princípio parecer extremamente restritiva, todavia pelas considerações que se seguem mostramos que na realidade isto não ocorre.

Tanto a "conjectura de Kalman" [49] bem como a conjectura de Aizerman [1] relativas à estabilidade assintótica global do sistema (IV.1) podem ser reformuladas para sistemas com estrutura Jacobi sign-stable. Considerando a primeira conjectura, esta pode ser reformulada nos seguintes termos:

"Se a matriz Jacobiana do sistema (IV.1) que satisfaz a condição (*) dada por

$$J(\underline{x}) = [A * b \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}(c\underline{x})\right)']$$

é uma matriz Jacobi sign stable para todo $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ então o sistema (IV.1) é globalmente assintoticamente estável".

Esta conjectura é mostrada ser falsa pelo contra-exemplo a seguir:

Exemplo IV.1: Considerando o sistema (IV.1) que tem a função de transferência da parte linear $G(s) = Y(s)/U(s)$

dada por:

$$G(s) = \frac{k(s+a)(s+c)}{[(s+b)^2 + (0,9)^2] [(s+b)^2 + (1,1)^2]}$$

com $k = 10$; $a = 0,01$; $b = 0,01$; $c = 10^{-5}$, e a não-linearidade dada por $f(y) = y^3$. Este sistema é basicamente o sistema considerado por Fitts [29].

Verifica-se que o sistema dado pela função de transferência e não-linearidade acima, pode ser representado na forma do sistema abaixo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10^{-5} & & & \\ & +1 & & \\ & & -0,02 & +10 \\ & & & & -1 \\ & & 0 & -0,01 & \\ & & & & & 1,21 & -0,01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot f(y) \quad (IV.8)$$

$$y = [0, 1, 0, 0] \underline{x}$$

que tem estrutura Jacobi sign stable.

Este sistema no entanto apresenta oscilações auto-sustentadas e portanto não é globalmente assintoticamente estável. As hipóteses da conjectura são verificadas a menos da condição de proporcionalidade que não é verificada.

Note-se que em todos os casos considerados nesta seção, algumas condições podem facilmente ser relaxadas, tais como a exigência de que a matriz $A = (a_{ij})$ tenha diagonal estritamente negativa e a exigência de que A seja indecomponível. Nestes casos os mesmos tipos de funções de Lyapunov podem ser utilizados. No caso, por exemplo, em que o sistema do tipo (IV.1) é tal que A é decomponível e não tem diagonal estritamente negativa podemos ilustrar a afirmativa acima com o exemplo a seguir:

Exemplo IV.2: A equação abaixo representa um sistema de potência: uma máquina com governador de velocidade $|^{80}|$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -D & -1 \\ 0 & g & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot f(y) \quad (\text{IV.9})$$

$$y = [1, 0, 0] \underline{x}$$

onde: D, g, a são constantes positivas e $f(y) = -P_i(1 - \cos y) + \sqrt{1 - P_i^2} \sin y$; $P_i < 1$ (constante).

Por inspeção, identificamos que o sistema apresenta explicitamente uma estrutura Jacobi sign stable indecomponível, ou seja, a matriz $[A * bc]$ é Jacobi sign stable (Caso IV.a). Neste Caso A é decomponível e $a_{11} = 0$. Outro aspecto é o fato de que $f(\cdot)$ não está inteiramente contida no setor positivo infinito.

Considerando apenas o intervalo em que $f(\cdot)$ satisfaz a condição de setor positivo infinito podemos determinar imediatamente a função de Lyapunov referente ao Corolário IV.4 ou seja:

$$V(\underline{x}) = \underline{x}' P \underline{x} + 2 \int_0^y f(\tau) d\tau \quad (\text{IV.10})$$

onde $P = \text{diag}(0, 1, g^{-1})$, e que devido a (IV.9) determina

$$\dot{V}(\underline{x}) = -2Dx_2^2 - 2ag^{-1} x_3^2 \leq 0$$

Nota-se que devido ao fato de termos $a_{11} = 0$ a derivada $\dot{V}(\underline{x})$ é uma função semi-definida negativa, todavia aplicando-se o Teorema II.4 [64] a estabilidade assintótica do sistema é assegurada.

Este exemplo ilustra o fato de que mesmo no caso em que A é decomponível e com diagonal não estritamente negativa podemos aplicar os resultados das seções precedentes, desde que $[A * bc]$ tenha estrutura favorável. Um outro aspecto importante a ser sublinhado neste exemplo é o fato de que uma vez identificada a estrutura do sistema (sign stable no caso) a determinação da função de Lyapunov é praticamente imediata.

Neste caso específico a mesma função de Lyapunov (IV.10) foi obtida em [80] a partir do método de Kalman para determinação de funções do tipo Lur'e, assim como também foi determinada por El Abiad e Nagappan [25] a partir de considerações da energia do sistema.

A determinação da função de Lyapunov, neste caso, está ligada à determinação do domínio de estabilidade da posição de equilíbrio. Este domínio pode ser determinado a partir da função de Lyapunov, juntamente com o conhecimento do intervalo $(-y_1, y_2)$, $y_i > 0$, $i = 1, 2$, no qual a função $f(\cdot)$ está in-

teiramente contida no setor positivo. Este domínio é do tipo $\hat{D} = \{\underline{x} | V(\underline{x}) \leq b\}$ onde $b > 0$ é uma constante.

Procedendo-se a uma comparação em termos da região \hat{D} determinada pela função (IV.10) podemos dizer que ela é mais conservativa do que aquelas determinadas para o mesmo sistema por outros métodos ^[112].

Todavia desejamos enfatizar que a maneira direta com que foi obtida é importante quando considerações baseadas na energia do sistema são incapazes de conduzir a uma função de Lyapunov, como é o caso de sistemas de geração em que governadores de ordem mais elevada são utilizados ^[112].

A seguir consideraremos sistemas do tipo (IV.1) nos quais as matrizes b e c não são necessariamente matrizes colunas. Alguns resultados, para casos particulares, podem ser obtidos a partir de funções de Lyapunov do tipo "diagonal", todavia cremos que o caso multi-não-linearidades deverá ser investigado com maior profundidade, com vistas a obtenção de resultados mais gerais em termos da estrutura do sistema.

Seja o sistema

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}_1 + D\underline{u}_2$$

$$\underline{u}_1 = \underline{f}(\underline{y})$$

(IV.11)

$$\underline{u}_2 = \underline{\phi}(\underline{y})$$

$$\underline{y} = C\underline{x}$$

onde A , B , C são matrizes reais ($n \times n$) (C sem nenhuma linha nula).

$$\underline{f}'(\underline{y}) = [f_1(y_1), f_2(y_2), \dots, f_n(y_n)]$$

$$\underline{\phi}'(\underline{y}) = [\phi_1(y_1), \phi_2(y_2), \dots, \phi_n(y_n)]$$

com $\phi_i(\cdot)$, $f_i(\cdot)$, satisfazendo as condições (IV.2a) e (IV.2b) para $i = 1, 2, \dots, n$.

O sistema (IV.11) pode ser esquematizado pelo diagrama de blocos abaixo

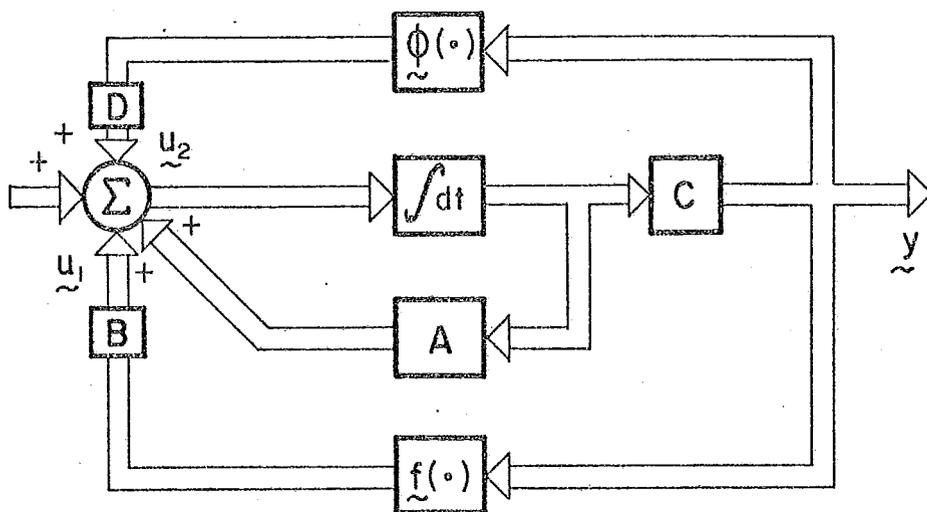


Figura IV.4 - Sistema (IV.11): Diagrama de blocos

Para o sistema (IV.11) consideraremos, a partir das características das matrizes A, B, C, D, os seguintes casos particulares:

(Caso (a): $A = D = 0$)

Teorema IV.6: O ponto de equilíbrio $\underline{x} = 0$ do sistema (IV.11) é absolutamente estável A_∞ se a matriz $CB \in \mathcal{D}$.

Prova: Análoga à prova do Teorema II.5, neste caso utilizando a função de Lyapunov:

$$V(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \int_0^{y_i} f_i(\tau) d\tau$$

$$\dot{V}(\underline{x}) = \underline{f}'(\underline{y}) MCB \underline{f}(\underline{y}); M = \text{diag}(m_i)$$

$$\dot{V}(\underline{x}) = \frac{1}{2} \underline{f}'(\underline{y}) [M(CB) + (CB)'M] \underline{f}(\underline{y})$$

Se $CB \in \mathcal{D}$ então existe $M = \text{diag}(m_i) > 0$ tal que $M(CB) + (CB)'M = -Q < 0$ e portanto $\dot{V}(\underline{x}) < 0$ e como $\lim_{\|\underline{x}\| \rightarrow \infty} V(\underline{x}) = \infty$, o ponto de

equilíbrio $\underline{x} = 0$ do sistema é absolutamente estável A_∞ .

(Caso (b): $A = 0$; C, D Diagonais)

Corolário IV.7: O ponto de equilíbrio $\underline{x} = 0$ do sistema (IV.11) é absolutamente estável A_∞ se $CB \in \mathcal{D}$ e $CD \leq 0$.

Prova: Utilizando a mesma função de Lyapunov do Teorema IV.6

$$V(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n m_i \int_0^{y_i} f_i(\tau) d\tau$$

$$\dot{V}(\underline{x}) = \frac{1}{2} \underline{f}'(\underline{y}) [M(CB) + (CB)'M] \underline{f}(\underline{y}) + \underline{f}'(\underline{y}) M C D \underline{\phi}(\underline{y}); M = \text{diag}(m_i)$$

com os mesmos argumentos da prova do Teorema IV.6 $\dot{V}(\underline{x}) < 0$

(Caso (c): D = 0; B, C diagonais)

Teorema IV.7: O ponto de equilíbrio $\underline{x} = 0$ do sistema (IV.11) é absolutamente estável A_∞ se $A \in \mathcal{D}$ e $BC \leq 0$.

Prova: Utilizando $V(\underline{x}) = \underline{x}' P \underline{x}$

$$\dot{V}(\underline{x}) = 2 \underline{x}' P (A \underline{x} + B f(\underline{y}))$$

$$\dot{V}(\underline{x}) = \underline{x}' (PA + A'P) \underline{x} + 2 \underline{x}' PB \underline{f}(\underline{y})$$

Como $A \in \mathcal{D}$ existe $P > 0$, P diagonal tal que $PA + A'P = -Q < 0$ o que juntamente com $BC \leq 0$ implica em que $\dot{V}(\underline{x}) < 0$; a divergência de $V(\underline{x})$ neste caso é imediata

Obs. 1: Note que o Teorema acima é uma generalização do Caso I (Teorema IV.3) referente ao sistema Lur'e-Postnikov (IV.1), ou seja, todas as não-linearidades realimentadas na "posição diagonal".

Obs. 2: Neste caso a parte linear do sistema (IV.11) é dada por

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B u_1$$

$$\underline{y} = C\underline{x}$$

e se tivermos $BC < 0$, pode ser conjecturado que no caso, o sistema (IV.11) é um sistema passivo (vide seção V.4).

Obs. 3: Ao se considerar sistemas do tipo (IV.11) o conceito de estrutura deverá ser reformulado, deverá estar provavelmente relacionado às matrizes CA, CB e CD.

Obs. 4: No caso do sistema (IV.11) com várias não-linearidades, evidentemente não é necessário que as matrizes B e C sejam quadradas (nxn), resultados com B e C retangulares estão sendo investigados do ponto de vista estrutural. O exemplo IV.3 recai neste caso pois pode ser colocado na forma

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B f(\underline{y})$$

$$\underline{y} = C\underline{x}$$

$$\text{onde } A = \begin{bmatrix} -a_{21}^1 & -a_{12}^1 & & \\ a_{21}^1 & -a_{22}^1 & k_{12} & \\ & -k_{21} & -a_{11}^2 & a_{12}^2 \\ & & -a_{21}^2 & -a_{22}^2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2^1 & 0 \\ 0 & b_1^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2^2 \end{bmatrix}; \underline{f}(\underline{y}) = \begin{bmatrix} f_1(y_1) \\ f_2(y_2) \end{bmatrix}$$

O sistema acima, com a_{ij}^k , b_i^k , c_i^k todos positivos, apresenta um tipo de estrutura favorável como é mostrado na seção seguinte.

IV.3 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS BASEADOS NA ABORDAGEM ESTRUTURAL COM RESULTADOS DO MÉTODO DE SISTEMAS INTERCONECTADOS: EXEMPLOS

Nesta seção, utilizando a abordagem estrutural proposta neste trabalho, são analisados alguns exemplos que comumente são abordados pelo "método de sistemas interconectados" [6], [8], [74] visando mostrar que a consideração das propriedades estruturais dos sistemas pode conduzir a resultados menos restritivos do que aqueles obtidos a partir de métodos que não têm em conta a estrutura do sistema.

Ativemo-nos especificamente ao "método de sistemas interconectados" (Composite Systems Approach) para fazer esta comparação: entendemos por "método de sistemas interconectados" a abordagem que estuda a estabilidade de sistemas dinâmicos (não-lineares) de grande porte e que baseia-se na sequência de procedimento sumariada abaixo ^[6], ^[72], ^[96]:

- (a) o sistema de grande porte é particionado em vários sub-sistemas.
- (b) a cada sub-sistema determina-se uma função de Lyapunov.
- (c) a partir das interconexões entre os sub-sistemas e das funções de Lyapunov de cada sub-sistema estabelece-se um sistema de referência linear.
- (d) a partir de condições de estabilidade do sistema de referência determinam-se as condições sobre as interconexões, as quais garantem a estabilidade do sistema interconectado.

Embora esta abordagem tenha variações de autor para autor ^[6], os pontos acima são os aspectos fundamentais do método.

Dado o caráter "universal" destes métodos, nota-se que a sua aplicação a certas classes de sistemas não-lineares conduz a condições muito conservativas. Por outro lado, analisando-se os mesmos sistemas e tomando-se em conta suas pro-

priedades estruturais inerentes, chega-se a resultados menos conservativos, a par do fato de que nestes casos as condições de estabilidade são comparativamente muito mais simples de serem obtidas.

Isto ocorre basicamente em três casos listados abaixo:

(Caso A): O sistema apresenta explicitamente uma estrutura "favorável" do ponto de vista da estabilidade.

(Caso B): O sistema é considerado como tendo uma estrutura favorável ligeiramente perturbada.

(Caso C): O sistema originalmente não apresenta uma estrutura favorável, todavia pode ser matematicamente representado de maneira a recair no Caso A. Neste caso dizemos que o sistema apresenta uma estrutura favorável implícita.

Consideraremos, nos casos tratados, o conceito de "estrutura favorável" dentro do contexto das definições do capítulo II.

É mostrado, nos exemplos que se seguem, que o fato de não se considerar as características estruturais de certos sistemas não-lineares, aplicando-se a eles o método de sistemas interconectados para estabelecer condições de estabilidade, pode levar a resultados muito restritivos, mormente no caso

em que estes sistemas têm explicitamente características estruturais favoráveis.

Nestes termos, para efeito de comparação, nos ativemos a três tipos de sistemas, são os três tipos considerados por Michel e Porter [7³]:

Sistemas do tipo (IL): Sistemas não-lineares com interconexões lineares:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n C_{ij} x_j \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{IV.12})$$

onde $f_i: R^{n_i} \rightarrow R^{n_i}$, $f_i(0) = 0$, $C_{ij}(n_i \times n_j)$; o sistema (IV.12) é formado por m sub-sistemas $\dot{x}_i = f_i(x_i)$ interconectados pelas matrizes C_{ij} .

Sistemas do tipo (LP): Lur'e-Postnikov

$$\dot{y} = By + cf(\sigma); \quad \sigma = d'y \quad (\text{IV.13})$$

onde $y' = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$; B , c e d são matrizes constantes, B é estável; σ é um escalar, $f(\cdot)$ é uma função real não linear.

Se B tem um auto valor real ($-\rho_n < 0$) e o par (B, d) é observável, então existe uma transformação não singular T tal que $Ty = (x_1, x_2, \dots, x_n, \sigma)'$ reduz o sistema

(IV.13) \bar{a} forma $|^{82}|$:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + b f(\sigma)$$

(IV.14)

$$\dot{\sigma} = -\rho_n \sigma - r f(\sigma) + a' \underline{x}$$

com A estável e $\underline{x} \in R^n$.

Neste caso o sistema (IV.14) \bar{e} considerado como sendo a interconexão de dois sistemas dinâmicos autônômos $|^{73}|$, $|^{82}|$:

$$(S_1) \quad \dot{\underline{x}} = A\underline{x}$$

e

$$(S_2) \quad \dot{\sigma} = -\rho_n \sigma - r f(\sigma)$$

Sistemas do tipo (INL): Sistemas lineares com interconexões não-lineares

$$\dot{\underline{x}}_i = A_i \underline{x}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n B_{ij} f_{ij}(\underline{x}_j) \quad (IV.15)$$

onde os sub-sistemas dinâmicos são lineares $\dot{\underline{x}}_i = A_i \underline{x}_i$, $\underline{x}_i \in R^{n_i}$; A_i , B_{ij} são matrizes constantes e $f_{ij}: R^{n_j} \rightarrow R^{n_i}$ são as funções não-lineares.

Para os tipos de sistemas acima serão dados exemplos dentro da classificação dos Casos A, B e C explicitados no

início desta seção.

Exemplo IV.3: (Sistema tipo IL, Caso A):

Seja o sistema interconectado S dado pela interconexão linear de dois sistemas S_1 e S_2 não-lineares do tipo Lur'e-Postnikov:

$$(S_i) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i + b_i f_i(y_i) \\ y_i &= c_i^1 x_i \end{aligned} \quad (IV.16)$$

$x_i^1 = [x_1^1, x_2^1]$, $i = 1, 2$; $f_i(\cdot)$ são funções escalares contínuas, sem memória satisfazendo:

$$0 < f_i(y_i) \cdot y_i < k_i^2 y_i \text{ para } y_i \neq 0; f(0) = 0$$

$$\text{e } \lim_{|y_i| \rightarrow \infty} \int_0^{y_i} f(\tau) d\tau = \infty$$

Assume-se ainda que os (A_i, b_i, c_i) são completamente controláveis e observáveis, sendo dados por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a_{11}^1 & -a_{12}^1 \\ a_{21}^1 & -a_{22}^1 \end{bmatrix}; \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2^1 \end{bmatrix}; \quad c_1 = \begin{bmatrix} c_1^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -a_{11}^2 & a_{12}^2 \\ -a_{21}^2 & -a_{22}^2 \end{bmatrix}; \quad b_2 = \begin{bmatrix} b_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2^2 \end{bmatrix}$$

onde todos os a_{ij}^k , b_i^k , c_i^k são positivos.

Definindo as matrizes de interconexão por:

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_{12} & 0 \end{bmatrix}; \quad C_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -k_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad k_{12}, k_{21} > 0$$

Verifica-se que, em termos estruturais, não somente cada um dos sistemas S_i , mas também o sistema interconectado S apresenta uma estrutura favorável do tipo "sign stable" (Fig. IV.5).

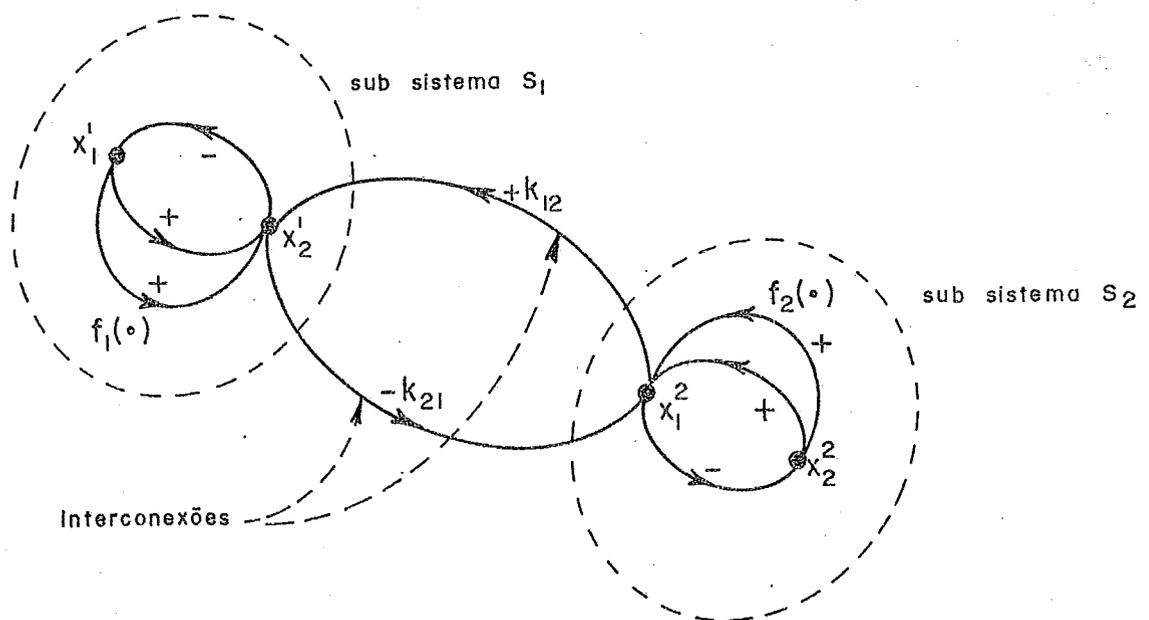


Fig. IV.5 - Estrutura qualitativa do sistema interconectado S

Pelo Corolário IV.4 cada um dos sub-sistemas S_i admite a função de Lyapunov:

$$V_i(\underline{x}_i) = \underline{x}_i^T P_i \underline{x}_i + 2q_i \int_0^{y_i} f_i(\tau) d\tau; \quad i = 1, 2 \quad (\text{IV.17})$$

onde $P_i = \text{diag}[a_{21}^i, a_{12}^i]$; $i = 1, 2$.

$$q_1 = (c_1^1)^{-1} \cdot b_2^1; \quad q_2 = (c_2^2)^{-1} \cdot b_1^2.$$

Considerando que $f_1(\cdot)$ e $f_2(\cdot)$ estão contidas em setores positivos finitos, os sub-sistemas S_1 e S_2 são globalmente exponencialmente estáveis [100].

Tomando-se qualquer um dos métodos de sistemas interconectados, embora uns levem as condições menos restritivas do que outros, sempre serão obtidos limitantes finitos para os parâmetros de interconexão k_{12} e k_{21} , [6], [96].

A razão básica para esta restrição está no fato de que a estrutura de sinais das interconexões não é considerada neste tipo de abordagem. Para efeitos ilustrativos, pelo método proposto por Michel e Porter [73], utilizando $\|A\| = (\max \lambda_i(A'A))^{1/2}$ chegaremos a seguinte relação:

$$k_{12} \cdot k_{21} < (\theta_{13} \cdot \theta_{23}) / (\theta_{14} \cdot \theta_{24}) \quad (\text{IV.18})$$

onde $\theta_{i3}, \theta_{i4}, i = 1, 2$, são tais que:

$$\dot{V}_i(\underline{x}_i) \leq \theta_{i3} \|\underline{x}_i\|; \|\nabla V_i(\underline{x}_i)\| \leq \theta_{i4} \|\underline{x}_i\|, \quad i = 1, 2$$

e os parâmetros $\theta_{i,3}$ e $\theta_{i,4}$ são obtidos a partir das características dos sub-sistemas S_i como é sugerido por Siljak [100].

A relação (IV.18) assegura a estabilidade exponencial global para o sistema S , e não é difícil concluir que a relação (IV.18) conduz a limites finitos para o produto $(k_{12} \cdot k_{21})$.

Todavia, desde que o sistema S verifica condições de estrutura relativas ao Teorema IV.1 e Corolário IV.4, conclui-se que a estabilidade exponencial global se verifica para quaisquer valores positivos de k_{12} e k_{21} , ou seja, $k_{12} \cdot k_{21} < \infty$. Isto é mostrado a partir da função de Lyapunov (do tipo utilizado no Corolário IV.4) para o sistema interconectado S , ou seja:

$$V(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \alpha_1 \cdot V_1(\underline{x}_1) + \alpha_2 \cdot V_2(\underline{x}_2) \quad (\text{IV.13})$$

$$\text{onde } \alpha_1 = 1; \alpha_2 = a_{12} \cdot k_{12} / a_{21}^2 \cdot k_{21}$$

Evidentemente o sistema S foi construído de maneira a apresentar características estruturais favoráveis, basicamente para que pudessemos aplicar o Teorema IV.1 e Corolário IV.4. O que desejamos ressaltar é que se tivéssemos aplicado os métodos de sistemas interconectados ao sistema S , sem antes investigarmos suas propriedades estruturais, teríamos chegado a condições sensivelmente mais restritivas do que aquelas que são

obtidas quando se leva em conta a estrutura do sistema.

Nos casos em que o sistema não apresenta explicitamente uma estrutura favorável, será visto mais adiante, podemos investigar a possibilidade de representá-lo sob um outro sistema de coordenadas conveniente que faz com que o sistema apresente uma estrutura favorável. Isto corresponde ao que nos referimos como sendo o caso C do início desta seção.

Exemplo IV.4 (Sistema tipo IL; Caso B)

Ainda considerando o sistema do exemplo anterior, suponhamos que as matrizes de interconexão C_{ij} sejam ligeiramente diferentes daquelas definidas no Exemplo precedente, neste caso:

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 0 & e_{12} \\ k_{12} & 0 \end{bmatrix}; \quad C_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -k_{21} \\ e_{21} & 0 \end{bmatrix}; \quad k_{12}, k_{21} > 0$$

onde $|e_{12}|$, $|e_{21}|$ são suficientemente pequenos em relação a k_{12} e k_{21} e representam ligações fracas entre os sub-sistemas S_1 e S_2 . Neste caso a mesma restrição (IV.18) obtida a partir do método proposto em [73] assegura a estabilidade exponencial global desde que $k_{12} > |e_{12}|$ e $k_{21} > |e_{21}|$.

No entanto, utilizando a função de Lyapunov

(IV.19) obtida de uma maneira relativamente simples a partir de considerações estruturais para $e_{12} = e_{21} = 0$, verifica-se que $\dot{V}(x_1, x_2)$ é negativa definida para $|e_{12}|, |e_{21}|$ suficientemente pequenos. A par disto, para um dado conjunto de parâmetros "k" e "e" mantendo-se a relação k_{12}/k_{21} constante, $\dot{V}(x_1, x_2)$ será negativa definida independente da magnitude de k_{12} e k_{21} . Este fato assegura a estabilidade exponencial global do sistema interconectado S e portanto novamente a relação (IV.18) será muito restritiva no caso em que $|e_{12}|$ e $|e_{21}|$ são suficientemente pequenos.

Exemplo IV.5 (Sistema tipo IL, Caso A)

Considerando o sistema:

$$\dot{x}_s = -\rho_s x_s + \sigma; \quad \dot{\sigma} = \sum_{s=1}^4 \beta_s x_s + r p_2 \sigma - f(\sigma); \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{IV.20})$$

onde $\rho_s, r, -p_2 > 0$; $f(0) = 0$, $\sigma \cdot f(\sigma) > 0$.

Este sistema, abordado pelo método de sistemas interconectados [82], [74] representa a dinâmica longitudinal de um aeroplano. Em ambas as referências acima o sistema (IV.20) é tratado como sendo formado pela interconexão (linear) de dois sub-sistemas (S_1) e (S_2) onde:

$$(S_1) \quad \dot{x}_s = -\rho_s x_s; \quad s = 1, 2, 3, 4.$$

$$(S_2) \quad \dot{\sigma} = r p_2 \sigma - f(\sigma)$$

(IV.21)

e $C_{12} = [1, 1, 1, 1]'$; $C_{21} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]$ são as matrizes de interconexão.

Uma condição suficiente para estabilidade, utilizando funções de Lyapunov vetoriais foi obtida por Pionkovskii e Rutkovskaya ^[82] e é dada por:

$$\sum_{i=1}^4 \xi_i^2 < \frac{1}{2} ; \xi_i = (\beta_i) / \rho_1 \rho_2 r \quad (\text{IV.22})$$

$$(\rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_3 \leq \rho_4)$$

Outra condição suficiente, menos restritiva, foi obtida por Michel e Miller ^[74] a partir de um método de sistemas interconectados que utiliza funções de Lyapunov escalares, esta condição é dada por:

$$\sum_{i=1}^4 \xi_i^2 < 1 \quad (\text{IV.23})$$

onde ξ_i é como definido em (IV.22)

Todavia, analisando-se a estrutura do sistema interconectado, verifica-se que ela possui uma característica acíclica-3 (cf. Definição III.11) pois podemos escrevê-lo na forma

$$\dot{\underline{z}} = A\underline{z} + bf(\sigma)$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} -\rho_1 & & & & 1 \\ & -\rho_2 & & 0 & 1 \\ & & -\rho_3 & & 1 \\ & 0 & & -\rho_4 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \rho_2 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.24})$$

$$\underline{z} = [x_1, x_2, x_3, x_4, \sigma]^T$$

e o digrafo associado ao sistema \bar{e} representado pela figura IV.6 abaixo.

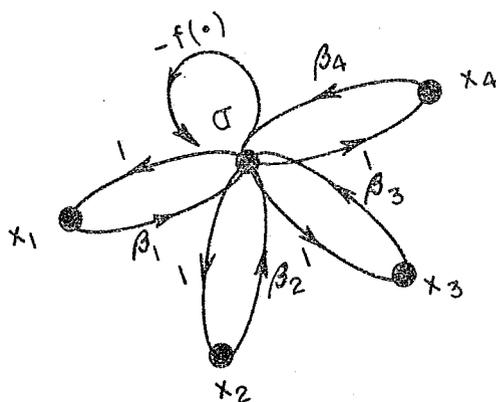


Figura IV.6 - Estrutura do sistema (IV.24)

Portanto o sistema (IV.20) recai no Caso I da seção IV.2. Utilizando-se o Corolário IV.2, visto que o sistema tem estrutura acíclica e satisfaz a condição (*), a condição su

ficiente para estabilidade absoluta \bar{e} dada por:

$(-1)^i \det_i(A^+) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Dado que ρ_i , $i=1,2,3,4$

são positivos, a condição acima fica reduzida a $\det(A^+) < 0$. A expressão do determinante de A é:

$$\det A = r\rho_2 + \sum_{i=1}^4 \beta_i / \rho_i \quad (\text{IV.25})$$

Caso tenhamos os sinais das interconexões (β_i), ou todos positivos ou todos negativos, a condição suficiente para a estabilidade absoluta será dada por:

$$r\rho_2 + \sum_{i=1}^4 \beta_i / \rho_i \leq 0 \quad (\text{IV.26})$$

A função de Lyapunov nestes casos é obtida a partir dos Teoremas III.4 e IV.3:

$$V(\underline{x}, \sigma) = \sum_{i=1}^4 |\beta_i| x_i^2 + \sigma^2 \quad (\text{IV.27})$$

Analisando-se a desigualdade (IV.26) verifica-se que nestes casos esta condição não é apenas suficiente porém é também necessária para a estabilidade absoluta A_∞ do sistema (IV.20). Isto pelo fato de que (IV.26) é equivalente à condição $\det A \leq 0$ que é uma condição necessária para a estabilidade assintótica do sistema (IV.20) com $f(\sigma) = \epsilon\sigma$ para $\epsilon \rightarrow 0_+$. Portanto

(IV.26) é também necessária para a estabilidade absoluta A_∞ e evidentemente nestes casos é menos restritiva que (V.23) obtida pelo método de "sistemas interconectados".

Exemplo IV.6 (Sistema tipo LP, Caso A)

Considerando sistemas do tipo Lur'e-Postnikov (IV.13) o problema da estabilidade absoluta pode ser relacionado ao sistema transformado, colocado na forma (IV.14), neste caso, analisam-se as propriedades estruturais da matriz

$$\begin{bmatrix} A & \vdots & b \\ \dots & \vdots & \dots \\ a' & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Caso esta matriz tenha propriedades estruturais favoráveis, pode-se aplicar os resultados das seções IV.1 e IV.2. Para exemplificar, um caso específico é tratado em seguida. Este exemplo também foi tratado em [82] utilizando o método de "sistemas interconectados".

Supondo que todos os auto-valores da matriz B do sistema (IV.13) são reais negativos e distintos, é mostrado em [82] que o sistema (IV.13) pode ser colocado sob a forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \vdots & b \\ \dots & \vdots & \dots \\ a' & \vdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \dots \\ f(\sigma) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ -1 \end{bmatrix} \hat{f}(\sigma) \quad (\text{IV.28})$$

onde $D = \text{diag}[-\rho_1, -\rho_2, \dots, -\rho_n]$; $\bar{f}(\sigma) = \rho_{n+1} \cdot \sigma + r f(\sigma)$;

$r \geq 0$, $b = [1, 1, \dots, 1]'$; $\rho_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n+1$;

$a' = [\gamma_1(\rho_{n+1} - \rho_1), \gamma_2(\rho_{n+1} - \rho_2), \dots, \gamma_n(\rho_{n+1} - \rho_n)]$;

$\gamma_i = i = 1, 2, \dots, n$ são constantes.

Analisando o sistema (IV.28) vemos que ele pertence à classe (II.2) e apresenta uma estrutura acíclica-3. Podemos, neste caso, utilizar uma função de Lyapunov do tipo (II.7) obtida a partir do Teorema III.4 dada por:

$$V(\underline{x}, \sigma) = \sum_{i=1}^n |\gamma_i(\rho_{n+1} - \rho_i)| \cdot x_i^2 + 2 \int_0^{\sigma} f(\xi) \, d\xi \quad (\text{IV.29})$$

Nos casos em que os sinais de $[\gamma_i(\rho_{n+1} - \rho_i)]$, $i = 1, 2, \dots, n$ sejam todos positivos, ou todos negativos; a partir da função (IV.29) e do Teorema III.4 obtêm-se a seguinte condição suficiente para estabilidade absoluta no setor $[0, k]$, $k > 0$:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i(\rho_{n+1} - \rho_i)}{\rho_i} - \frac{\rho_{n+1}}{k} < r \quad (\text{IV.30})$$

Utilizando o método de funções de Lyapunov vetoriais Piontkovskii e Rutkovskaya [82] obtiveram a seguinte desigualdade:

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i (\rho_{n+1} - \rho_i) < \frac{\rho_{n+1}^2 \rho_1^2}{nk^2} \quad (\text{IV.31})$$

onde foi assumido que $\rho_1 = \min_i \rho_i$; ($1 \leq i \leq n$)

Acontece no entanto que, nestes casos, a relação (IV.30) é equivalente à condição necessária para estabilidade assintótica para o caso linear no setor $[0, k]$ e que é dada por:

$$(-1)^{n+1} \det \begin{bmatrix} D & & kb \\ \dots & \vdots & \dots \\ a' & \vdots & -\rho_{n+1} - rk \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{IV.32})$$

Portanto, nestes casos, a desigualdade (IV.30) é necessária e suficiente para a estabilidade absoluta no setor $[0, k]$ e é portanto menos restritiva que (IV.31).

Obs: Como exemplo de sistemas do tipo INL; (sistemas com interconexões não-lineares) é tratado o caso de sistemas de energia elétrica (sistemas multi-máquinas) na seção IV.1.

Pelos resultados e exemplos até aqui apresentados, verifica-se que o método proposto neste trabalho mostra-se eficiente e de fácil aplicação quando são identificados sistemas com estrutura favorável explícita. Poderá, no entanto, parecer que estes resultados estão restritos a casos bastante particulares de estruturas favoráveis e que, em geral, difícil

mente serão encontrados sistemas que recaiam nos casos tratados. Os exemplos abordados neste capítulo mostram que esta impressão não é inteiramente verdadeira.

Todavia é verdade que o fato de um sistema apresentar explicitamente uma estrutura favorável não é a regra. Nos casos em que os sistemas não apresentam estruturas favoráveis de uma maneira explícita, foram desenvolvidos métodos de "realização de estruturas favoráveis", que buscam investigar a possibilidade de um determinado sistema apresentar uma estrutura favorável, porém implícita; este problema é tratado no capítulo subsequente.

Considerando os exemplos tratados na seção IV.3, procura-se enfatizar a importância de se investigar as propriedades estruturais de determinados sistemas antes de se aplicar este ou aquele método de análise de estabilidade. Especificamente em relação ao método de "sistemas interconectados" comparado ao método proposto neste trabalho, nota-se que, quando um determinado sistema apresenta uma estrutura favorável em forma explícita os resultados via "sistemas interconectados" geralmente conduzem a resultados mais conservativos do que aqueles obtidos através de uma abordagem estrutural. Neste caso a vantagem também é extensiva ao esforço computacional, visto que, tanto as funções de Lyapunov bem como as condições de estabilidade são facilmente obtidas, fato que não ocorre no caso do método de "sistemas interconectados".

Já nos casos em que o sistema não apresenta uma estrutura favorável explícita e dado que ainda não se dispõe de algoritmos, nos casos gerais, para verificar a existência de uma estrutura favorável implícita (vide capítulo seguinte), nos parece que o método de "sistemas interconectados", pelo fato de ser mais geral e de certa forma já sistematizado, este teria preferência no caso de uma possível aplicação. Todavia em termos de resultados, dado o seu caráter universal, cremos que conduziria a resultados relativamente conservativos, principalmente se fosse identificado (de alguma forma) que o sistema apresenta uma estrutura favorável implícita. Este fato justifica um esforço adicional para investigar a existência de estruturas favoráveis implícitas (vide a aplicação a sistemas de energia elétrica, seção VI.1).

Pelo exposto acima, considerando-se um determinado sistema não-linear de grande porte, uma sequência mais adequada de abordagens que poderia ser utilizada é a seguinte: (a) primeiramente investiga-se a existência de uma estrutura favorável sob forma explícita, caso exista, aplicam-se os resultados da abordagem estrutural; (b) caso o sistema não apresente uma estrutura explícita e não recaia nos casos em que sistematicamente pode-se investigar a existência de estruturas favoráveis implícitas (Capítulo V), utiliza-se o método de "sistemas interconectados"; (c) tenta-se investigar a existência de uma estrutura favorável sob forma implícita.

Cabe ainda ressaltar que, em termos estruturais, nos ativemos à classe dos sistemas fortemente conexos. Cremos entretanto, que o aspecto da decomposição de um sistema fracamente conexo [37], [60], [74], em sub-sistemas "fortemente conexos" merece ser investigado, dado que boa parte das características estruturais de sistemas fracamente conexos são decorrência das propriedades de seus sub-sistemas fortemente conexos.

Como consequência deste fato, o tipo de abordagem estrutural utilizada neste trabalho poderá ser explorada incluindo-se ainda este aspecto.

CAPÍTULO VREALIZAÇÕES DE ESTRUTURAS FAVORÁVEIS

Analisando os resultados dos capítulos precedentes, de uma maneira intuitiva, eles poderiam ser sintetizados da seguinte forma: "desde que um sistema dinâmico não-linear da classe (II.2) apresente uma estrutura favorável, podemos assegurar a estabilidade absoluta deste sistema".

Considerando-se a afirmativa acima, algumas questões que naturalmente ocorrem são as seguintes: "neste caso estes resultados estariam restritos a uma classe de sistemas que explicitamente apresentassem a chamada estrutura favorável?. E no caso em que o sistema não apresentasse esta estrutura favorável, nada se poderia afirmar sobre sua estabilidade com base nestes resultados"?.

A finalidade deste capítulo é a de exatamente procurar responder estas questões. Mostra-se que mesmo quando um sistema não-linear não apresenta explicitamente uma estrutura favorável (caso do Exemplo II.1) ou nem mesmo pertence à classe (II.1) (Exemplo V.5), pode-se por uma mudança de variáveis conveniente, tentar dar-lhe uma representação matemática equivalente (do ponto de vista de estabilidade). No caso desta nova representação matemática possuir características estruturais favoráveis poderemos assegurar a estabilidade

absoluta do sistema original com base nos resultados apresentados nos capítulos precedentes.

A derivação de métodos sistemáticos para a obtenção desta nova representação matemática faz com que a potencialidade dos resultados obtidos neste trabalho seja consideravelmente ampliada. Evidencia-se desta maneira que a representação matemática de um sistema em uma determinada base "conveniente" pode explicitar certas propriedades interessantes que são "ocultadas" quando a sua representação não é "adequada".

A mudança de variáveis relativa à nova representação, no nosso caso é obtida de uma maneira indireta utilizando o que chamamos de "algoritmos de realização". Em particular nos ativemos aos sistemas do tipo Lur'e-Postnikov.

Mostra-se paralelamente como é possível, a partir destes algoritmos de realização, estabelecer novos critérios algébricos para a determinação da estabilidade absoluta de sistemas de controle contendo uma não-linearidade contida no setor positivo infinito. Mostra-se, outrossim, a conveniência da utilização destes algoritmos para o caso de síntese de reguladores em sistemas não-lineares [4^o], dado que os métodos frequenciais [7^o] em geral são restritos a problemas de análise.

No capítulo subsequente são dadas aplicações destes algoritmos de realização ao problema da síntese de redes passivas, bem como para derivar resultados em estabilidade de sistemas de energia elétrica.

V.1 - O SISTEMA $\dot{\underline{x}} = A \underline{x}$

Uma questão que pode ser levantada no caso mais simples do sistema dinâmico linear $\dot{\underline{x}} = A \underline{x}$ é a seguinte: "todo sistema linear autônomo que seja assintoticamente estável pode ser representado sob uma estrutura favorável e em particular sign stable" ? ou equivalentemente, "sempre existe uma transformação não singular T tal que TAT^{-1} tem estrutura "sign stable" ?

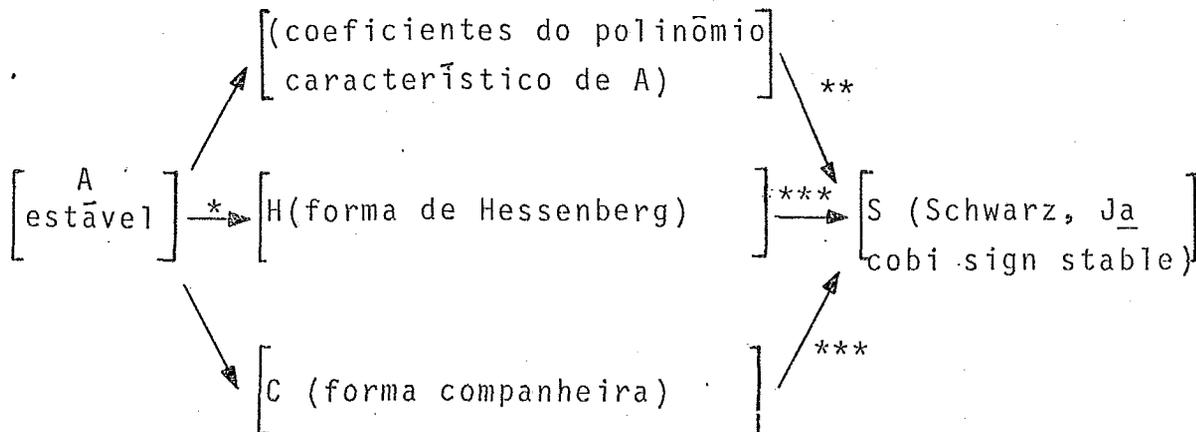
A resposta à questão acima é afirmativa, de vez que diferentes tipos de estruturas sign stable podem ser obtidos sistematicamente a partir de uma matriz A estável.

A obtenção de uma destas estruturas sign stable, a partir de uma matriz estável (e "non derogatory"), baseia-se na transformação desta matriz para a forma de Schwarz [97], [5], [12], pois a forma de Schwarz, dado que A é estável, pelo Teorema III.11 é uma matriz Jacobi sign stable (vide seção VI.2) e portanto o nosso problema será de passar de A (estável) para S (forma de Schwarz e Jacobi sign stable). A esta passagem corresponde uma transformação T (não singular), que pode ser obtida de uma maneira sistemática [110], [12], [21].

Podemos obter a matriz S de diferentes maneiras:

- (i) a partir dos coeficientes do polinômio característico de A e dos determinantes de Hurwitz (vide seção VI.2).
- (ii) determinando a forma de Hessenberg da matriz A , o que é sempre possível $|^{110}|$, $|^{21}|$, e posteriormente a partir da forma de Hessenberg obter construtivamente a forma de Schwarz pelo método sugerido em $|^{21}|$.
- (iii) a partir de A , obter a sua forma companheira (e por conseguinte os coeficientes do polinômio característico de A), o que é problemático do ponto de vista numérico. Todavia, tendo-se a matriz A na forma companheira, utilizamos o método sugerido em $|^{21}|$ para chegar à matriz Jacobi sign stable (na forma de Schwarz), dado que a matriz companheira é uma matriz de Hessenberg.

Esquemáticamente temos:



- * via algoritmo de Wilkinson |^{1.10}|
- ** via determinantes de Hurwitz |³²|
- *** via algoritmo de construção da matriz de transformação T de B. N. Datta |²¹|.

Outra maneira alternativa de se obter a partir de A (estável) uma forma Jacobi sign stable \tilde{A} pela determinação da "eigen-structure" de A (nxn) |¹¹⁴|. Neste caso chega-se a forma real de Jordan, ou seja, \tilde{A} forma constituída de blocos de Jordan (para as raízes reais) e blocos Jacobi sign stable (para os pares complexos conjugados) como mostra a matriz \tilde{A} abaixo:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & & & 0 \\ & \vdots & & \\ & \dots & \dots & \\ 0 & & & \tilde{A}_2 \end{bmatrix}$$

onde \tilde{A}_1 é o bloco correspondente às raízes reais formado por blocos diagonais tais que

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & & & \\ & \tilde{A}_{12} & & \\ & & \dots & \\ & & & \tilde{A}_{1m} \end{bmatrix}$$

$$m \leq n$$

onde: $A_{ij} =$

$$\begin{bmatrix} \mu_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_j & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \mu_j \end{bmatrix}$$

\bar{e} é o bloco de Jordan correspondente ao auto valor real $\mu_j < 0$ de multiplicidade v_j e

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} A_{21} & & & & \\ & A_{22} & & & \\ & & A_{23} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_{2r} \end{bmatrix}$$

\bar{e} é o bloco real correspondente aos auto-valores complexos conjugados

$$A_{2i} = \begin{bmatrix} M_i & I_2 & & & \\ 0 & M_i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I_2 & \\ & & & & M_i & I_2 \\ & & & & 0 & M_i \end{bmatrix}_{2v_i \times 2v_i}$$

$$M_i = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -\mu_2 & \mu_1 \end{bmatrix}_i ; I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde: M_i é o bloco real correspondente a um par de auto-valores complexos conjugados e A_{2i} é o bloco de Jordan (real) correspondente a este par de auto-valores de multiplicidade v_i .

A obtenção da transformação de similaridade T tal que $TAT^{-1} = \tilde{A}$ encontra-se discutida em [114]. Claramente \tilde{A} é sign stable desde que A seja estável.

A investigação no sentido de obter métodos que transformem uma matriz qualquer A (estável) em uma forma qualquer sign stable que não Jacobi não foi abordada neste trabalho.

V.2 - SISTEMAS TIPO LUR'E-POSTNIKOV

Considerando os sistemas tipo Lur'e-Postnikov descritos pela equação abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A \underline{x} + bu \\ y &= c \underline{x} \\ u &= f(y) \end{aligned} \tag{V.1}$$

onde $\underline{x} \in R^n$, \bar{e} é o vetor de estados A ($n \times n$), b ($n \times 1$), c ($1 \times n$) são

matrizes constantes e $f(\cdot)$ é uma função real não-linear, sem memória, contínua, satisfazendo às condições (IV.2a) e (IV.2b) e (A, b, c) controlável e observável.

Dado que em geral os sistemas do tipo (V.1) não se enquadram na classe dos sistemas (II.2), a utilização dos resultados dos capítulos anteriores, nestes casos não seria possível. O que se pretende, neste caso, é investigar a possibilidade de obter uma nova representação matemática do sistema (V.1) tal que seja possível aplicar tais resultados.

Neste sentido foram desenvolvidos métodos para obter um novo sistema do tipo Lur'e-Postnikov, equivalente ao sistema (V.1), e que apresentasse uma estrutura "conveniente" para a aplicação dos resultados do capítulo anterior. Note-se que neste caso o problema é mais complexo do que aquele referente à seção V.1.

Neste capítulo foi desenvolvida uma maneira indireta, via função de transferência, de se obter um sistema

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{A} \bar{x} + \bar{b} u \\ y &= \bar{c} \bar{x} \\ u &= f(y)\end{aligned}\tag{V.2}$$

tal que: (a) (V.2) é equivalente ao sistema (V.1), ou seja, existe uma transformação de similaridade dada por uma matriz não singular T onde, $\bar{A} = TAT^{-1}$,

$$\bar{b} = T^{-1}b; \bar{c} = cT^{-1}$$

(b) (V.2) tem uma estrutura Jacobi, ou seja, $[\bar{A} \quad \bar{b} \quad \bar{c}]$ é uma matriz de Jacobi.

(c) (V.2) recai em um dos casos tratados na seção (IV.2).

A preocupação foi de investigar a classe das estruturas tridiagonais (Jacobi), ou seja, foram desenvolvidos algoritmos de realização que dão uma representação (V.2) com estrutura Jacobi aos sistemas do tipo (V.1). Esta representação, uma vez obtida, possibilita a rápida verificação das condições relativas às estruturas favoráveis.

Considerando-se a parte linear dos sistemas (V.1) e (V.2), exploraremos a sua função de transferência que no caso é dada por:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = -c(sI - A)^{-1}b = -\bar{c}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{b} \quad (V.3)$$

os sistemas (V.1) e (V.2) podem ser representados pelo diagrama de blocos abaixo:

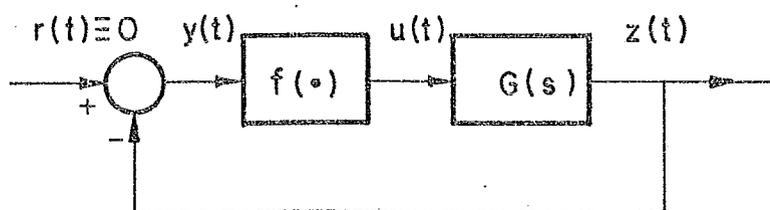


Figura (V.1) - Sistema de Controle Não-Linear

onde

$$G(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = - \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (V.4)$$

Dado o fato que a função de transferência $G(s)$ da parte linear do sistema (V.1) independe do sistema de coordenadas em que o sistema da Figura V.1 é descrito, utilizaremos esta função de transferência para, a partir dela, obter uma representação matemática equivalente e que possua uma estrutura "conveniente". Isto será obtido a partir de uma realização irredutível de $G(s)$, utilizando os "algoritmos de realização" derivados na seção V.3.

Nossa preocupação básica com relação aos sistemas do tipo (V.1) será de saber se estes podem ter uma representação do tipo (V.2) e que, além disso, apresente uma estrutura favorável. Caso isto se verifique, poderemos assegurar a estabilidade absoluta A_∞ do sistema (V.1) baseados nos resultados da seção IV.2.

V.2.1 - Condições Necessárias para que o Sistema Tipo Lur'e Seja Absolutamente Estável A_∞

Dado que a representação do sistema (V.1) na forma (V.2), com estrutura favorável, estará baseada na realização da função de transferência $G(s)$, nada mais natural que investigar as condições que $G(s)$ deve satisfazer para que isto seja possível.

Analisaremos as condições necessárias para que o sistema (V.1) seja absolutamente estável no setor positivo infinito, estas condições serão dadas em termos das características da função de transferência da parte linear ($G(s)$). Claramente estas condições também serão necessárias para que se obtenha uma representação (V.2) com estrutura favorável.

Neste sentido temos o seguinte:

Lema V.1: Para que o ponto de equilíbrio $\underline{x} = 0$ do sistema (V.1) seja absolutamente estável A_∞ é necessário que $G(s)$ dada por (V.3) satisfaça às seguintes condições:

(i) $G(s)$ tenha polos e zeros no semi-plano lateral esquerdo (fechado).

(ii) $\Delta G(s) \triangleq \text{gr } D(s) - \text{gr } N(s) \leq 2$.

Prova: Considerando o sistema da Figura V.1 e raciocinando em termos do lugar das raízes deste sistema para o caso linear i.e., $f(y) = h \cdot y$ ($0 < h < \infty$), sabemos que: os polos do sistema em malha fechada, para $h \rightarrow \infty$, tenderão para os zeros de $G(s)$ e que portanto não poderão estar no semi-plano lateral direito.

No caso de $h \rightarrow 0$ os polos do sistema em malha fechada tenderão aos polos de $G(s)$ que deverão estar no semi-plano lateral esquerdo fechado, pois $h > 0$. Caso tivéssemos $0 \leq \frac{f(y)}{y} < \infty$ deveríamos ter polos de $G(s)$ no semi-plano lateral

esquerdo aberto.

Analogamente, raciocinando em termos do lugar das raízes para o caso linear, $f(y) = h \cdot y$ ($0 < h < \infty$), para que o sistema seja incondicionalmente estável ($0 < h < \infty$) as assíntotas do lugar das raízes (para $h \rightarrow \infty$) não poderão cruzar o eixo imaginário. Como o ângulo das assíntotas é dada por:

$$\phi_A = \frac{(2q+1)}{n-m} \cdot \pi; \quad q = 0, 1, 2, \dots, (n-m-1) \quad (n = \text{gr } D(s); m = \text{gr } N(s))$$

portanto $q_{\max} = 1$, donde $\Delta G(s) \leq 2$

Portanto as condições acima são condições necessárias para a representação do sistema (V.1) sob qualquer estrutura favorável. Como consequência da condição (ii) acima tem-se o seguinte:

Lema V.2: Se para o sistema (V.2) a matriz $[\bar{A} * \bar{b} \cdot \bar{c}]$ é sign stable então: $G(s) = \bar{c}(sI - \bar{A})^{-1} \cdot \bar{b}$ é tal que $\Delta G(s) \leq 2$.

Prova: Tomando-se $\alpha \in R$, $\alpha > 0$, a matriz $[\bar{A} * \alpha \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}]$ será sign stable $\forall \alpha > 0$. Considerando que esta matriz "caracteriza" o sistema (V.2) no qual $u = \alpha \cdot y$, ou seja,

$$\dot{\underline{x}} = [\bar{A} * \alpha \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}] \underline{x}$$

Claramente o sistema acima é estável para todo $\alpha > 0$. Pela condição (ii) do Lema V.1 isto implica que necessariamente $\Delta G(s) \leq 2$ ●

V.2.2 - Condições de Realizabilidade do Sistema tipo Lur'e sob Estrutura Favorável

Trataremos dos sistemas do tipo (V.1) para investigar a possibilidade da obtenção de uma representação favorável e mais especificamente, para que esta representação recaia nas condições dos Corolários IV.1 a IV.6 com estrutura Jacobi.

Em termos das matrizes \bar{A} , \bar{b} e \bar{c} , para que o sistema (V.2) apresente uma estrutura Jacobi conveniente e que recaia em um dos casos tratados na seção IV.2, algumas condições devem ser satisfeitas:

- (a) Uma condição necessária para que o sistema (V.2) tenha estrutura Jacobi é que as matrizes $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ e $\bar{b} \cdot \bar{c} = (\bar{b}_i \cdot \bar{c}_j)$ sejam Jacobi. Pois se \bar{A} ou $\bar{b} \cdot \bar{c}$ não forem Jacobi, a matriz $[A * bc]$ não será Jacobi (vide Definições IV.1 e IV.2).
- (b) Uma condição necessária para que o sistema (V.2) recaia em um dos casos da seção IV.2 é que tenhamos a matriz $\bar{c} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n)$ com apenas um elemento não nulo $\bar{c}_k \neq 0$; $1 \leq k \leq n$, (a matriz $n \times n$, $\bar{b} \cdot \bar{c} = (\bar{b}_i \cdot \bar{c}_j)$ terá apenas a coluna k não totalmente nula).

Dado que a realização do sistema (V.2) sob uma estrutura favorável, que recaia nos casos tratados na seção IV.2, será obtida a partir da função de transferência (V.3) da parte linear do sistema (V.1) ou (V.2), a seguir são dadas as funções

de transferência relativas a cada caso (Casos I, IIa e IIb da seção IV.2) bem como são analisadas as condições de realizabilidade de estas funções sob estruturas favoráveis do tipo Jacobi.

As funções de transferência abaixo são determinadas considerando-se que o sistema (V.2) esteja representado sob uma estrutura Jacobi, que é aquela que será buscado obter a partir de uma dada $G(s)$. Considera-se também que a matriz \bar{A} (na forma Jacobi) é não-decomponível e que $\bar{a}_{ij} < 0$, $i=1,2,\dots,n$. Estas duas últimas condições no entanto, não são essenciais e em certos casos podem ser relaxadas.

As funções de transferência relativa aos casos (I, IIa e IIb) da seção IV.2, considerando o sistema (V.2) com estrutura Jacobi, são dadas por:

Caso I:

$$G(s) = - \bar{c}_k \bar{b}_k \frac{|sI_{n-1} - \bar{A}_k|}{|sI_n - \bar{A}|} \quad (V.6)$$

onde: I_n e I_{n-1} são as matrizes identidade $(n \times n)$ e $(n-1) \times (n-1)$ respectivamente.

\bar{A}_k é a matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida a partir da matriz \bar{A} (Jacobi) $(n \times n)$ eliminando-se a k -ésima linha e coluna. Claramente neste caso temos $\Delta G(s) = n-m = 1$.

Caso IIa: Como na seção IV.2 foi mostrada a equivalência dos casos IIa1 e IIa2, a função de transferência relativa a este caso, utilizando os argumentos da seção IV.2 é caracterizada por:

$$G(s) = - \bar{b}_2 \bar{c}_1 \bar{a}_{12} \frac{|sI_{n-2} - \bar{A}_{12}|}{|sI_n - \bar{A}|} \quad (V.7)$$

onde: \bar{A}_{12} é a matriz $(n-2) \times (n-2)$ obtida a partir da matriz \bar{A} (Jacobi) eliminando-se a 1ª e 2ª linhas e colunas da matriz \bar{A} ($n \times n$). Claramente neste caso temos $\Delta G(s) = n-m = 2$.

Caso IIB: No caso em que o sistema (V.2) tem estrutura Jacobi a função de transferência relativa ao Caso IIB é dada por:

$$G(s) = \frac{\sum_{i=1}^1 \theta_{k+i} \det(sI_n - \bar{A})_{k+i}}{|sI_n - \bar{A}|} \quad (V.8)$$

onde: $(sI_n - \bar{A})_{k+i}$ é a matriz formada a partir da matriz $(sI_n - \bar{A})$ eliminando-se a $(k+i)$ ésima linha e a k -ésima coluna.

$$\theta_{k+i} = (-1)^{k+i} \cdot \bar{b}_{k+i} \cdot \bar{c}_k \quad (2 \leq k \leq n-1)$$

neste caso, dependendo de θ_{k+i} , teremos $\Delta G(s) = n-m = 2$ ou $\Delta G(s) = n-m = 1$.

Obs: O caso I é um caso particular do caso IIB.

As condições de realizabilidade de uma função de transferência $G(s)$ sob "estruturas favoráveis", devido ao fato de estarmos tratando estruturas Jacobi nas quais $\bar{a}_{ij} \neq 0$ para $|i-j| < 1$, passam a ser mais estritas do que aquelas dadas pelo Lema V.1.

Tomando-se o caso específico em que o sistema (V.2) tem uma estrutura favorável do tipo sign stable, tem-se o seguinte:

Lema V.3: Uma condição necessária para que $G(s) = N(s)/D(s)$ (irredutível) seja realizável na forma do sistema (V.2) com estrutura Jacobi sign stable, nos casos I ($\Delta G(s) = 1$), IIa ($\Delta G(s) = 2$) e IIb ($\Delta G(s) = 2$ ou $\Delta G(s) = 1$), é que $N(s)$ e $D(s)$ sejam polinômios de Hurwitz.

Prova: (Casos I e IIa): Como $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ é tal que $\bar{a}_{ij} \neq 0$ para $|i-j| \leq 1$ então $(\bar{A} * \bar{b} \bar{c})$ ser sign stable implica em que \bar{A} é sign stable e portanto por (V.6) e (V.7) $D(s)$ nos casos I e IIa é Hurwitz. Analogamente por (V.6) e (V.7), como qualquer sub-matriz principal de uma matriz sign stable (com $a_{ii} < 0$; $i = 1, 2, \dots, n$) também é sign stable então \bar{A}_k e \bar{A}_{12} também são sign stable e portanto $N(s)$, nos casos I e IIa, também são Hurwitz.

(Caso IIb): No caso IIb analogamente aos casos anteriores $D(s)$ é Hurwitz. Todavia o fato de que $N(s)$ neste caso também é estru-

tamente Hurwitz não é imediata e é mostrada a partir do Lema A3.1 (Apêndice A3).

Pelo Lema A3.1 podemos afirmar que um polinômio $P(s)$ de grau $n \geq 1$ que seja obtido a partir da combinação linear de ($m \geq 1$) polinômios de Hurwitz $P_i(s)$ i.e. $P(s) = \sum_{i=1}^m \alpha_i P_i(s)$.

onde: $\alpha_i > 0$; $i = 1, 2, \dots, m$ e a diferença de grau entre os polinômios $P_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, m$ é não superior a 2, então $P(s)$ também será Hurwitz.

Como no caso da função de transferência (V.8) $N(s)$ é um somatório que recai neste caso, então $N(s)$ também será Hurwitz.

No caso em que a condição $\bar{a}_{ij} \neq 0$ para $|i-j| \leq 1$ seja relaxada, e mais especificamente para $\bar{a}_{ii} \leq 0$; $i=1,2,\dots,n$ as condições do Lema acima poderão ser relaxadas para as condições do Lema V.1, levando-se em conta que neste caso, a obtenção de uma estrutura Jacobi sign stable estará sujeita às condições do Teorema III.11 (caso Jacobi sign stable com diagonal não estritamente negativa).

Considerando-se ainda as características particulares das estruturas relativas aos casos I e IIa, condições adicionais devem ser satisfeitas para que seja possível a obtenção de estruturas favoráveis; estas condições são dadas pelo:

Lema V.4: Uma condição necessária para que a função de transferência $G(s) = N(s)/D(s)$ seja realizável na forma do sistema (V.2) com estrutura Jacobi sign stable, relativa aos casos I e IIa, é dada por:

$$\alpha_i > \beta_i; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (V.9)$$

onde: $N(s) = s^m + \beta_1 s^{m-1} + \dots + \beta_m$

$$D(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

$$(m = n-1 \text{ ou } n-2)$$

Prova: Considerando as funções de transferência $G(s) = N(s)/D(s)$ relativas aos casos I e IIa dadas respectivamente por (V.6) e (V.7) temos que:

(a) $N(s)$ é o polinômio característico de uma sub-matriz principal da matriz \bar{A} (Jacobi sign stable).

(b) $D(s)$ é o polinômio característico de \bar{A} .

(c) os coeficientes dos polinômios característicos $D(s)$ e $N(s)$ são formados a partir dos menores principais de \bar{A} i.e.

$$\alpha_i = (-1)^i \sum_{\binom{n}{i}} M_i(\bar{A})$$

$$\beta_i = (-1)^i \sum_{\binom{n-1}{i}} M_i(\bar{A}_k) \quad (\text{caso I})$$

ou

$$\beta_i = (-1)^i \sum_{\binom{n-2}{i}} M_i(\bar{A}_{12}) \quad (\text{caso IIa})$$

$M_i(\bar{A})$: são os menores de ordem i da matriz \bar{A} ($n \times n$) e \bar{A}_k e \bar{A}_{12} são sub-matrizes principais de \bar{A} (cf. (V.6) e (V.7))

(d) todos os menores principais de uma matriz sign stable \bar{A} ($n \times n$) (indecomponível com diagonal estritamente negativa) satisfazem $(-1)^i M_i(\bar{A}) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Portanto de (a), (b), (c) e (d) tem-se que:

$$(-1)^i \sum_{\binom{n}{i}} M_i(\bar{A}) > (-1)^i \sum_{\binom{n-1}{i}} M_i(\bar{A}_k) > (-1)^i \sum_{\binom{n-2}{i}} M_i(\bar{A}_{12})$$

para todo $i = 1, 2, \dots, m$ e portanto (V.9) se verifica.

Obs. 1: No caso em que a matriz \bar{A} é decomponível e com diagonal não estritamente negativa a condição (V.9) pode ser relaxada para $\alpha_i \geq \beta_i$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Obs. 2: É fácil verificar que a condição (V.9) não é necessária no caso IIb e em casos em que, por exemplo as matrizes \bar{b} e \bar{c} são dadas por $\bar{b} = [\bar{b}_1, \bar{b}_2, 0, \dots, 0]$ e $\bar{c} = [\bar{c}_1, 0, \dots, 0]$.

V.2.3 - Algoritmos de Realização de Estruturas Jacobi

As funções de transferência (V.6), (V.7) e (V.8) sugerem que há uma forte relação entre os polinômios característicos da matriz \bar{A} e os polinômios característicos de suas sub-matrizes principais na formação do numerador e denominador das funções de transferência $G(s)$. Com base nesta idéia foi determinada a relação existente entre os elementos \bar{a}_{ij} de uma matriz de Jacobi \bar{A} e os coeficientes dos polinômios característicos de suas sub-matrizes principais (também Jacobi). A partir desta relação, dada pelo Lema V.5 abaixo, é que foram desenvolvidos os algoritmos de realização apresentados a seguir.

Lema V.5: (Vide Apêndice A4): Sendo $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ uma matriz de Jacobi real $n \times n$, a relação entre os elementos \bar{a}_{ij} da matriz \bar{A} e os coeficientes dos polinômios característicos das sub-matrizes principais inferiores \bar{A}_i , como definido abaixo, é dada por:

$$\alpha_i^k = \hat{a}_{pp} \cdot \alpha_i^{k-1} + \alpha_{i-1}^{k-1} + \hat{a}_{p+1,p} \cdot \alpha_i^{k-2} \quad (V.10)$$

$$k = n, n-1, \dots, 1; i = k-1, k-2, \dots, 1, 0$$

$$P = (n-k) + 1$$

onde:

$$\hat{a}_{jj} = -\bar{a}_{jj}; j = 1, 2, \dots, n$$

$$\hat{a}_{l+1,l} = -\bar{a}_{l+1,l} \cdot \bar{a}_{l,l+1}; l = 1, 2, \dots, n-1$$

e α_j^k são os coeficientes do polinômio característico $P_k(s) = s^k + \alpha_{k-1}^k s^{k-1} + \dots + \alpha_0^k$ da sub-matriz principal \bar{A}_{n-k} . Onde \bar{A}_j ($j = 0, 1, \dots, n-1$) é a sub-matriz principal obtida a partir da matriz \bar{A} eliminando-se as suas j primeiras linhas e colunas ($\bar{A}_0 = \bar{A}$).

Em (V.10) adicionalmente temos que:

$$\bar{a}_{n+1,n} = 0; \alpha_s^r = 1 \text{ (se } r=s \geq 0); \alpha_s^r = 0 \text{ (se } r < s \text{ ou } r < 0 \text{ ou } s < 0) \text{ (V.11)}$$

V.2.3a - Uma Realização Jacobi para o Caso $\Delta G(s) = 1$

Para a estrutura do sistema (V.2) relativa ao caso I e em particular com \bar{c}_1 e \bar{b}_1 (ou de maneira equivalente \bar{c}_n e \bar{b}_n) os elementos não nulos de \bar{c} e \bar{b} , a função de transferência dada por (V.6) é

$$G_1(s) = \bar{y}_1 \frac{N_1(s)}{D_1(s)} = \bar{y}_1 \frac{|sI_{n-1} - \bar{A}_1|}{|sI - \bar{A}|} = \bar{y}_1 \frac{s^{n-1} + \alpha_{n-2}^{n-1} s^{n-2} + \dots + \alpha_0^{n-1}}{s^n + \alpha_{n-1}^n s^{n-1} + \alpha_{n-2}^n s^{n-2} + \dots + \alpha_0^n} \quad (\text{V.12a})$$

$$\bar{y}_1 = -\bar{b}_1 \cdot \bar{c}_1 \quad (\text{V.12b})$$

\bar{A} , \bar{A}_1 , I_n e I_{n-1} como em (V.6).

Para determinarmos os elementos da matriz \bar{A} utilizamos o seguinte:

Algoritmo V.1: Fazendo $k = n$, em (V.10), obtemos um sistema algébrico de n equações a n incógnitas que, embora não-linear, é de solução bastante simples pela sequência de operações dada abaixo. A partir de (V.10):

com $(k = n)$; $i = n-1$ obtemos \tilde{a}_{11}

$i = n-2$ obtemos \tilde{a}_{21}

$i = n-3$ obtemos α_{n-3}^{n-2}

\vdots

$i = 0$ obtemos α_0^{n-2}

com $(k=n-1)$; $i = n-2$ obtemos \tilde{a}_{22}

$i = n-3$ obtemos \tilde{a}_{32}

$i = n-4$ obtemos α_{n-4}^{n-3}

\vdots

$i = 0$ obtemos α_0^{n-3}

com $(k = 1)$; $i = 0$ obtemos $\alpha_0^1 = \tilde{a}_{nn}$

Os \tilde{a}_{ii} e $\tilde{a}_{i+1,i}$ obtidos pela sequência de operações acima, constituem a matriz \bar{A} .

Portanto no caso I, para que se obtenha um sistema (V.2) com as características desejadas, a matriz \bar{A} é obtida

pelo Algoritmo acima e como neste caso as matrizes \bar{b} e \bar{c} têm estrutura pré-determinada, os valores numéricos correspondentes aos elementos destas matrizes são obtidos diretamente a partir do ganho de $G(s)$ (cf. V.12b).

Obs: Segundo o algoritmo acima, desde que para algum par (k, i) obtivermos um coeficiente (\tilde{a}_{ij} ou α_i^k) negativo; isto significa que uma estrutura em que $(\bar{A} * \bar{b} \bar{c})$ seja Jacobi sign stable com as características desejadas não pode ser obtida a partir da $G(s)$ dada. Para que $(\bar{A} * \bar{b} \bar{c})$ no caso I seja Jacobi sign stable todos os coeficientes \tilde{a}_{ij} e α_i^k necessariamente deverão ser positivos. Todavia, para obtermos uma realização sob estrutura favorável, esta não necessariamente deverá ser Jacobi sign stable (vide Teorema IV.3 e Corolário IV.2).

V.2.3b - Uma Realização Jacobi para o Caso $\Delta G(s) = 2$

Para a estrutura do sistema (V.2) relativa ao caso IIa, e em particular para \bar{c}_1 e \bar{b}_2 como os elementos não nulos de \bar{c} e \bar{b} , a função de transferência dada por (V.8) é

$$G_2(s) = \bar{\gamma}_2 \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \bar{\gamma}_2 \frac{|sI_{n-2} - \bar{A}_2|}{|sI - \bar{A}|} = \bar{\gamma}_2 \frac{s^{n-2} + \alpha_{n-3}^{n-2} s^{n-3} + \dots + \alpha_0^{n-2}}{s^n + \alpha_{n-1}^n s^{n-1} + \dots + \alpha_0^n} \quad (V.13a)$$

$$\bar{\gamma}_2 = -\bar{a}_{12} \bar{b}_2 \bar{c}_1 \quad (V.13b)$$

\bar{A} , \bar{A}_2 , I_n , I_{n-2} como em (V.7).

Passo 3: Com a solução de (V.14) fazemos $k = n-1$ no Algoritmo V.1 e recaímos no caso de realizações Jacobi com $\Delta G(s) = 1$.

Passo 4: Como a estrutura das matrizes \bar{b} e \bar{c} é dada, determina-se os seus valores numéricos a partir do ganho $\bar{\gamma}_2$, equação (V.13b).

Visto que a nossa preocupação principal, em relação a estes Algoritmos, é a realização de sistemas do tipo (V.2) a partir de uma $G(s)$ dada e que apresentem estruturas favoráveis, a sua utilização e em particular o Algoritmo V.2, assume características peculiares que podem ser expressas pelas seguintes observações:

Obs. 1: No Passo 1 o intervalo utilizado para arbitrar \hat{a}_{11} é tal que: $0 < \hat{a}_{11} < \alpha_{n-1}^n - \alpha_{n-3}^{n-2}$. Tal intervalo é determinado pelo seguinte: dado o fato que $\alpha_{n-1}^n = \sum_{i=1}^n \hat{a}_{ii}$ e $\alpha_{n-3}^{n-2} = \sum_{i=3}^n \hat{a}_{ii}$ e como, para que seja obtida uma estrutura favorável, é necessário que tenhamos $\hat{a}_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ (Lema III.2, condição necessária para que $\bar{A} \in \mathcal{D}$) devemos ter $0 < \hat{a}_{11} < \alpha_{n-1}^n - \alpha_{n-3}^{n-2}$.

Obs. 2: Sobre o Passo 2; caso exista solução "viável" para (V.14) somente aí é que passamos ao Passo 3. Caso contrário retornamos ao Passo 1 alterando o valor de \hat{a}_{11} , até que todo o intervalo seja testado. Dizemos que (V.14) tem solução "viável" se $\hat{a}_{21} > 0$ e $\alpha_i^{n-1} > 0$, $i = 1, 2, \dots, n-2$; de vez que nosso interesse prende-se a realização de estruturas favoráveis. Eviden

temente caso (V.14) não tenha solução viável, para toda a faixa possível de \hat{a}_{11} , a função de transferência não tem uma realização sob aquela estrutura favorável na classe Jacobi.

Obs. 3: As observações relativas ao Passo 3 são aquelas pertinentes ao Algoritmo V.1.

As observações acima relativas a cada passo dos Algoritmos V.1 e V.2 prendem-se à busca de estruturas favoráveis e não se aplicam quando apenas se deseja realizar estruturas Jacobi.

Sumariando o Algoritmo (V.2) no caso da realização de estruturas Jacobi favoráveis, para o sistema (V.2), podemos esboçá-lo pelo diagrama de blocos da Figura V.2.

Obs. 4: No diagrama de blocos da Figura V.2 a verificação do fato de ter-se chegado a uma estrutura favorável ou não, é decidido com base nos resultados da seção V.3.

Obs. 5: A conclusão da existência ou não de um valor de \hat{a}_{11} (pelo algoritmo V.2) que gera uma estrutura favorável deve ser cercada de um certo cuidado: dado que o valor de \hat{a}_{11} que gera uma estrutura favorável em princípio pode ser um valor isolado, este fato, dependendo dos acréscimos que são utilizados para testar o intervalo, poderá levar à falsa conclusão da não existência de realização favorável.

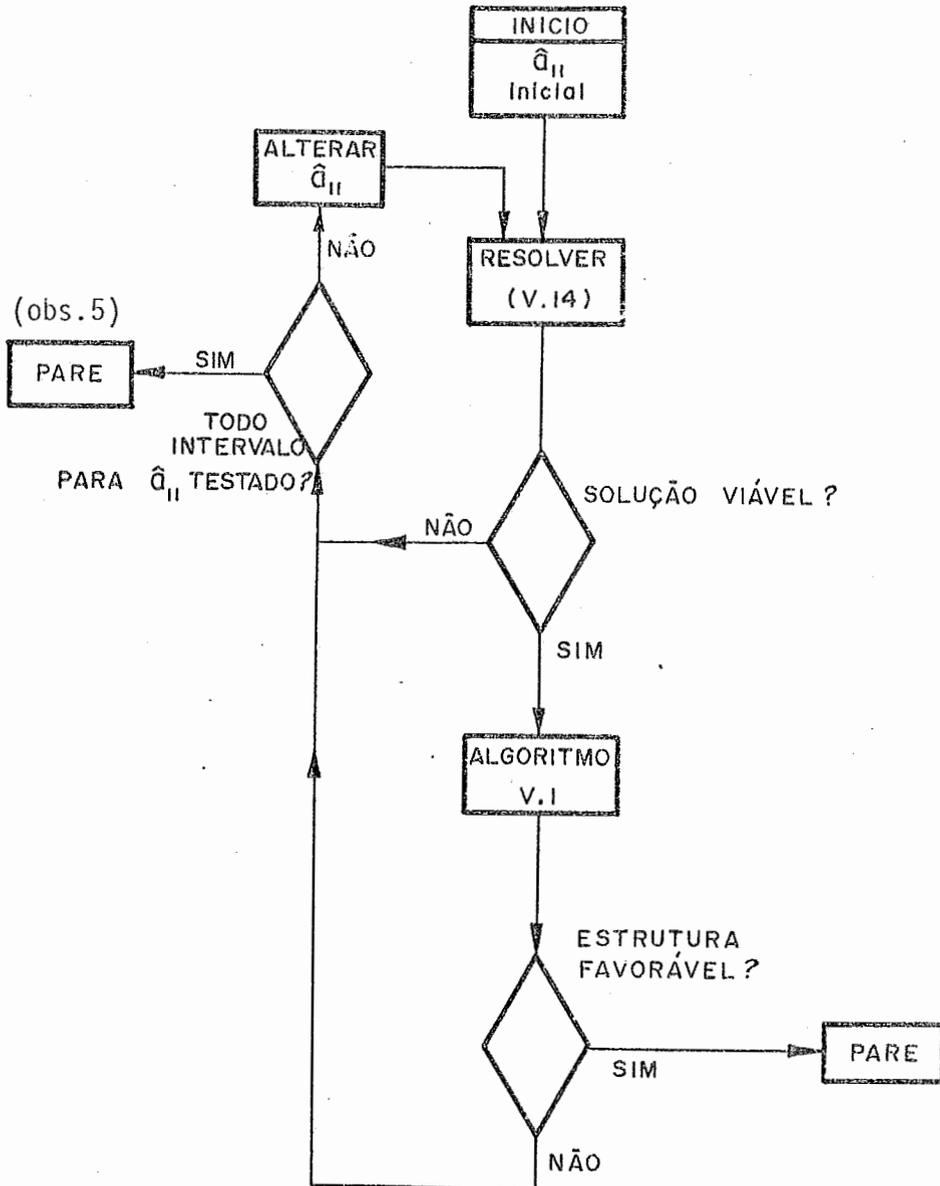


Fig. V.2 - Algoritmo V.2: realização de estruturas favoráveis

Obs. 6: Analisando-se o procedimento baseado no algoritmo V.2 vemos que no caso em que $\Delta G(s) = 2$ (caso IIa) a realização de uma $G(s)$ dada, em uma estrutura favorável pode não ser única, fato que poderá determinar diferentes condições para a estabilidade absoluta do sistema (V.1); algumas poderão ser mais conservativas que outras. Cremos que este aspecto deverá merecer uma investigação complementar.

Obs. 7: Outro aspecto relativo aos Algoritmos V.1 e V.2 que deverá ser investigado é o seguinte: independentemente de se obter estruturas favoráveis, determinar em que condições uma função de transferência $G(s)$ admite uma realização com estrutura Jacobi. Este aspecto é de importância quando se aborda o problema da síntese de sistemas absolutamente estáveis, dado que, uma vez obtida uma estrutura Jacobi (por exemplo) pode-se atribuir valores aos parâmetros de $G(s)$ para que se obtenha uma estrutura favorável.

Considerando o problema das realizações, em termos gerais, acredita-se que um maior esforço de pesquisa deverá ser efetuado para a determinação de maneiras sistemáticas de se obter outros tipos de estruturas mais gerais do que aquelas tratadas nesta seção.

V.3 - CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA ESTABILIDADE ABSOLUTA A_∞: CRITÉRIOS ALGÉBRICOS

Tomando por base os Algoritmos de realização dados na seção anterior, podemos estabelecer novos critérios algébricos para determinar a estabilidade absoluta de sistemas do tipo Lur'e-Postnikov (V.1). Normalmente os critérios de estabilidade absoluta relativos a estes sistemas baseiam-se nas características frequenciais de $G(s)$, [78], [83], [87], todavia estes critérios nem sempre são de fácil aplicação, principalmente no caso em que se considera o problema da síntese de reguladores que assegurem a estabilidade absoluta do sistema regulado [113].

O estabelecimento de critérios algébricos baseados nos coeficientes dos polinômios $N(s)$ e $D(s)$ de $G(s)$, proporciona métodos alternativos para o problema da análise de estabilidade de sistemas não-lineares. Cremos todavia que sua potencialidade maior está ligada ao problema da síntese de reguladores em sistemas não-lineares. Alguns trabalhos recentes neste sentido comprovam esta asserção [92], [40].

A determinação destes critérios algébricos baseia-se na "realizabilidade" da função de transferência $G(s)$ sob uma estrutura favorável referente aos resultados da seção IV.2, esta realizabilidade é verificada em termos dos resultados e Algoritmos estabelecidos na seção V.2.

Considerando os casos em que $\Delta G(s) = 1$ e $\Delta G(s) = 2$ (vide Lema V.1) podemos estabelecer os seguintes resultados:

Teorema V.1: Condições suficientes para que o equilíbrio do sistema (V.1) seja absolutamente estável A_∞ são:

(i) $\Delta G(s) = 1$

(ii) Todos os elementos \hat{a}_{ii} e $\hat{a}_{i+1,i}$ obtidos a partir do Algoritmo V.1 sejam positivos.

Prova: Desde que a condição (ii) é satisfeita, isto implica que para (V.2) existem, uma matriz \bar{A} Jacobi sign stable e matrizes \bar{b} e \bar{c} (obtidas a partir de V.12b; caso I) tais que $(\bar{A} * \bar{b} \bar{c})$ é sign stable. Pelo Corolário V.1 o sistema (V.2) e consequentemente (V.1) tem o equilíbrio absolutamente estável A_∞ .

Teorema V.2: Condições suficientes para que o equilíbrio do sistema (V.1) seja absolutamente estável A_∞ são:

(i) $\Delta G(s) = 1$

(ii) os elementos \hat{a}_{ij} obtidos a partir do Algoritmo V.1 são tais que: $\hat{a}_{ij} > 0$; $i = 1, 2, \dots, n$ e a matriz de Jacobi $\bar{A}^+ = (\bar{a}_{ij}^+)$ satisfaça $(-1)^i \det_i(\bar{A}^+) > 0$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Prova: Analogamente ao Teorema V.5, se a condição (ii) neste caso for satisfeita, então existe uma matriz $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ tal que $\bar{A} \in \mathcal{D}$ e como neste caso $\Delta G(s) = 1$ (caso I) existem matrizes \bar{b} e \bar{c} tais que $\bar{b}_1 \cdot \bar{c}_1 < 0$ (V.12b). Pelo Teorema IV.3 o sistema (V.2) e conseqüentemente (V.1) tem o equilíbrio absolutamente estável A_∞ .

Teorema V.3: Condições suficientes para que o equilíbrio do sistema (V.1) seja absolutamente estável A_∞ são:

(i) $\Delta G(s) = 2$

(ii) Todos os elementos \hat{a}_{ij} e $\hat{a}_{i+1,i}$ obtidos a partir do algoritmo V.2 sejam positivos.

Prova: A partir da condição (ii) existe uma matriz Jacobi \bar{A} sign stable e como $\Delta G(s) = 2$ no caso IIa existem matrizes \bar{b} e \bar{c} (V.13b) tais que $(\bar{A} * \bar{b} \bar{c})$ é sign stable, portanto pelo Corolário IV.4 o sistema (V.2) e conseqüentemente o sistema (V.1) tem o equilíbrio absolutamente estável A_∞ .

Teorema V.4: Condições suficientes para que o sistema (V.1) seja absolutamente estável A_∞ são:

(i) $\Delta G(s) = 2$

(ii) Os elementos \hat{a}_{ij} obtidos a partir do algoritmo V.2 sejam tais que:

$$\text{ii a) } \tilde{a}_{ij} > 0; i = 1, 2, \dots, n \text{ e } \tilde{a}_{21} > 0$$

$$\text{ii b) } (-1)^i \det_i(\bar{A}^+) > 0; i = 3, 4, \dots, n$$

Prova: Analoga à prova do Teorema V.3, neste caso utilizando o Corolário IV.3.

As condições suficientes dos resultados acima apresentados podem ainda ser relaxadas permitindo-se que os elementos diagonais da matriz $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ não sejam todos negativos i.e. $\bar{a}_{ij} \leq 0, i = 1, 2, \dots, n$, isto pode ser obtido a partir da utilização do Teorema III.11.

Um aspecto que deve ser considerado é o de que os resultados acima são derivados a partir de realizações em estruturas acíclicas-3 do tipo Jacobi, e embora outros tipos de realizações acíclicas-3 devam ser investigados, crê-se que: "caso uma realização Jacobi não seja possível, nenhuma outra estrutura acíclica-3 poderá ser obtida a partir da função de transferência dada", esta proposição no entanto não foi demonstrada.

Os resultados acima constituem-se em critérios algébricos alternativos para a determinação da estabilidade absoluta do sistema (V.1), todavia, em termos gerais, a comparação destes resultados com outros obtidos através de métodos frequentiais [77], [78], [31], [104] ainda não foi estabelecida. Apparentemente eles conduzem a resultados mais ou menos conservativos dependendo do sistema considerado.

Sabe-se no entanto que sendo as funções de Lyapunov, referentes aos resultados da seção IV.2, do tipo Lur'e e desde que se verifiquem as hipóteses destes resultados, as $G(s)$ correspondentes verificam o critério de Popov para não-linearidades no setor positivo infinito [87], ou seja,

$$\operatorname{Re}\{[1 + qj\omega] G(j\omega)\} \geq 0; j = \sqrt{-1}; q \text{ cte} \quad (\text{V.15})$$

para todo $0 < \omega < +\infty$

Cabe ainda salientar que os critérios algébricos acima estabelecem uma nova classe de sistemas que satisfaz a conjectura de Aizerman [1], [2].

Mostramos em seguida a aplicação destes critérios, bem como exemplos específicos em que, a partir deles, obtêm-se resultados menos conservativos do que aqueles obtidos por métodos frequenciais, como é o caso do exemplo V.5 [103].

Exemplo V.1: Seja o sistema (VI.1) com a função de transferência da parte linear dada por:

$$G(s) = \frac{s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + 3s^2 + 5s + 3}$$

Aplicando o Algoritmo V.1 a partir dos coeficientes de $G(s)$ temos:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_2 = \bar{a}_{11} + \beta_1 \quad \rightarrow \bar{a}_{11} = 2 \\ \alpha_1 = \bar{a}_{11}\beta_1 + \beta_0 + \bar{a}_{21} \rightarrow \bar{a}_{21} = 2 \\ \alpha_0 = \bar{a}_{11}\beta_0 + \bar{a}_{21}\gamma_0 \rightarrow \gamma_0 = 1/2 \end{array} \right| \quad (k=3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1 = \bar{a}_{22} + \gamma_0 \quad \rightarrow \bar{a}_{22} = 1/2 \\ \beta_0 = \bar{a}_{22}\gamma_0 + \bar{a}_{32} \quad \rightarrow \bar{a}_{32} = 3/4 \end{array} \right| \quad (k=2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_0 = \bar{a}_{33} \quad \rightarrow \bar{a}_{33} = 1/2 \end{array} \right| \quad (k=1)$$

portanto as condições do Teorema V.1 são verificadas e a realização da função de transferência $G(s)$, na forma do sistema (V.2), é dada pelas matrizes:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -2 & +1 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad \bar{b} = [1, 0, 0]^T, \quad \bar{c} = [-1, 0, 0]$$

Logo o equilíbrio do sistema da Figura (V.1) é absolutamente estável A_∞ .

Exemplo V.2: Seja

$$G(s) = \frac{s^4 + 4s^3 + 9s^2 + 10s + 5}{s^5 + 5s^4 + 14s^3 + 22s^2 + 20s + 8}$$

utilizando o Algoritmo V.1, obtemos $\hat{a}_{ij} = \hat{a}_{i+1,i} = +1$ e portanto pelo Teorema V.1, temos a estabilidade absoluta do sistema de controle da Figura V.1 com $f(.) \in A_\infty$.

Exemplo V.3: Sendo a função de transferência (V.3) dada por:

$$G(s) = \frac{s^2 + \alpha_1^{n-2} s + \alpha_0^{n-2}}{s^4 + \alpha_s^n s^3 + \alpha_2^n s^2 + \alpha_1^n s + \alpha_0^n} = \frac{s^2 + s + 2}{s^4 + 4s^3 + 8,5s^2 + 10s + 5,5}$$

utilizando o algoritmo V.2:

Passo 1: Arbitrando o valor $\hat{a}_{11} = 0,8$; $0 < \hat{a}_{11} < (\alpha_3^n - \alpha_1^{n-2}) = 3$.

Passo 2: Montando o sistema (V.14) para a $G(s)$ dada, temos:

$$\begin{bmatrix} \alpha_3^n & -\hat{a}_{11} \\ & \alpha_2^n \\ & & \alpha_1^n \\ & & & \alpha_0^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{a}_{11} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \hat{a}_{11} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \hat{a}_{11} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2^{n-1} \\ \alpha_1^{n-1} \\ \alpha_0^{n-1} \\ \hat{a}_{21} \end{bmatrix}$$

obtemos a seguinte solução: $[\alpha_2^{n-1}; \alpha_1^{n-1}; \alpha_0^{n-1}; \hat{a}_{21}] = [3,20; 5,23; 5,10; 0,71]$

Passo 3: Fazendo, em (V.10), $k = n - 1 = 3$; $j = 2$; $k = 1$ sucessivamente temos:

$$(k=3) \left\{ \begin{array}{l} i=2 \quad \alpha_2^{n-1} = 3,20 = \hat{a}_{22} + \alpha_1^{n-2} \quad \rightarrow \hat{a}_{22} = 2,2 \\ i=1 \quad \alpha_1^{n-1} = 5,23 = \hat{a}_{22}\alpha_1^{n-2} + \alpha_0^{n-2} + \hat{a}_{32} \quad \rightarrow \hat{a}_{32} = 1,03 \\ i=0 \quad \alpha_0^{n-1} = 5,10 = \hat{a}_{22}\alpha_0^{n-2} + \hat{a}_{32}\alpha_0^{n-3} \quad \rightarrow \alpha_0^{n-3} = 0,68 \end{array} \right.$$

$$(k=2) \left\{ \begin{array}{l} i=1 \quad \alpha_1^{n-2} = 1 = \hat{a}_{33} + \alpha_0^{n-3} \quad \rightarrow \hat{a}_{33} = 0,32 \\ i=0 \quad \alpha_0^{n-2} = 2 = \hat{a}_{33}\alpha_0^{n-3} + \hat{a}_{43} \quad \rightarrow \hat{a}_{43} = 1,78 \end{array} \right.$$

$$(k=1) \quad i=0 \quad \alpha_0^{n-3} = 0,68 = \hat{a}_{44} \quad \rightarrow \hat{a}_{44} = 0,68$$

portanto, como todos os \hat{a}_{ij} são positivos, pelo Teorema V.3, o sistema da Figura V.1 com a $G(s)$ dada é absolutamente estável A_∞ . Uma das realizações possíveis é dada pelas matrizes:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -0,8 & -1 & 0 & 0 \\ 0,7 & -2,2 & +1 & 0 \\ 0 & -1,03 & -0,32 & 1 \\ 0 & 0 & -1,78 & -0,68 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = [0, 1, 0, 0]' \\ \bar{C} = [1, 0, 0, 0]$$

Exemplo V.4: |⁵⁸|

$$G(s) = \frac{k(s+a)}{(s+b)(s^2+cs+d)}$$

as condições suficientes para a estabilidade absoluta A_∞ neste caso são:

(i) $a, b, c, d, k > 0$

(ii) $c > a$

Estas condições decorrem do fato de podermos obter a seguinte realização:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -b & 0 & 0 \\ -k & -a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & -a \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \phi(y); \quad y = [0, 1, 0] \underline{x} \quad (V.16)$$

onde: $a_{22} = c - a$

$$a_{23} a_{32} = (c - a) \cdot a - d$$

Considerando o sistema (V.16) e analisando as condições em que $(A * bc)$ apresenta estrutura favorável temos o seguinte: Neste caso $\Delta G(s) = 2$ e podemos utilizar o Teorema V.4 e o Corolário IV.3 (caso IIa); para que o sistema tenha estrutura favorável relativa ao caso IIa devemos ter as seguintes con-

dições:

$$(1) \quad a_{ij} < 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \leftrightarrow \quad b > 0, \quad (c-a) > 0, \quad a > 0$$

$$(2) \quad a_{12} \cdot b_1 < 0 \quad \leftrightarrow \quad k > 0$$

$$(3) \quad \det(A) < 0 \quad \leftrightarrow \quad a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = \\ (c-a) \cdot a - a_{23}a_{32} = d > 0$$

O que demonstra a suficiência das condições (i) e (ii). Cabe ressaltar que tais condições que são algébricas, dificilmente seriam obtidas a partir de métodos frequenciais.

Obs: Note-se, no exemplo acima, que se $a_{23}a_{32} = (c-a) \cdot a - d < 0$ ($A * b \ c$) será uma matriz sign stable e a estabilidade absoluta decorre do Corolário IV.4. Caso $(c-a) \cdot a - d > 0$ a condição (iv) do Corolário IV.3 é satisfeita i.e. $\det \bar{A}^+ < 0$. O caso $(c-a) \cdot a - d = 0$ não pode ocorrer, visto que neste caso o sistema V.16 é redutível ($G(s)$ é redutível).

Exemplo V.5 $|^{103}|$: Seja o sistema abaixo, dado na sua representação de estados:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \phi(y); \quad \phi(.) \in A_\infty \quad (V.17)$$

$$y = [1, 1] \underline{x}$$

Utilizando métodos frequenciais baseados no critério de Popov; Siljak e Weissenberger [103] determinaram uma função de Lyapunov que garante estabilidade absoluta do sistema no setor $[0; 41,6]$. Porém, utilizando-se os resultados da seção anterior, computando-se $G(s)$ obtemos:

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 4s + 4}$$

e aplicando-se o Algoritmo V.1 temos a seguinte realização, ou representação equivalente do sistema (V.17)

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \phi(y) \quad (V.18)$$

$$y = [1, 0] \cdot \bar{x}$$

e pelo Corolário IV.4 temos que o sistema (V.18) e consequentemente $\underline{x} = 0$ do sistema (V.17) é absolutamente estável no setor positivo infinito, $0 \leq k < \infty$.

Este exemplo também ilustra o fato de como uma representação matemática do mesmo sistema e que apresenta uma estrutura "favorável" possibilita a obtenção de resultados sensivelmente menos conservativos.

Claramente os Teoremas V.1 a V.4 constituem-se em novos critérios algébricos para análise de estabilidade absoluta de sistemas do tipo (V.1), todavia desejamos enfatizar o fato de que, a par da utilidade no problema da análise, os algoritmos acima derivados são de grande utilidade no problema da síntese de sistemas absolutamente estáveis ^[40], ^[92] de vez que os métodos frequenciais são menos adequados ao problema da síntese.

V.4 - ESTRUTURAS SIGN STABLE E PASSIVIDADE

Considerando o fato de que os sistemas da classe (V.1), com $G(s)$ satisfazendo às condições dos Teoremas V.1 e V.3 admitem realizações que apresentam elevada insensibilidade ou "robustez" do ponto de vista da estabilidade, ou seja, podemos realizar sistemas do tipo (V.1) nos quais a matriz $[\bar{A} * \bar{b}c]$ é sign stable. Isto implica no fato de que mesmo havendo variações nos valores numéricos dos elementos de \bar{A} , \bar{b} e \bar{c} , sem que seja alterada sua estrutura de sinais, o sistema continuará sendo absolutamente estável.

A partir deste fato, uma questão que pode ser colocada é a seguinte: "haveria uma relação entre a realizabilidade de uma função de transferência sob uma estrutura sign stable e a realização de sistemas passivos ^[52], ^[75], ^[98] e por conseguinte uma relação com funções reais positivas e hiper-estabilidade ^[4], ^[84], ^[85]" ?

Esta questão parece bastante natural de vez que sistemas passivos têm características que lhes dão uma "vocaçãõ" natural para a estabilidade [52], [85].

No capítulo subsequente mostra-se a existência de uma estreita relação entre estruturas sign-stable e redes passivas, ou seja, mostra-se que é possível, por uma escolha conveniente das variáveis de estado de circuitos RLC, dar-lhes uma representação com estrutura "sign-stable". Fato que foi utilizado na determinação da síntese destes circuitos a partir destas realizações "sign stable". Todavia os limites precisos da relação sign-stability - passividade, do ponto de vista formal, ainda não foram estabelecidos.

Considerando que tal questão merece uma investigação mais aprofundada, podemos no entanto estabelecer algumas conclusões baseadas em resultados que caracterizam a passividade em termos da estrutura interna do sistema [52], [84], [98].

Dado o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$$

(V.19)

$$\underline{y} = C\underline{x}$$

com $\underline{x} \in R^n$; $\underline{u}, \underline{y} \in R^m$ e A, B, C , matrizes constantes de dimensões adequadas, temos a seguinte:

Definição V.1 ^[98]: O sistema (V.19) é chamado passivo se e somente se para $\underline{x}(0) = 0$ temos

$$\int_0^T \underline{u}'(t) \cdot \underline{y}(t) dt \geq 0, \forall T \geq 0 \quad (V.20)$$

para toda $\underline{u}(t)$ quadrado integrável .

Do ponto de vista da teoria de circuitos, de onde o conceito de passividade tem origem, a relação (V.20) representa a "energia fornecida" ao sistema, portanto a passividade é definida em termos da não-negatividade desta energia. Do ponto de vista da teoria de sistemas e sistemas de controle, o conceito físico e implicações de passividade são menos evidentes, de vez que a conceituação do que representa a "energia do sistema" não fica suficientemente caracterizada ^[75].

Dado que a relação entre sistemas passivos e funções reais positivas é conhecida ^[52], ^[115], nos preocuparemos somente em situar as $G(s)$ (no caso uma entrada uma saída) que têm realização "sign stable", no contexto de sistemas passivos.

Embora a passividade, como definida acima, esteja baseada na relação entrada-saída do sistema (V.19) é possível determiná-la a partir da estrutura interna deste sistema ^[52]. Este fato nos permite situar os sistemas que apresentam estrutura sign-stable em relação aos sistemas passivos como é mostrado a seguir.

Para o sistema (V.19) os pares (A, B) e (A, C) são admitidos completamente controlável e observável respectivamente. Consideremos os seguintes resultados:

Teorema V.5 ^[52]: Condições necessárias e suficientes para que o sistema (V.19) seja passivo são que: exista uma matriz definida positiva $P(n \times n)$ e uma matriz $L(n \times m)$ tais que as relações

$$A'P + PA = -LL' \quad (\text{V.21a})$$

$$B'P = C \quad (\text{VI.2b})$$

sejam verificadas.

Para o caso em que as matrizes B e C são respectivamente $(n \times 1)$ e $(1 \times n)$, ou seja, (V.19) corresponde à parte linear do sistema (V.1), em termos da função de transferência escalar $G(s)$, tem-se o seguinte:

Teorema V.6 ^[98]: Para que o sistema (V.19), com $B(n \times 1)$ e $C(1 \times n)$ seja passivo é necessário que $G(s) = c(sI - A)^{-1} b$ satisfaça as seguintes condições:

(i) tenha $n-1$ zeros finitos

(ii) tenha todos os $n-1$ zeros finitos no semi-plano lateral esquerdo (fechado) do plano complexo.

Obs: O resultado acima, embora conhecido na literatura referente a teoria de circuitos [105], [109], foi generalizado para o caso multivariável [98].

Utilizando o Teorema V.5 podemos mostrar o seguinte:

Lema V.6: O sistema (caso particular de (V.19))

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + b u$$

(V.22)

$$y = c \underline{x}$$

no qual: (i) A é sign stable

(ii) $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)'$ e

$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ são tais que

b_k e c_k ($1 \leq k \leq n$) são únicos elementos não nulos com $b_k c_k > 0$

é um sistema passivo.

Prova: Como A é sign stable então pelo Corolário III.4 existem matrizes diagonais $P > 0$, $P = \text{diag}[p_1, p_2, \dots, p_n]$ e $LL' \geq 0$

tais que (V.21a) se verifica. Dado uma matriz P diagonal que satisfaz (V.21a), a expressão (V.21b) fica reduzida a $b_k p_k = c_k$. É fácil ver que se P é solução diagonal de (V.21a), para qualquer real $K > 0$, KP também é solução, então tomando-se um $K > 0$ tal que

$$K = \frac{c_k}{b_k p_k}, \text{ a relação (V.21b) é verificada}$$

Tendo em vista as características da função de transferência (V.13a) do sistema (V.2) podemos ainda concluir o seguinte:

As funções de transferência que satisfazem as condições do Teorema V.3, ou seja, que têm realização sob estrutura "sign stable" não correspondem a funções de transferência de sistemas passivos e portanto as realizações com estruturas "sign-stable" correspondentes não se constituem em sistemas passivos. Isto pelo fato de que neste caso $\Delta G(s) = 2$ e portanto o sistema tem $n-2$ zeros finitos e não satisfaz às condições do Teorema V.6.

A questão que se colocava em relação aos sistemas do tipo (V.1) com estrutura (ou realização) sign stable era a seguinte: "Seriam os sistemas do tipo (V.1) com estrutura "sign stable" um caso particular de sistemas passivos?" Claramente pelo exposto acima, a resposta é negativa, embora haja uma grande interseção entre estas duas classes de sistemas.

Dado a identificação existente entre sistemas passivos, funções reais positivas [115] e hiperestabilidade [4], [84], pode-se concluir que as funções de transferência relativas aos Teoremas V.1 e V.2 são funções reais positivas e conseqüentemente os sistemas correspondentes são hiperestáveis.

O fato acima foi explorado para, a partir dos algoritmos de realização, determinar métodos de síntese de redes passivas como é mostrado no capítulo subsequente.

Note-se que o Algoritmo V.1 constitui-se em um método algébrico que pode ser utilizado na síntese de funções reais positivas e por conseqüência na síntese de sistemas hiperestáveis [4], [84], o que poderá ser de utilidade no projeto de sistemas auto-adaptativos [63].

Concluindo este capítulo queremos salientar que o problema de realizações em estruturas favoráveis deverá ser explorado no caso de várias não-linearidades, (o problema da seção VI.1 é um exemplo) assim como no caso de outros tipos de estruturas que não necessariamente Jacobi, visto que, se forem de

terminadas formas sistemáticas de se obter estas realizações, tal fato poderá determinar novos critérios algébricos para análise e síntese de sistemas não-lineares nos casos mais gerais.

No caso do problema da síntese de sistemas não-lineares, com várias não-linearidades, a aplicação relativa aos sistemas de energia elétrica tratada na seção VI.1 constitui-se em um exemplo da viabilidade da aplicação das técnicas de realização de estruturas favoráveis para os casos mais gerais.

Outro aspecto que ainda cabe ressaltar é o de que no problema de não-linearidades contidas em setores finitos; $f(.) \in A_k$ onde $A_k = \{f(.) | 0 < \frac{f(x)}{x} < k, x \neq 0\}$, alguns exemplos tratados pelos critérios algébricos desenvolvidos neste capítulo, apresentam resultados que justificam uma pesquisa explorando esta questão.

CAPÍTULO VI

APLICAÇÕES

A finalidade deste capítulo é o de apresentar algumas aplicações dos resultados da abordagem estrutural contidos nos capítulos precedentes. São abordados dois problemas basicamente distintos: o primeiro trata da estabilidade de um sistema de n -máquinas síncronas interconectadas, e o segundo trata do problema da síntese de redes passivas lineares e invariantes no tempo.

Em ambos casos exploram-se as características inerentes à estrutura destes sistemas. A partir da abordagem proposta, mostra-se como o fato de se considerar a estrutura, de uma maneira explícita ou implícita, auxilia no tratamento do problema da estabilidade de sistemas complexos.

No primeiro problema (não-linear), verifica-se que certas peculiaridades de sua estrutura permitem utilizar a abordagem estrutural na determinação de resultados para o problema de controle P-f (Potência-frequência) do sistema multi-máquinas. Mostra-se que é possível, utilizando os algoritmos de realização (capítulo V), sintetizar controladores para cada uma das n -máquinas, de uma maneira descentralizada, os quais por sua vez asseguram a estabilidade absoluta do sistema interconectado.

No segundo problema, a partir de uma definição adequada das variáveis de estado que descrevem as redes passivas do tipo ladder RLC, verifica-se a existência de uma íntima relação entre a estrutura destas redes e as estruturas do tipo Jacobi sign stable. Este fato é explorado para, com base nos algoritmos de realização de estruturas Jacobi sign stable (Capítulo V), determinar métodos sistemáticos alternativos para a obtenção da síntese destas redes.

VI.1 - SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA: COM CONTROLE (P-f) DESCENTRALIZADO

A aplicação do método direto de Lyapunov ao problema da estabilidade de um sistema de n -máquinas síncronas interconectadas tem sido objeto de inúmeros trabalhos [112], [80], [25], [24]. A maioria destes trabalhos utiliza, como hipóteses simplificadoras, desprezar a dinâmica dos reguladores de velocidade de cada uma das máquinas, ou então, considerá-las a partir de modelos extremamente simplificados. Por outro lado, trabalhos que incluem a dinâmica dos reguladores, determinam condições suficientes de estabilidade absoluta a partir de funções de Lyapunov do tipo Lur'e. Estas condições, no entanto, são dadas de uma maneira implícita em termos da resolução de equações matriciais algébricas não-lineares bastante complexas [112], [24].

A partir da utilização da abordagem estrutural proposta neste trabalho é possível demonstrar um resultado inte

ressante. Este resultado, considerado não intuitivo, basicamente mostra que: a estabilização local de cada área (ou máquina) quando feita de uma maneira "adequada", implica na estabilização do sistema global. Esta estabilização "adequada", no caso, é obtida a partir de uma "realização" sign-stable das equações que regem a dinâmica de cada uma das áreas. São considerados tanto os reguladores de velocidade, bem como as não-linearidades referentes às interconexões entre as máquinas.

Como consequência deste resultado, as condições suficientes para a estabilidade do sistema interconectado podem ser colocadas explicitamente de uma maneira descentralizada, ou seja, conjuntos de condições relativas aos parâmetros de cada uma das áreas em separado.

Observe-se que a estabilização a que nos referimos, significa a estabilidade absoluta no setor positivo infinito em relação às não-linearidades presentes e não apenas a estabilidade local em relação a um ponto de operação. Neste caso a condição de setor positivo infinito, juntamente com a função de Lyapunov obtida para o sistema, pode ser utilizada na determinação do domínio de estabilidade em torno do ponto de operação ^[112]. Cabe ressaltar que a função de Lyapunov que garante a estabilidade absoluta do sistema é obtida de uma maneira inédita e bastante simples a partir dos resultados dos capítulos II e III.

Pelo fato de que, pelo método proposto, as condições de estabilidade absoluta são dadas de uma maneira explícita em termos dos ganhos das realimentações referentes a cada máquina, elas também podem ser utilizadas no problema da síntese de reguladores. Este aspecto foi explorado em [92] para sintetizar, no caso de duas máquinas, reguladores que asseguram estabilidade absoluta e que são localmente ótimos sob um determinado critério quadrático.

VI.1.1 - Descrição do Sistema e Modelo Matemático

Com a finalidade de manter a frequência nominal do sistema, assim como as potências de interligação prescritas, independentemente das variações de carga; é necessário estabelecer uma estratégia de controle adequada. No caso em que as variações de carga são do tipo degrau, estas podem ser compensadas pela inclusão de uma integração do sinal ACE_i (Area Control Error) [26]. No caso de variações mais gerais da carga, do tipo polinomial seria necessária a inclusão de integradores em cascata [24].

Considerando, sem perda de generalidade, o caso de perturbações em degrau, será utilizado apenas um integrador para cada máquina (o que é convencionalmente utilizado nos sistemas reais). A partir das hipóteses simplificadoras, explicitadas mais adiante, o diagrama de blocos correspondente ao sistema representativo de cada área é dado pela figura a seguir.

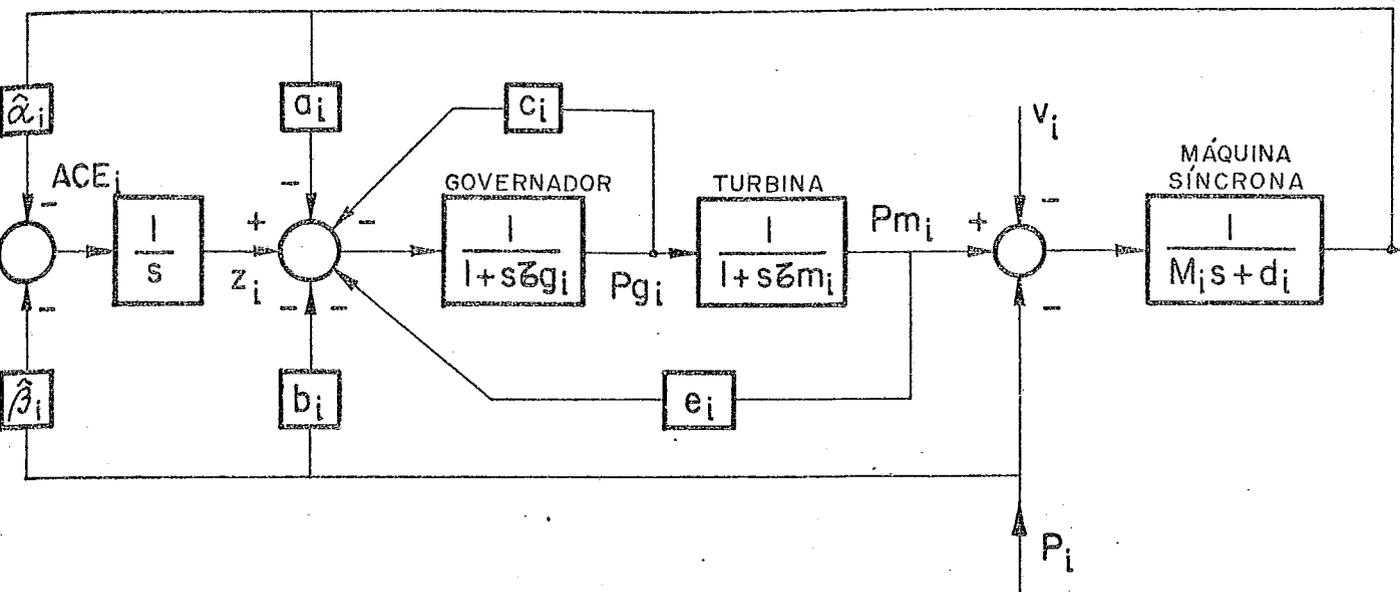


Figura VI.1 - Diagrama de blocos do sistema de geração relativo a cada uma das áreas

onde para a i -ésima área temos:

r_i : sinal de referência

ACE_i : sinal de erro para controle de geração da área (Area Control Error)

w_i : velocidade da máquina

M_i : inércia mecânica do rotor

d_i : amortecimento da máquina

τ_{m_i} : constante de tempo da turbina

P_{m_i} : potência mecânica fornecida pela turbina

τ_{g_i} : constante de tempo do governador

P_{g_i} : posição da válvula do governador

P_i : potência de interligação ("tie line")

v_i : perturbação (variação na carga)

$\tilde{\alpha}_i, a_i, \tilde{\beta}_i, b_i, c_i, e_i$: ganhos do regulador

Verifica-se (Figura VI.1), que a estratégia de controle adotada é descentralizada, visto que somente são utilizadas informações locais na composição do sinal de controle u_i . O sinal P_i (potência de interligação ("tie-line") da i -ésima área) é localmente mensurável [24].

Assumindo as hipóteses, abaixo:

- (a) as máquinas síncronas são consideradas como sendo uma tensão constante atrás de sua reatância transitória.
- (b) as reatâncias das linhas de transmissão são desprezadas.
- (c) os modelos dinâmicos da turbina e governador são considerados lineares.
- (d) as não-linearidades devidas às interconexões da rede são mantidas.

O sistema de n-máquinas interconectadas pode ser descrito, sob uma forma conveniente, pelas seguintes equações diferenciais: (o índice i refere-se à i-ésima área).

$$S_i \dot{x}_i = A_i x_i + \gamma_i \phi(\underline{\sigma}) + D_i v_i + B_i u_i + G_i r_i \quad (\text{VI.1})$$

$$\dot{\underline{\sigma}} = \beta \underline{x}$$

onde:

$$x_i' = [w_i, P_{m_i}, P_{g_i}, Z_i]; S_i = \text{diag}[M_i, \tau_{m_i}, \tau_{g_i}, 1]$$

$$\underline{x}' = (x_1', x_2', \dots, x_n')$$

$$A_i = \begin{bmatrix} -d_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\hat{\alpha}_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; G_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; D_i = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e $\underline{\sigma}' = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m]$ é definido a partir das diferenças de ângulos de potência $\theta_{ij} = (\delta_i - \delta_j)$ entre a i-ésima e a j-ésima máquinas, ou seja:

$$\sigma_1 = \theta_{12}; \sigma_2 = \theta_{13}; \dots; \sigma_{n-1} = \theta_{1n}; \sigma_n = \theta_{23}; \sigma_{n+1} = \theta_{24} \dots \text{etc.}$$

$$m = (n-1)n/2$$

Neste caso, chamando de T_i aos n -vetores de dimensão m que formam a matriz C_n dada por:

$$C_n = [T_1 \ : \ T_2 \ : \ \dots \ : \ T_n]; \quad n \geq 2 \quad (\text{VI.2})$$

onde:

$$C_2 = [1 \quad -1]$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad C_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \text{etc.} \quad (\text{VI.3a})$$

temos que:

$$\beta = [\beta_1 \ : \ \beta_2 \ : \ \dots \ : \ \beta_n]; \quad \beta_i = [T_i \ : \ 0 \ : \ 0 \ : \ 0]; \quad (\text{VI.3b})$$

$$\gamma_i' = [-T_i \ : \ 0 \ : \ 0 \ : \ -\bar{\beta}_i \cdot T_i] \quad (\text{VI.3c})$$

$$\underline{\phi}(\underline{\sigma})' = (\phi_1(\sigma_1), \phi_2(\sigma_2), \dots, \phi_m(\sigma_m))$$

Para o caso de máquinas de polos lisos $\phi_k(\sigma_k) = F_{ij} \text{sen}(\sigma_k)$; onde F_{ij} é o coeficiente de sincronização entre a

i -ésima e a j -ésima máquinas.

Considerando o sistema de n -máquinas, representado na forma das equações (VI.1), convém ressaltar que uma condição adicional é necessária para que (VI.1) represente corretamente o sistema físico. Esta condição adicional refere-se à dependência linear entre as variáveis σ_k (diferenças de ângulo) e é expressa pela relação:

$$(\sigma_n, \sigma_{n+1}, \dots, \sigma_n)' = -C_{n-1}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1})' \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{VI.4})$$

C_{n-1} dada por (VI.3a).

Note-se que (VI.4) não está implícita no sistema (VI.1) e portanto tem que ser associada à equação (VI.1) para que se obtenha uma representação correta do sistema físico.

Sem perda de generalidade, considerando os ganhos dos reguladores, tal que $c_i = e_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, o sinal de controle será dado por:

$$u_i = Z_i - a_i w_i - b_i P_i \quad (\text{VI.5})$$

O ponto de equilíbrio do sistema (VI.1) ou equivalentemente, o ponto de operação em regime é dado a partir das relações:

$$-\hat{\beta} C_n' \phi(\underline{\sigma}^*) = \underline{r}; \quad \underline{w}^* = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{VI.6})$$

onde: $\underline{r}' = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ e $\tilde{\beta} = \text{diag}[\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n]$

$$\underline{w}^* = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*); \underline{\sigma}^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_m^*)$$

Observe-se que $\underline{\sigma}^*$ e \underline{w}^* são determinados independentemente dos valores de V_i (constantes). Caso o ponto de operação seja assintoticamente estável, após uma perturbação (em degrau) o sistema tenderá (assintoticamente) para as condições (VI.6) após um determinado transiente.

O problema da estabilidade pode ser facilmente reduzido ao estudo da estabilidade em relação à origem, considerando-se neste caso o modelo incremental dado abaixo (o ponto de operação após a perturbação é dado por $(\underline{x}^*, \underline{\sigma}^*)$):

$$S_i \dot{\underline{\xi}}_i = \tilde{A}_i \underline{\xi}_i + \tilde{\gamma}_i \psi(\underline{\delta}) \quad (\text{VI.7})$$

$$\dot{\underline{\delta}} = \beta \underline{\xi}$$

onde $\underline{\xi}_i = \Delta \underline{x}_i = \underline{x}_i - \underline{x}_i^*$; $\underline{\delta} = \Delta \underline{\sigma} = \underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*$

$$\underline{\psi}'(\underline{\delta}) = (\psi_1(\delta_1), \psi_2(\delta_2), \dots, \psi_m(\delta_m))$$

$$\psi_k(\delta_k) = \phi_k(\delta_k + \sigma_k^*) - \phi_k(\sigma_k^*), \quad (\psi_k(0) = 0), \quad k=1, 2, \dots, m$$

$$\underline{\xi}' = (\xi_1', \xi_2', \dots, \xi_n')$$

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} -d_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -a_i & 0 & -1 & 1 \\ -\tilde{\alpha}_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\gamma}_i = \begin{bmatrix} -T_i' \\ \dots\dots\dots \\ 0 \\ \dots\dots\dots \\ -b_i, T_i' \\ \dots\dots\dots \\ -\tilde{\beta}_i, T_i' \end{bmatrix}$$

VI.1.2 - 0 Sistema sem os Reguladores

Para proporcionar um melhor entendimento da estrutura básica do sistema multi-máquinas, eliminamos a dinâmica dos reguladores, neste caso o modelo incremental é da forma (VI.7) com:

$$\underline{\xi}_i = w_i; \quad \tilde{A}_i = -d_i; \quad \tilde{\gamma}_i = -T_i'; \quad S_i = M_i; \quad \beta = C_n.$$

Chamando $M = \text{diag}(M_i)$ e $D = \text{diag}(d_i)$ o sistema (VI.7) pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{w}} \\ \dot{\underline{\delta}} \end{bmatrix} = \hat{A} \begin{bmatrix} \underline{w} \\ \underline{\psi}(\underline{\delta}) \end{bmatrix} \quad (\text{VI.8})$$

onde:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} M^{-1} & & 0 \\ & \vdots & \\ \dots & \times & \dots \\ 0 & & I_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -D & & -C_n' \\ & \vdots & \\ \dots & \times & \dots \\ C_n & & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}; \quad \underline{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_m \end{bmatrix} \quad (\text{VI.9})$$

Desde que o sistema (VI.8) é do tipo (II.5), com estrutura favorável (\tilde{A} é D-anti-simétrica, cf. Definição III.20) com $\tilde{A} \in \mathcal{D}_2$, portanto pelo Teorema (II.5) uma função de Lyapunov possível para o sistema (VI.8) é dada por:

$$V(\underline{w}, \underline{\delta}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i w_i^2 + \sum_{k=1}^m \int_0^{\delta_k} \psi_k(\varepsilon) d\varepsilon \quad (\text{VI.10})$$

A derivada temporal $\dot{V}(\underline{w}, \underline{\delta})$ ao longo da solução de (VI.8) neste caso é dada por:

$$\dot{V}(\underline{w}, \underline{\delta}) = - \sum_{i=1}^n d_i w_i^2 \quad (\text{VI.11})$$

e onde, a partir de (VI.4), a relação entre as variáveis δ_i ; $i = 1, \dots, m$ é mantida, ou seja:

$$(\delta_n, \delta_{n+1}, \dots, \delta_m)' = -C_{n-1}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1})' \quad (\text{VI.12})$$

Neste caso, admitindo que o sistema de n -máquinas é fortemente conexo, tem-se que: $(n-1)$ das funções $\psi_k(\delta_k)$ (com os δ_k 's independentes) associadas às interconexões entre máquinas não são identicamente nulas.

A partir deste fato e utilizando o Teorema de LaSalle demonstra-se que o sistema (VI.8) é absolutamente estável no setor positivo infinito em relação às não-linearidades $\psi_k(\cdot)$ não identicamente nulas. (Vide Apêndice A5).

A função de Lyapunov (VI.10) que é a função energética do sistema, utilizada em outros trabalhos, foi aqui obtida diretamente a partir de considerações da estrutura (favorável) do sistema, determinada pela matriz \hat{A} (VI.9).

Quando são incluídos os reguladores, esta estrutura favorável em princípio é alterada, todavia utilizando-se uma "realização" conveniente para o sistema de equações representativo de cada uma das áreas podemos novamente recair no caso de uma estrutura favorável como é mostrado em seguida.

VI.1.3 - O Sistema com os Reguladores

Neste caso, como vimos, as equações que representam o sistema são dadas pela equação (VI.7). Este sistema será considerado como sendo um sistema interconectado composto de n sub-sistemas lineares interconectados por funções não-lineares, ou seja, cada um dos n sub-sistemas é descrito por:

$$(S_i): \dot{\xi}_i = S_i^{-1} \tilde{A}_i \xi_i; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (VI.13)$$

A partir desta decomposição, cabe ressaltar que as interconexões não são feitas diretamente pelas funções não

lineares $\psi(\cdot)$, estas interconexões são feitas a partir das integrais das variáveis de cada sub-sistema combinadas linearmente (δ). Em outras palavras, podemos dizer que as interconexões são dinâmicas (integrações). A Figura VI.2 ilustra este tipo de interconexão entre os sub-sistemas (VI.13) e neste caso o sistema global interconectado pode ser representado pela equação diferencial abaixo:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\xi}} \\ \dot{\tilde{\delta}} \end{bmatrix} = S^{-1} A \begin{bmatrix} \tilde{\xi} \\ \psi(\tilde{\delta}) \end{bmatrix} \quad (\text{VI.14})$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A} & & \tilde{\gamma} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \beta & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \text{diag}[\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n]; S = \text{diag}[S_1, S_2, \dots, S_n]$$

$$\tilde{\gamma} = (\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_n^i)$$

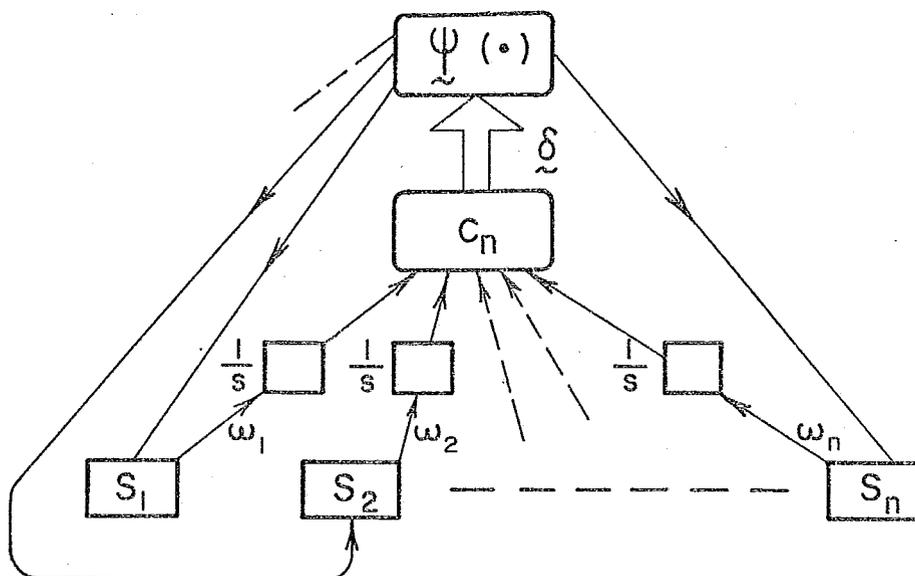


Figura VI.2 - Estrutura das interconexões entre os sub-sistemas (VI.13)

Analisando o sistema (VI.14), verifica-se que este não apresenta uma estrutura favorável de uma maneira explícita. Neste caso busca-se obter uma nova representação, a partir de uma mudança de variáveis conveniente, tal que o sistema (VI.14) seja representado por uma nova equação e que apresente uma estrutura favorável.

Pretende-se, em outras palavras, obter uma "realização" do sistema (VI.14) sob uma estrutura favorável. Como o sistema (VI.14) é um sistema com m não-linearidades, em princípio os "algoritmos de realização" da seção V.2.2 não seriam aplicáveis ao caso.

Considerando, no entanto, as peculiaridades da estrutura do sistema, pode-se aplicar os "algoritmos de realização" a cada um dos n sub-sistemas em separado e obter uma realização, sob estrutura favorável, para o sistema interconectado.

Tomando o caso de uma máquina (i -ésima) contra barramento infinito, as equações diferenciais que a representam são dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_i &= w_i \\ \dot{\xi}_i &= S_i^{-1} \tilde{A}_i \xi_i + S_i^{-1} \tilde{b} \psi_i(\delta_i) \end{aligned} \quad (\text{VI.15})$$

onde $\tilde{b}' = [-1, 0, -b_i, -\tilde{\beta}_i]$

Utilizando-se o Algoritmo A.1 obtêm-se o sistema equivalente a (VI.15) na forma Jacobi [92]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_i \\ \dot{\eta}_i \end{bmatrix} = \bar{A}_i \begin{bmatrix} \delta_i \\ \eta_i \end{bmatrix} + \bar{b} \psi_i(\delta_i) \quad (\text{VI.16})$$

$$\text{onde } \bar{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d_i}{M_i} & \frac{(a_{23})_i}{M_i} & 0 & 0 \\ 0 & -(a_{23})_i & -(a_{33})_i & -(a_{34})_i & 0 \\ 0 & 0 & -(a_{34})_i & -(a_{44})_i & -(a_{45})_i \\ 0 & 0 & 0 & -(a_{45})_i & -(a_{55})_i \end{bmatrix}; \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/M_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A partir dos parâmetros do sistema, chamando

$$(\rho_1)_i = (1+b_i)/(\tau_{m_i} \cdot \tau_{g_i}); (\rho_0)_i = \hat{\beta}_i/(\tau_{m_i} \cdot \tau_{g_i});$$

$$(\theta_1)_i = d_i/M_i - (a_i/M_i - \hat{\beta}_i); (\theta_0)_i = (d_i \cdot \hat{\beta}_i/M_i - \hat{\alpha}_i/M_i)/b_i$$

temos as relações para os coeficientes da nova representação (VI.16):

$$(a_{23})_i^2 = -b_i M_i / (\tau_{m_i} \cdot \tau_{g_i}); (a_{33})_i = 1/\tau_{m_i} + 1/\tau_{g_i} - (\theta_1)_i \quad (\text{VI.17})$$

$$(a_{34})_i^2 = -(\rho_1)_i (a_{33})_i \cdot (\theta_1)_i - (\theta_0)_i; (a_{55})_i = ((\rho_0)_i - (a_{33})_i \cdot (\theta_0)_i) / (a_{34})_i^2$$

$$(a_{45})_i^2 = (\theta_0)_i - (a_{44})_i - (a_{55})_i; (a_{44})_i = (\theta_1)_i - (a_{55})_i$$

Caso os parâmetros da máquina sejam tais que as relações acima forneçam valores positivos para os coeficientes

a_{ij} em (VI.17), o sistema (VI.16) terá uma estrutura Jacobi sign stable. Neste caso haverá uma transformação (para cada máquina) dada por matrizes não singulares T_i tais que: $\xi_i = T_i \eta_i$. Estas transformações têm a seguinte característica:

$$\xi_i = \begin{bmatrix} 1 & & & 0_{1,3} \\ & \vdots & & \\ \dots & & \dots & \\ L_i & & & K_i \end{bmatrix} \eta_i \quad (\text{VI.18})$$

Note-se que a variável δ_i não foi alterada ao se passar da forma (VI.15) para a forma (VI.16). Por esta razão, se a transformação $\xi \rightarrow \eta$ for feita a partir de (VI.18) o sistema global (VI.14) passa a ter a forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \eta \\ \psi(\delta) \end{bmatrix}; \quad \bar{A} = D_M \cdot \begin{bmatrix} J & \vdots & -\beta' \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.19})$$

onde: $D_M = \text{diag}[M_1, I_3, M_2, I_3, \dots, M_n, I_3, I_m]$

I_3 e I_m são as matrizes identidade (3x3) e (mxm) respectivamente.

β : definida em (VI.3a) e (VI.3b)

$J = \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_n]$

J_i é a sub-matriz de \bar{A}_i na forma Jacobi, ou seja:

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & \vdots & & & J_i & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

No caso de cada uma das matrizes J_i ser sign stablem o sistema (VI.19) apresenta estrutura D-anti-simétrica (Definição III.20) e a partir do Teorema (II.5) uma função de Lyapunov possível é dada por:

$$V(\underline{\eta}, \underline{\delta}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \underline{\eta}_i^T P_i \underline{\eta}_i + \sum_{k=1}^m \int_0^{\delta_k} \psi_k(\tau) d\tau \quad (\text{VI.20})$$

$$P_i = \text{diag}[M_i, I_3].$$

Neste caso, embora $\dot{V}(\underline{\eta}, \underline{\delta})$ seja semi-definida positiva, pelo Teorema II.4 (LaSalle), a estabilidade assintótica é assegurada de uma maneira similar ao caso do sistema (VI.8) sem reguladores.

Obs: A determinação da função de Lyapunov nas variáveis originais ($\underline{\xi}$) pode ser feita a partir da transformação (VI.18).

Considerando o sistema multi-máquinas, a partir do que foi exposto nesta seção, podemos enunciar os seguintes resultados:

Resultado VI.1: "Se os parâmetros dos controladores de cada uma das n máquinas são tais que uma realização sign stable do tipo (VI.16) pode ser obtida, (assegurando a estabilidade assintótica para cada máquina contra barra-infinita) então o sistema global interconectado é absolutamente estável no setor positivo in finito em relação às não-linearidades $\psi(\cdot)$ "

Resultado VI.2: Caso as condições do resultado VI.1 sejam verificadas, então o sistema interconectado apresenta estabilidade (absoluta) "conectiva" $|^{100}|$, ou seja, a propriedade de estabilidade absoluta é invariante sob a supressão (ou adição) de linhas de transmissão.

Sobre os resultados acima deseja-se ressaltar os seguintes aspectos:

- (a) O resultado VI.2 não implicam que o novo equilíbrio seja necessariamente atingido após o transiente resultante da supressão de uma linha, isto pelo fato de que o sistema não é globalmente assintoticamente estável;
- (b) A maneira com que eles forem obtidos, a par de facilitar o problema da análise, favorece a determinação de condições para a síntese de controladores (P-f) no caso de n -máqui-

nas. Assim como a função de Lyapunov (VI.20) que foi obtida de uma maneira simples, pode ser utilizada na determinação do domínio de estabilidade assintótica do sistema global $|^{112}|$. Para tanto é necessário expressar a função de Lyapunov nas variáveis originais do sistema (vide transformação VI.18)).

VI.2 - SÍNTESE DE REDES PASSIVAS

A finalidade desta seção atem-se a dois aspectos básicos: o primeiro é mostrar a existência de uma estreita relação entre estruturas sign stable e redes passivas lineares invariantes no tempo; o segundo é o de mostrar como é possível explorar este fato, utilizando os "algoritmos de realização" derivados no capítulo anterior, para determinar novos métodos de síntese para este tipo de redes.

Alguns dos métodos assim obtidos, mostram-se mais simples e mais sistemáticos do que aqueles existentes na literatura relativa à síntese de circuitos. Em outros casos os métodos propostos carecem, por enquanto, de uma avaliação mais cuidadosa.

O que se deseja ressaltar, a partir do que é apresentado nesta seção, é o fato de que uma investigação mais ampla da relação existente entre sistemas passivos e "estruturas favoráveis" poderá contribuir, tanto na solução de problemas de síntese de sistemas passivos e hiper-estáveis $|^{63}|, |^{84}|$,

bem como possibilitar um melhor entendimento das propriedades de sistemas com "estrutura favorável". Entendendo-se por "sistemas com estrutura favorável" aqueles sistemas que têm a propriedade de admitirem funções de Lyapunov do tipo "diagonal".

Será tratado apenas o caso de estruturas Jacobi, o que corresponde ao caso das redes passivas do tipo "ladder", embora seja fácil ver que nos casos mais gerais, o tratamento seria semelhante. Para o caso de redes com estrutura ladder são abordados dois problemas típicos de síntese: (a) síntese de funções de transferência; (b) síntese de imitâncias de porta.

No problema da síntese de funções de transferência ativemo-nos ao caso das funções de transferência do tipo passa-baixas, sintetizadas por redes LC terminadas resistivamente em uma ou em ambas extremidades. Para estes dois casos foram propostas soluções alternativas comparadas, respectivamente, aquelas dadas pelo método "Recorrente-Continuante", ou de Holbrook [42] e o método de Jha e Prasad [45] o qual por sua vez é uma extensão do método Recorrente-Continuante para o caso de redes LC (ladder) duplamente terminadas.

No problema da síntese de imitâncias de porta, com estruturas ladder (RLC, LC ou RC), mostra-se a equivalência do Algoritmo V.1 (de realização de estruturas Jacobi) com o método de síntese de Cauer o qual por sua vez baseia-se no método da expansão por frações continuadas [18], [105].

VI.2.1 - Equações da Rede Ladder

Tomando-se a rede ladder esquematizada na Figura VI.3 na qual os blocos em sêrie são dados por suas impedâncias (Z_i) e os blocos em paralelo por suas admitâncias (Y_i), a partir das leis de Kirchhoff de corrente e tensão, escritas alternadamente, chega-se às equações da rede:

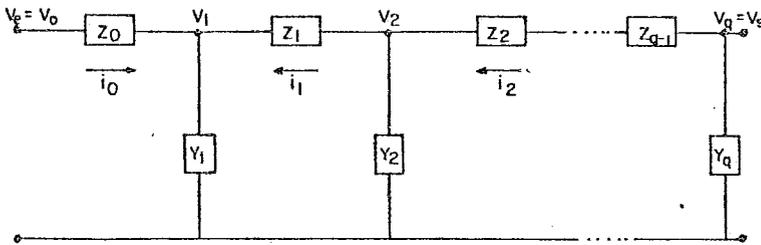


Figura VI.3 - Estrutura básica da rede ladder

$$Y_1 V_1 = i_0 - i_1$$

$$Z_1 i_1 = -V_1 + V_2$$

$$Y_2 V_2 = -i_1 + i_2$$

$$Z_2 i_2 = -V_2 + V_3$$

⋮

$$Z_{q-1} i_{q-1} = -V_{q-1} + V_q$$

$$Y_q V_q = -i_{q-1}$$

(VI.21)

Observa-se que a estrutura do sistema (VI.21) é uma estrutura Jacobi e considerando os casos mais usuais de redes RLC, quando escrevemos as equações dinâmicas relativas ao sistema (VI.21), a estrutura básica é preservada, ou seja, o sistema de equações diferenciais continua apresentando uma estrutura Jacobi. No caso de redes RLC teremos estruturas Jacobi sign stable e no caso RC teremos outro tipo de estrutura Jacobi favorável, como será visto nos casos a seguir.

VI.2.2 - Síntese de Funções de Transferência

O problema da síntese de uma função de transferência do tipo passa-baixas, por meio de uma rede ladder LC do tipo da Figura (VI.3), é aqui considerado para dois casos; o caso em que a rede (LC) possui resistência em apenas uma das extremidades e o caso em que tem resistência em ambas as extremidades. As vantagens da segunda configuração sobre a primeira prendem-se ao fato de esta possuir características de sensibilidade mais baixa $|^{20}|$.

Para o caso da síntese de funções de transferência do tipo passa-baixas, por redes ladder LC terminadas resistivamente em uma extremidade, é sugerido um método baseado em uma realização Jacobi sign stable na forma de Schwarz $|^{97}|, |^5|$. Este método sob certos aspectos assemelha-se ao método Recorrente-Continuante proposto por Holbrook, porém apresenta vantagens sobre este último por eliminar as operações com linhas e colunas de determinada matriz (na forma Recorrente) que são necessá

rias para a obtenção da forma Continuante (tridiagonal) [42].

O método aqui sugerido fornece a realização (e a síntese da rede) a partir dos coeficientes do polinômio (de Hurwitz) que determina o denominador da função de transferência passa-baixas do tipo "all pole". Verifica-se por outro lado, que há uma relação entre este método com outros métodos clássicos de síntese de funções de transferência.

Para o caso de redes ladder LC duplamente terminadas é proposto um método baseado no algoritmo de realização de estruturas Jacobi. A partir das relações (V.10) e (V.11) determina-se um sistema de equações algébricas não-lineares que uma vez solucionado, fornece os elementos de uma matriz Jacobi sign stable. A partir dos elementos desta matriz são facilmente determinados os elementos R, L, C da rede.

Este método por sua vez, assemelha-se àquele proposto por Jha e Prasad, na medida em que também busca a obtenção de uma matriz tridiagonal (Jacobi) a partir da função de transferência a ser sintetizada. Analogamente, neste último, também recai-se na necessidade da solução de sistemas algébricos não-lineares. Todavia o método proposto possibilita a obtenção sistemática das equações algébricas não-lineares, o que não ocorre no método de Jha e Prasad [45].

VI.2.2.1 - Redes Ladder LC Terminadas Resistivamente em uma Extremidade

O método de síntese proposto, para este caso, baseia-se em identificar a equação diferencial vetorial que representa a rede, com a forma canônica de Schwarz [97], [5]. Uma vez estabelecida esta identidade, os elementos R, L, C, da rede são obtidos a partir dos elementos da matriz de Schwarz. Os elementos da matriz de Schwarz, que é uma matriz Jacobi sign stable, são por sua vez obtidos a partir dos coeficientes do polinômio (de Hurwitz) que determina o denominador da função de transferência ("all pole") a ser sintetizada.

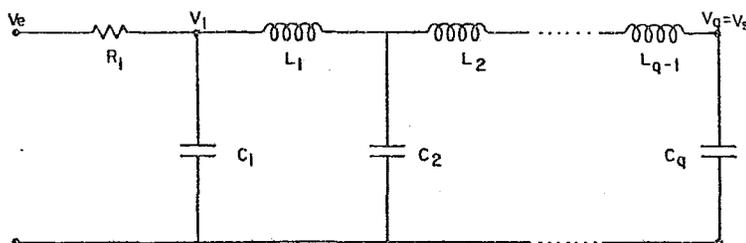


Figura VI.4 - Rede ladder LC terminada resistivamente em uma extremidade

Considerando a rede ladder LC esquematizada na Figura VI.4 podemos, a partir das equações (VI.21), representar a dinâmica da rede na forma da equação diferencial abaixo:

$$G_T(s) = c(sI-A)^{-1}b = \frac{(-1)^{n+1} \det A}{\det(sI-A)} \quad (\text{VI.24})$$

$$(-1)^{n+1} \det A = (R_1 C_1 L_1 C_2 L_2 \dots C_q)^{-1}$$

Analisando a estrutura da matriz A , devido ao fato de os elementos R_i , L_i , C_i serem positivos, temos que:

$$\text{sgn } A = \begin{bmatrix} - & + & & & \\ - & 0 & + & & \\ & - & 0 & & \\ & & & 0 & + \\ & & & - & 0 \end{bmatrix}$$

e pelo Teorema (III.11) a matriz A é sign-stable, e mais, tem a estrutura de uma matriz de Schwarz [97], [5].

Desde que, dado qualquer polinômio em s , com coeficientes reais e de grau n

$$P(s) = s^n + \sum_{i=1}^n \bar{a}_i s^{n-i} \quad (\text{VI.25})$$

podemos obter uma matriz $R = (r_{ij})$ $n \times n$ na forma de Schwarz tal que $P(s) = \det[sI-R]$ [5], dado que é possível obter sistematicamente os elementos da matriz R a partir dos coeficientes \bar{a}_i ; $i = 1, 2, \dots, n$, (vide seção V.1), estes fatos serão explora-

Chamando de D_i ao i -ésimo destes menores principais da matriz H , definimos os coeficientes w_i , $i = 1, 2, \dots, n$ tais que:

$$w_1 = D_1; w_2 = D_2/D_1; w_3 = D_3/D_1 D_2$$

$$w_4 = D_1 D_4 / D_2 D_3; \dots w_r = D_{r-3} D_r / D_{r-2} D_{r-1} \quad (\text{VI.29})$$

$$w_n = D_{n-3} D_n / D_{n-2} D_{n-1}.$$

Os elementos w_i também podem ser determinados a partir dos coeficientes do polinômio $P(s)$ dispostos segundo o algoritmo de Routh [32]:

$$1 \quad \bar{a}_2 \quad \bar{a}_4 \quad \bar{a}_6 \quad \dots$$

$$\bar{a}_1 \quad \bar{a}_3 \quad \bar{a}_5 \quad \bar{a}_7 \quad \dots$$

$$\alpha_2$$

$$\alpha_3$$

Chamando os termos da 1.^a coluna de $\alpha_0 = 1; \alpha_1 = \bar{a}_1$;

$\alpha_2 = (\bar{a}_1 \bar{a}_2 - \bar{a}_3) / \bar{a}_1 \dots$ etc., temos que:

$$w_1 = \alpha_1; w_2 = \alpha_2; w_3 = \alpha_3 / \alpha_1 \dots w_n = \alpha_n / \alpha_{n-2} \quad (\text{VI.30})$$

A partir dos elementos w_i , $i = 1, 2, \dots, n$ construímos a matriz $R = (r_{ij})$ na forma de Schwarz

$$R = \begin{bmatrix} -w_1 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & -w_3 & 0 & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & -w_n & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.31})$$

Obs: A matriz R (forma de Schwarz) também pode ser obtida sistematicamente a partir do método proposto por Datta [21].

Tomando-se a matriz R (VI.31), podemos montar o sistema linear abaixo:

$$\dot{\underline{z}} = R \underline{z} + \bar{b} u \quad (\text{VI.32})$$

$$y = \bar{c} \underline{z}$$

onde: $\bar{b}' = [\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n] = [w_1, 0, 0, \dots, 0]$

$$\bar{c} = [\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n] = [0, 0, \dots, 0, 1]$$

Computando-se a função de transferência $G_R(s) = Y(s)/U(s)$ tem-se:

$$G_R(s) = \bar{c}(sI-A)^{-1} \bar{b} = (-1)^{n+1} \frac{\det R}{\det(sI-R)} = \frac{\bar{a}_n}{P(s)} \quad (\text{VI.33})$$

ou seja, $G_R(s) = G_D(s)$.

Comparando-se os sistemas (VI.22) e (VI.32) e as funções de transferência, dadas respectivamente por (VI.24) e (VI.33), desde que as matrizes A e R sejam "principally equal" (Definição III.18), ou seja:

$$a_{ij} = r_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{VI.34})$$

$$a_{i,i+1} \cdot a_{i+1,i} = r_{i,i+1} \cdot r_{i+1,i} = w_{i+1}; \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

pelos Lemas (III.5) e (III.6) teremos que:

$$G_D(s) = G_R(s) = G_T(s) \quad (\text{VI.35})$$

A partir de (VI.35), sabe-se que neste caso existe uma transformação de similaridade dada por uma matriz T (não singular) tal que $\underline{z} = T \underline{x}$ e $R = T A T^{-1}$; $\underline{b} = T b$; $\underline{c} = c T^{-1}$ onde a matriz T pode ser sistematicamente determinada [12], [21].

Voltando ao problema da determinação dos elementos da rede RLC, estes são obtidos a partir das relações (VI.34), ou seja:

$$w_1^{-1} = R_1 C_1; \quad w_2^{-1} = C_1 L_1; \quad w_3^{-1} = C_2 L_1; \quad \dots$$

$$w_i^{-1} = \begin{cases} C_\ell L_\ell; \quad \ell = i/2; \quad i \text{ par} \\ C_{m+1} \cdot L_m; \quad m = (i-1)/2; \quad i \text{ impar} \end{cases} \quad i \geq 2 \quad (\text{VI.36})$$

Uma vez determinados os w_i , $i = 1, 2, \dots, n$ o sistema (VI.36) tem n equações e $n+1$ incógnitas que correspondem aos $n+1$ valores dos elementos da rede. Estes valores são facilmente determinados arbitrando-se, por exemplo, $R_1 = 1 \Omega$.

Um dos resultados obtidos por Wall ^[108] mostra que: "dado o polinômio $P(s)$ onde $P(s) = |sI-R|$, se os w_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são positivos, $P(s)$ tem todas as raízes no semi-plano lateral esquerdo aberto e os elementos w_i são determinados a partir da expansão por frações continuadas":

$$\frac{G(s)}{H(s)} = \frac{w_1}{s + \frac{w_2}{s + w_3}} \dots \frac{w_n}{s} \quad (\text{VI.37})$$

onde:

$$P(s) = G(s) + H(s)$$

$$e \quad G(s) = \bar{a}_1 s^{n-1} + \bar{a}_3 s^{n-3} + \dots$$

$$H(s) = s^n + \bar{a}_2 s^{n-2} + \dots$$

O resultado acima mostra a equivalência do método apresentado com o método de síntese baseado na expansão por frações continuadas da relação entre a parte ímpar e a parte par do polinômio $P(s)$ ^[18]. Por outro lado também pode-se mos-

trar a relação existente entre a expansão por frações continuadas (VI.37) com a existência de uma expansão em frações parciais de $G(s)/H(s)$ [108].

Neste ponto podemos sumariar o procedimento da síntese da função de transferência

$$G_D(s) = \frac{1}{P_D(s)} = \frac{1}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + 1}$$

dando a sequência da síntese:

Passo 1: Calcular os coeficientes $\bar{a}_i = a_i/a_0$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Passo 2: Dispor os \bar{a}_i na matriz H cf. (VI.28) (ou dispor os \bar{a}_i segundo o algoritmo de Routh).

Passo 3: Calcular os w_i cf. (VI.29) (ou calcular os w_i cf. (VI.30)).

Passo 4: Arbitrar (por exemplo) $R_1 = 1 \Omega$ e obter os elementos L_i, C_i a partir de (VI.36).

Utilizando o método proposto (calculando os determinantes de Hurwitz) damos o exemplo a seguir:

Exemplo VI.1: Tomando a função de transferência $G_D(s)$ de 3º grau, maximamente plana na origem ou de Butterworth, tratada em [42]:

$$G_D(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

neste caso $\bar{a}_1 = 2$; $\bar{a}_2 = 2$; $\bar{a}_3 = 1$

$$H = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_3 & 0 \\ 1 & \bar{a}_2 & 0 \\ 0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_3 \end{bmatrix}; \begin{cases} w_1 = D_1 = \bar{a}_1 = 2 \\ w_2 = D_2/D_1 = \bar{a}_2 - \bar{a}_3/\bar{a}_1 = 2 - 1/2 = 3/2 \\ w_3 = D_3/D_1 D_2 = \bar{a}_3 D_3/D_1 D_2 = \bar{a}_3/\bar{a}_1 = 1/2 \end{cases}$$

arbitrando $R_1 = 1 \Omega$ temos:

$$w_1^{-1} = 1/2 = R_1 C_1 \rightarrow C_1 = 1/2 F$$

$$w_2^{-1} = 2/3 = C_1 L_1 \rightarrow L_1 = 4/3 H$$

$$w_3^{-1} = 2 = C_2 L_1 \rightarrow C_2 = 3/2 F$$

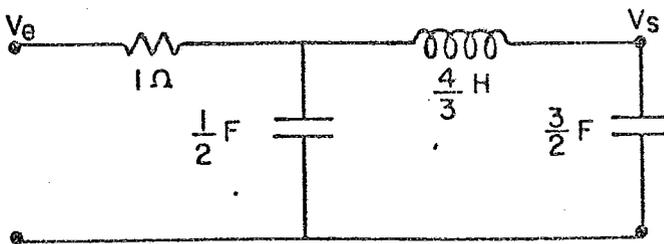


Figura VI.5 - Circuito correspondente a $G_D(s)$ do Ex. (VI.1)

ou arbitrando-se o valor de $R_1 = 3/2 \Omega$ obtemos $C_1 = 1/3 F$; $L_1 = 2 H$; $C_2 = 1 F$ que são os valores obtidos pelo método Recorrente-Continuante em [42].

O exemplo acima mostra a simplicidade do método comparativamente ao método de Holbrook [42], de vez que a síntese pode ser obtida sistematicamente em quatro passos, sem a necessidade de se proceder a operações com linhas e colunas que são inerentes ao método Recorrente-Continuante. Fato que no caso de filtros de dimensão mais elevada, torna o processo difícil para alguém sem certa experiência.

Deseja-se ressaltar que, qualquer que seja o método de síntese utilizado, o objetivo final é o de realizar um sistema do tipo (VI.22) no qual a matriz A é uma matriz Jacobi sign stable do tipo Schwarz. Considerando este aspecto, poderíamos alternativamente nos utilizar do algoritmo de realização de estruturas Jacobi sign stable (seção V.2:2) para estabelecer a síntese da rede da Figura VI.4. Todavia o método acima, baseado na forma de Schwarz, mostra-se em princípio mais simples e direto.

Obs: Para o caso em que o grau do polinômio $P(s)$ é par, o processo de síntese é análogo [59].

VI.2.2.2 - Redes Ladder LC Duplamente Terminadas

Pelo fato de que redes LC, com resistências nas duas extremidades, têm características de menor sensibilidade comparadas àquelas com resistência em apenas uma das extremidades [20], os métodos de síntese neste caso tornam-se mais importantes e por outro lado mais complexos.

O método exposto na seção anterior, bem como o de Holdbrook [42], não são adequados para este caso. Dos métodos de síntese existentes para este caso, um deles é o proposto por Jha e Prasad [45] e baseia-se no método Recorrente-Continuante para sintetizar funções do tipo passa-baixas com estruturas ladder LC duplamente terminadas.

Nesta seção é proposto um método que assemelha-se ao de Jha e Prasad no aspecto em que também se busca a realização de um sistema tridiagonal a partir de uma função de transferência passa-baixas com todos os zeros no infinito ("all pole").

O método aqui proposto, baseia-se nas relações existentes entre os coeficientes dos polinômios característicos das sub-matrizes principais de uma matriz de Jacobi e os elementos desta matriz (relações (V.10) e (V.11)). A partir destas relações pode-se construir sistematicamente um sistema algébrico de equações não-lineares que uma vez resolvido, leva à síntese da rede ladder correspondente à função de transferência desejada. O sistema algébrico não-linear a que se chega, (de n equações e n incógnitas) corresponde basicamente às equações

$$\alpha_{n-i} = (-1)^i \sum_{j=i}^n M_j; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{VI.38})$$

onde os α_{n-i} são os coeficientes do polinômio $P(s) = s^n + \sum_{i=1}^n \alpha_{n-i} s^{n-i} = \det [sI-A]$ e M_i são os menores principais

de ordem i da matriz A , que no caso também é Jacobi sign stable.

Em princípio poder-se-ia estabelecer as n equações (VI.38) diretamente, todavia no caso de n elevado tal tarefa seria trabalhosa e passível de erros. A partir das relações (V.10) e (V.11) podemos determiná-las sistematicamente.

Considerando portanto o problema de síntese de uma função de transferência $G_T(s) = V_S(s)/V_e(s)$ do tipo passa-baixas, por uma rede ladder passiva esquematizada abaixo,

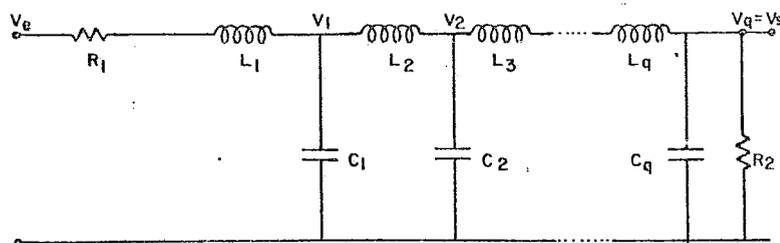


Figura VI.6 - Rede ladder LC duplamente terminada

poderemos encará-lo como sendo o da realização do sistema descrito pela equação (VI.22), onde neste caso:

$$\underline{x}' = [x_1, x_2, \dots, x_n] = [i_1, V_1, i_2, \dots, i_q, V_q]$$

$$b' = [b_1, b_2, \dots, b_n] = [-L_1^{-1}, 0, \dots, 0, 0] \quad (\text{VI.39})$$

$$c = [c_1, c_2, \dots, c_n] = [0, 0, \dots, 0, 1]$$

$$y = V_s; u = V_e; q = n/2; n \geq 2, n \text{ par}$$

$a_n = L_1 C_1 C_2 \dots C_q$; e o ganho d.c. \bar{e} dado por $G_T(0) = (1+R)^{-1}$

Podemos escrever:

$$G_T(s) = \frac{1/a_n}{s^{n+\alpha_{n-1}} s^{n+\dots+(1+R)/a_n}}; \alpha_i = a_i/a_n, i = 1, 2, \dots, n$$

Tomando os elementos da matriz A dada em (VI.40) estabelecemos as seguintes igualdades:

$$\tilde{a}_{ii} = -a_{ii} = 0; i = 2, \dots, n-1.$$

$$\tilde{a}_{11} = -a_{11} = R/L_1; \tilde{a}_{n,n} = -a_{n,n} = C_q^{-1}$$

$$\tilde{a}_{21} = -a_{12}a_{21} = (C_1 L_1)^{-1}; \tilde{a}_{32} = -a_{23}a_{32} = (C_1 L_2)^{-1};$$

$$\tilde{a}_{43} = -a_{34}a_{43} = (C_2 L_3)^{-1}$$

$$(\tilde{a}_{p+1,p})^{-1} = \begin{cases} C_\ell \cdot L_{\ell+1}; \ell = p/2; p \text{ par} \\ C_m \cdot L_m; m = (p+1)/2; p \text{ ímpar} \end{cases} \quad (\text{VI.41})$$

Nas igualdades acima, chamando $L_1^{-1} = x_1; C_1^{-1} = x_2; L_2^{-1} = x_3 \dots$

$$x_i^{-1} = \begin{cases} L_\ell; \ell = (i+1)/2; i \text{ ímpar} \\ C_m; m = i/2, i \text{ par} \end{cases} \quad (\text{VI.42})$$

podemos colocar as equações (VI.41) sob uma forma conveniente,

utilizando as relações (V.10), (V.11), (VI.41) e (VI.42), fato que implicitamente determina a sequência de síntese, ou seja:

Passo 1: A partir de (V.10) e (V.11) com $k = 1, 2, 3, \dots, n$ estabelecer (por substituições sucessivas) as n equações:

$$\alpha_i^n = \alpha_i = f_i(\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{n,n}, \tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{32}, \dots, \tilde{a}_{n+1,n}) \quad (\text{VI.43})$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Passo 2: Utilizando (VI.41) e (VI.42) colocar o sistema (VI.43) determinado no Passo 1, na forma de n equações do tipo:

$$\alpha_i = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{VI.44})$$

Passo 3: A partir de $G_T(s)$ calcular os α_i , ($\alpha_i = a_i/a_n$; $i = 1, 2, \dots, n$).

Passo 4: Com R estipulado, determinar (em geral numericamente) uma solução para o sistema estabelecido no Passo 2, tal que $x_i > 0$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Passo 5: Calcular os elementos da rede a partir das igualdades (VI.42).

Obs. 1: Para os filtros de uma determinada ordem (do tipo considerado) os passos 1 e 2 são utilizados apenas uma vez, para estabelecer as equações (VI.44). Para diferentes $G_T(s)$ (de mesma

ordem) a síntese é feita a partir dos passos 3, 4 e 5.

Obs. 2: Em geral, caso não seja obtida uma solução no passo 4, com $x_i > 0$; $i = 1, 2, \dots, n$, o valor de R deve ser alterado. O passo 4 tem inerentes os problemas de solução de sistemas algébricos não-lineares, todavia as não-linearidades do sistema são do tipo "produtos de variáveis" o que não torna o sistema (VI.44) por demais complexo, como é visto no exemplo que se segue:

Exemplo VI.2: Seja uma função de transferência de grau 4 onde $P_d(s)$ é dado por:

$$P_d(s) = \bar{a}_4 s^4 + \bar{a}_3 s^3 + \bar{a}_2 s^2 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_0$$

com ganho d.c. igual a $(1 + R)^{-1}$. Então temos que:

$$G_T(s) = \frac{1}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$a_i = \frac{R+1}{\bar{a}_0} \bar{a}_i \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4), \text{ ou}$$

$$G_T(s) = \frac{1/a_4}{s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

$$\alpha_i = a_i/a_n = \bar{a}_i/\bar{a}_n \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$$

Utilizando os passos 1 a 3 chegamos ao sistema algébrico não-linear abaixo:

$$\alpha_3 = R x_1 + x_4$$

$$\alpha_2 = R x_1 x_4 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 \quad (\text{VI.45})$$

$$\alpha_1 = R x_1 x_2 x_3 + R x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_4$$

$$\alpha_0 = (R + 1) x_1 x_2 x_3 x_4$$

O qual, uma vez solucionado (com valores positivos para x_i , $i = 1, 2, 3, 4$), nos fornece os valores dos elementos da rede (por VI.42) ou equivalentemente a realização do sistema (VI.22) com A, b, c satisfazendo (VI.39) e (VI.40).

Aplicação Numérica: Seja $P_d(s) = s^4 + 4s^3 + 8,5s^2 + 10s + 5,5$; substituindo-se os valores de α_i ; $i = 1, 2, \dots, n$ em (VI.45), com $R = 0,1$ obtemos uma solução (pelo método de Newton-Raphson) dada por:

$$x_1 = 25,6590 \rightarrow L_1 = 0,039 \text{ H}$$

$$x_2 = 0,18256 \rightarrow C_1 = 5,477 \text{ F}$$

$$x_3 = 0,74431 \rightarrow L_2 = 1,343 \text{ H}$$

$$x_4 = 1,43404 \rightarrow C_2 = 0,697 \text{ F}$$

Comparando-se a maneira sugerida acima, com o método proposto em [45] vemos que em ambos casos recai-se na

solução de equações algébricas não-lineares, no entanto, no método que propomos, o sistema de equações não-lineares é obtido sistematicamente a partir dos coeficientes do denominador da função de transferência, o que não ocorre no caso do método de Jha e Prasad ^[45], o qual baseia-se na manipulação de linhas e colunas tal como o método de Holbrook ^[42]. Do ponto de vista de haver uma relação entre os dois métodos, ela não parece óbvia, considerando-se inclusive o aspecto de que os resultados numéricos obtidos por um e por outro método não necessariamente são os mesmos.

Por outro lado, comparados a outros métodos de síntese, cremos que somente a continuada utilização do método proposto poderá estabelecer as suas vantagens ou desvantagens.

Desde que existe uma transformação simples entre redes passa-baixas e redes passa-faixa e passa-altas ^[109], não houve a preocupação em se determinar a síntese destes dois últimos tipos de redes. Todavia a obtenção da síntese nestes casos, assim como no caso dos filtros elípticos ^[109], de uma maneira direta baseada nos métodos propostos é um aspecto que deverá ser investigado.

VI.2.3 - Síntese de Imittâncias de Porta

O intuito desta seção é o de mostrar a relação existente entre os algoritmos de realização de estruturas Jacobi sign stable (Algoritmo V.1) e o método de Cauer ou método

de expansão por frações continuadas. Mostra-se que o método de síntese de Cauer é equivalente ao Algoritmo V.1 de realização de estruturas Jacobi (sign stable em particular) vindo confirmar que, no caso da realização referente ao Teorema V.1, chega-se a um sistema passivo (vide Lema V.6).

Verifica-se, por outro lado, que no caso de circuitos ladder RC, o sistema que os representa não necessariamente possui uma estrutura Jacobi sign stable, mostrando desta forma que embora a toda estrutura Jacobi sign stable (referente ao Corolário IV.1, Caso I) podemos associar um circuito passivo ladder RLC cuja imitância de porta é uma função real positiva $|^{105}|$, a recíproca no entanto, não é óbvio que seja verdadeira.

Dada uma imitância de porta $H(s)$ (irredutível) a ser sintetizada por um circuito ladder RLC, como $H(s)=N(s)/D(s)$ é real positiva, então temos que necessariamente $\Delta G(s)=|grN(s)-grD(s)| \leq 1 |^{105}|$. Tomemos o caso em que $grD(s) > grN(s)$. Para o que se pretende mostrar não há perda de generalidade com esta consideração.

Tomando o sistema representativo da rede ladder RLC esquematizada abaixo, na forma (VI.22).

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{\det(sI - A_1)}{\det(sI - A)} = \frac{s^{n-1} + \sum_{i=2}^n b_{n-i} s^{n-i}}{s^n + \sum_{i=1}^n a_{n-i} s^{n-i}} \quad (\text{VI.47})$$

onde A_1 é a matriz obtida a partir da matriz A eliminando-se a 1.^a linha e a 1.^a coluna. Tomando as relações (V.10) e (V.11) nas quais neste caso:

$$a_i = \alpha_i^n; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

$$b_i = \alpha_i^{n-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-2$$

e identificando os elementos da matriz A com os elementos do circuito temos o seguinte algoritmo de síntese do circuito da (Figura VI.7), ou equivalentemente de realização do sistema (VI.22) com estrutura Jacobi sign stable. Arbitrando (por conveniência) o valor de $C_1 = 1$ temos:

Passo 1 ($K = n$) ...

$$\text{com } i = n-1 \text{ obtemos } \bar{a}_{11} = (R_1 C_1)^{-1} \rightarrow R_1$$

$$i = n-2 \text{ obtemos } \bar{a}_{21} = (L_1 C_1)^{-1} \rightarrow L_1$$

$$i = n-3 \text{ obtemos } \alpha_{n-3}^{n-2}$$

⋮

$$i = 0 \text{ obtemos } \alpha_0^{n-2}$$

Passo 2 ($K = n - 1$) ...

com $i = n-2$ obtemos $\tilde{a}_{22} = R_2 L_1^{-1} \rightarrow R_2$

$i = n-3$ obtemos $\tilde{a}_{32} = (L_1 C_1)^{-1} \rightarrow C_2$

$i = n-3$ obtemos α_{n-4}^{n-3}

\vdots

$i = 0$ obtemos α_0^{n-3}

\vdots

Passo n ($K = 1$) ...

com $i = 0$ obtemos $\tilde{a}_{n,n} = R_n C_q^{-1} \rightarrow R_n$

Pelo algoritmo acima, os elementos \bar{a}_{ij} assim obtidos deverão ser não-negativos (alguns \bar{a}_{1i} poderão ser nulos) para que a matriz A seja sign stable e conseqüentemente tenhamos a síntese do circuito ladder RLC com polos no semiplano lateral esquerdo.

Obs: Note-se que, caso tenhamos $\text{gr}N(s) > \text{gr}D(s)$, a aplicação do algoritmo se faria de maneira análoga, sintetizando $Y(s)$ (admitância) ao invés de $Z(s)$.

Considerando a síntese da impedância de porta $Z(s) = N(s)/D(s)$ pelo método de Cauer [18] baseado na expansão por frações continuadas da função $Z(s)$ a ser sintetizada, este consiste em: alternadamente remover os elementos em série e em paralelo de $Z(s)$ e no caso $\text{gr}D(s) > \text{gr}N(s)$ temos:

$$Y(s) = \frac{D(s)}{N(s)} = s C_1 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{s L_1 + R_2} + \frac{1}{s C_2 + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{s L_2 + \dots}}$$

e portanto obtemos sucessivamente os valores de $C_1, R_1, L_1, R_2, \dots, C_q, R_n$ e caso a expansão acima seja completada (com valores positivos para os elementos R_i, L_i, C_i) teremos sintetizado a impedância $Z(s)$ na estrutura da rede da Figura V.1, ou equivalentemente, obtido a realização de $Z(s)$ (VI.47) sob uma estrutura Jacobi sign stable.

Exemplo VI.3: Seja

$$Z(s) = \frac{s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + 3s^2 + 5s + 3}$$

utilizando o algoritmo acima, temos:

Passo 1 ($K = 3$)

$$\alpha_2 = \tilde{a}_{11} + \beta_1 \rightarrow \tilde{a}_{11} = 2 = (R_1 C_1)^{-1} \rightarrow R_1 = 1/2 \Omega$$

$$\alpha_1 = \tilde{a}_{11} \cdot \beta_1 + \beta_0 + \tilde{a}_{21} \rightarrow \tilde{a}_{21} = 2 = (L_1 C_1)^{-1} \rightarrow L_1 = 1/2 H$$

$$\alpha_0 = \tilde{a}_{11} \cdot \beta_0 + \tilde{a}_{21} \cdot \gamma_0 \rightarrow \gamma_0 = 1/2$$

Passo 2 (K = 2)

$$\beta_1 = \tilde{a}_{22} + \gamma_0 \rightarrow \tilde{a}_{22} = 1/2 = R_2 L_1^{-1} \rightarrow R_2 = 1/4 \Omega$$

$$\beta_0 = \tilde{a}_{22} \cdot \gamma_0 + \tilde{a}_{32} \rightarrow \tilde{a}_{32} = 3/4 = (L_1 C_1)^{-1} \rightarrow C_2 = 8/3 F$$

Passo 3 (K = 1)

$$\gamma_0 = \tilde{a}_{33} \rightarrow \tilde{a}_{33} = 1/2 = (R_3 C_2)^{-1} \rightarrow R_3 = 3/4 \Omega$$

Pelo método de Cauer (via algoritmo de Euclid)

temos:

$$Y(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 5s + 3}{s^2 + s + 1}$$

$$s^2+s+1 \overline{) s^3+3s^2+5s+3} \begin{array}{l} (s+2) \\ \underline{s^3+s^2+s} \\ 2s^2+4s+3 \\ \underline{2s^2+2s+2} \\ 2s+1 \end{array}$$

$$\frac{s^3+s^2+s}{2s^2+4s+3} \\ \underline{2s^2+2s+2} \\ 2s+1 \quad s^2+s+1 \left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{4} \right)$$

$$\frac{s^2+1/2s}{1/2s+1}$$

$$\frac{1/2s+1/4}{1/2s+1}$$

$$\frac{3}{4} \overline{) 2s+1} \left(\frac{8}{3}s + \frac{4}{3} \right)$$

$$\frac{2s}{1}$$

$$\frac{1}{0}$$

donde:

$$Y(s) = s + 2 + \frac{1}{\frac{1}{2}s + \frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{8}{3}s + \frac{4}{3}}}$$

e portanto os valores dos elementos do circuito são: $C_1 = 1F$;
 $R_1 = 1/2 \Omega$; $L_1 = 1/2 H$; $R_2 = 1/4 \Omega$; $C_2 = \frac{8}{3} F$; $R_3 = 3/4 \Omega$

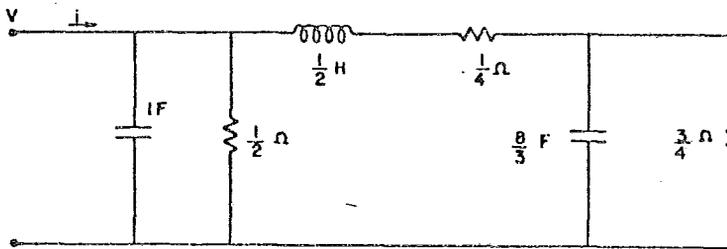


Figura VI.8 - Circuito correspondente a $Z(s)$ do exemplo VI.3.

Obs: Para que seja possível sintetizar uma impedância de porta sob uma estrutura ladder, os polinômios $N(s)$ e $D(s)$ de $Z(s) = N(s)/D(s)$ (e equivalentemente de $Y(s)$) devem satisfazer as condições (V.9), ou seja, sendo $n = m+1$ e

$$N(s) = s^m + \tilde{\beta}_1 s^{m-1} + \dots + \tilde{\beta}_m$$

$$D(s) = s^n + \tilde{\alpha}_1 s^{n-1} + \dots + \tilde{\alpha}_n$$

uma a condição necessária para que a síntese seja possível é que tenhamos $\tilde{\alpha}_i \geq \tilde{\beta}_i$; $i = 1, 2, \dots, m$, isto além das condições inerentes ao fato de $Z(s)$ ser uma função real positiva $|^{105}|$.

Considerando o caso em que, utilizando este algoritmo, chega-se a valores negativos de \tilde{a}_{ij} para algum par (i, j) , $i \neq j$, isto implica que não é possível obter uma estrutura Jacobi sign stable a partir da $Z(s)$ dada, como por exemplo no caso em que $Z(s)$ é dada por:

$$Z(s) = \frac{s + \beta_0}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 3}$$

Passo 1 ($K = 2$)

$$\alpha_1 = \tilde{a}_{11} + \beta_0 \rightarrow \tilde{a}_{11} = 2$$

$$\alpha_0 = \tilde{a}_{11} \beta_0 + \tilde{a}_{21} \rightarrow \tilde{a}_{21} = -1$$

Passo 2 ($K = 1$)

$$\beta_0 = \tilde{a}_{22} = 2$$

e a estrutura Jacobi será realizada na forma da equação (VI.22) com

$$A = \begin{bmatrix} -2 & +1 \\ +1 & -2 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad c' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nestes casos a realização, ou a síntese de $Z(s)$, corresponde a uma estrutura ladder RC (o que também pode ser visto pelo método de Cauer), isto pelo fato de que a partir de

ble e estruturas favoráveis não está restrita ao caso das estruturas Jacobi ^[59]. Apesar de ter sido estabelecida uma relação entre elas, tanto nesta seção como na seção V.4, cremos que uma determinação formal de limites mais precisos em que esta relação é válida deverá ser feita, visto que sua determinação poderá tanto auxiliar nos problemas de síntese de sistemas e redes passivas, bem como propiciar um melhor entendimento das propriedades de estruturas "favoráveis" do ponto de vista da estabilidade.

Tomando-se o fato de que a função de Lyapunov $V(\underline{x}) = \underline{x}' P \underline{x}$ com $P > 0$ diagonal pode ser identificada com a energia armazenada nos capacitores e indutores de uma rede passiva ^[52], este talvez seja um ponto de partida para que esta questão seja formalmente esclarecida.

CONCLUSÕES

Dado que a dimensão e complexidade dos sistemas com os quais a engenharia tem-se deparado nas últimas décadas tem crescido sensivelmente, este fato como é natural, tem obrigado a investigação de novos métodos de análise e síntese destes sistemas, de vez que a utilização dos métodos clássicos na maioria das vezes fica restrita a sistemas de dimensão reduzida.

Estes novos métodos basicamente buscam, de certa maneira, "simplificar as coisas" pois é natural que um problema de dimensão pequena que seja complicado, fique muito mais complicado quando a dimensão aumenta.

Especificamente falando do problema de estabilidade de sistemas dinâmicos não-lineares, nas últimas décadas, embora baseados em teorias mais antigas e resultados de Lyapunov e Popov, as pesquisas também tem-se dirigido neste sentido "simplificador".

Uma das abordagens que tem-se destacado e que genericamente chamamos de "sistemas interconectados" (Composite Systems Approach) [6], [8], [7³] a qual basicamente é uma abordagem "diakóptica" [6¹], ou seja, baseia-se em dividir o sistema de grande dimensão em uma série de sub-sistemas, resolvê-los (em geral por métodos clássicos) e daí partir para a solução do sistema global interconectado. Nesta linha tal abordagem utili-

za o que se chama de modelo de referência (linear) que intuitivamente pode ser entendido como a versão reduzida e simplificada do sistema. A partir deste modelo tiram-se as conclusões sobre o sistema global.

Uma das ferramentas, embora ainda não devidamente explorada, que tem-se mostrado de grande valia neste tipo de abordagem é a teoria de grafos. Alguns trabalhos vem utilizando esta teoria basicamente para identificar sub-sistemas fortemente conexos em um sistema de dimensão maior que geralmente é fracamente conexo, ou em certos casos até não conexo. A constatação de que um sistema é fracamente conexo em geral possibilita a partição do sistema global em componentes fortemente conexas de dimensão mais reduzida que a do sistema global, e evidentemente mais fáceis de serem tratadas [19], [74], [60], [27].

Dado que o conceito de grafo está intimamente ligado à noção de estrutura, [90], [39], [102] os trabalhos que utilizam direta ou indiretamente a teoria de grafos, classificam-se entre aqueles que dão uma "abordagem estrutural" ao problema.

Considerando este aspecto, para uma classe de sistemas não-lineares, o presente trabalho também propõem uma abordagem estrutural ao problema da estabilidade de sistemas não-lineares tendo presente a idéia de "simplificar as coisas".

Embora não exclua a possibilidade da utilização de uma filosofia diakóptica (vide seção VI.1) este trabalho não se classifica entre aqueles que utilizam a metodologia de "sistemas interconectados" a qual geralmente utiliza funções de Lyapunov ve toriais (ou escalares) para o sistema global, obtidas a partir de funções de Lyapunov referentes a cada sub-sistemas ^[6], ^[8], ^[7³].

Comparativamente a outros trabalhos e abordagens podemos destacar os seguintes aspectos relativos ao presente trabalho:

Utiliza-se um conceito de estrutura a partir da de finição de um digrafo associado ao sistema não-linear. A partir deste conceito de estrutura explora-se as propriedades do digrafo associado ao sistema (ou da matriz de adjacência) e que não se restringem apenas à conexidade com vistas a decomposição em sub-sistemas fortemente conexos. Ou seja, mostra-se que no problema da estabilidade a estrutura pode fornecer informações mais importantes do que apenas a conexidade. Mostra-se por exemplo, que os sinais associados aos ramos da estrutura têm importância fundamental para a estabilidade do sistema, fato que não foi explorado em outras abordagens estruturais.

Embora não explicitamente, assim como na metodologia de "sistemas interconectados", é utilizado o conceito de "mo dēlo de referência" linear, visto que as conclusões sobre estabilidade absoluta do sistema não-linear são baseadas na análise de

sua estrutura que está associada a uma matriz e que por sua vez esta associada a um sistema linear. (Teoremas II.5 a II.7) ^[81].

Outro aspecto novo que foi introduzido neste trabalho refere-se aos "algoritmos de realização", visto que define uma nova possibilidade de se explorar a Teoria de Lyapunov. Este aspecto pode ser interpretado da seguinte maneira: A utilização do método direto de Lyapunov basicamente consiste em: dado um sistema (S) procura-se uma função (V) positiva definida tal que \dot{V} , calculada a partir de (S), seja negativa definida, caso seja encontrada esta (V) então (S) será estável.

Quando no capítulo V nos preocupamos com realizações de "estruturas favoráveis" estávamos, em outras palavras, utilizando o método direto de Lyapunov de uma forma indireta, ou seja: temos uma classe de sistemas não-lineares $\{\tilde{S}\}$, com determinada estrutura, para a qual conhecemos a função de Lyapunov (\tilde{V}) (do tipo "diagonal") tal que $\dot{\tilde{V}}$ é negativa definida. Dado um sistema (\bar{S}) que queremos saber se é estável ou não, ao invés de procurarmos uma função de Lyapunov (V) correspondente, procuramos saber se (\bar{S}) tem uma representação matemática equivalente ($\bar{\tilde{S}}$), tal que $\bar{\tilde{S}} \in \{\tilde{S}\}$, caso isto ocorra, (\bar{S}) será estável. Como para os casos tratados, isto pode ser feito de uma maneira sistemática, podemos de uma maneira sistemática "procurar uma função de Lyapunov" para o sistema (\bar{S}).

Este tipo de procedimento vem enfatizar o aspecto de que, embora a estabilidade de um sistema seja uma propriedade

"livre de coordenadas", a propriedade de ter uma estrutura favorável (ter função de Lyapunov "diagonal") depende da representação matemática do sistema e portanto, apresentar uma estrutura favorável poderá ser uma característica explícita ou implícita do sistema.

Como consequência deste tipo de procedimento, "determinação indireta" da função de Lyapunov, é que foram determinados novos critérios algébricos de estabilidade absoluta dados no capítulo V, os quais a par da vantagem de serem algébricos e úteis no problema da análise mostraram ter sua grande utilidade no problema da síntese de sistemas de controle não-lineares, como é o caso do problema da síntese de reguladores de máquinas elétricas tratado na seção VI.1 |⁹²|.

Este último aspecto, o da síntese a partir de métodos algébricos, é outro dos aspectos que o presente trabalho trás como contribuição significativa. Isto pelo fato de que, comparativamente a métodos frequenciais que tratam do problema da estabilidade de sistemas não-lineares, em geral baseados no critério de Popov, o método proposto tem-se mostrado de utilização mais simples e mais conveniente |⁹²|, |⁴¹|, |¹¹³|.

Cabe lembrar que uma comparação mais aprofundada das condições que são obtidas a partir dos critérios algébricos propostos neste trabalho (Capítulo V) com condições obtidas a partir de métodos frequenciais |⁷⁷|, |⁷⁸|, |³¹|, |¹⁰⁴| deverá ainda ser feita. Exemplos nos quais foram aplicados tanto um co

mo outro método, mostram que aparentemente pode-se chegar a resultados mais ou menos conservativos dependendo do problema particular tratado.

Fazendo um breve sumário dos aspectos mais importantes que foram desenvolvidos neste trabalho, podemos relacioná-los da seguinte forma:

- (a) extensão dos resultados de estabilidade absoluta de S. K. Persidskii (Capítulo II);
- (b) introdução do conceito de estrutura para os sistemas da classe (II.2) (Capítulo II);
- (c) caracterização de estruturas favoráveis: acíclicas-3, D-antisimétricas e sign stable (Capítulo III);
- (d) caracterização das matrizes sign stable a partir do conceito de observabilidade qualitativa (Capítulo III);
- (e) determinação de resultados de estabilidade absoluta baseados na estrutura; qualitativos e quantitativos (Capítulo IV);
- (f) determinação de Algoritmos de realização de estruturas favoráveis para sistemas do tipo Lur'e (Capítulo V);
- (g) determinação de critérios algébricos de estabilidade absoluta para sistemas do tipo Lur'e (Capítulo V);

(h) aplicação dos resultados a:

(i) problema da estabilidade de sistemas de energia elétrica;

(ii) problema de síntese de redes passivas.

Por outro lado, considerando os aspectos que deverão dar seqüência a este trabalho, em pesquisas subsequentes, a par daqueles que foram referidos no texto, podemos destacar os seguintes:

(a) investigação de realizações de uma classe mais ampla de estruturas do que as estruturas Jacobi;

(b) investigação do problema de realizações de estruturas favoráveis para o caso multi-não-linearidades;

(c) extensão dos resultados de estabilidade de sistemas lineares nos quais $\dot{V} \leq 0$ (semi-definida) para o caso não-linear.

(d) determinação de limites mais precisos da relação entre estruturas favoráveis, sistemas passivos e dissipativos.

(e) utilização dos "algoritmos de realização" na síntese de sistemas passivos e hiper-estáveis visando a síntese de sistemas auto-adaptativos.

- (f) extensão dos resultados para o caso de sistemas não-lineares variantes no tempo;
- (g) investigar a possibilidade da utilização da abordagem estrutural proposta para o caso dos sistemas não-lineares discretos no tempo;
- (h) investigar a possibilidade de extensão do conceito de estrutura favorável (não necessariamente cf. Definição II.10) para classes mais amplas de sistemas não-lineares.

Concluindo queremos ressaltar que a proposta contida neste trabalho não tem a pretensão de ser uma proposta alternativa em relação a outros métodos de análise e síntese de sistemas não-lineares. A idéia é de chamar a atenção no sentido de que a estrutura, como definida no contexto deste trabalho, tem grande importância na análise da estabilidade de sistemas não-lineares e portanto, antes de se investigar por um ou outro método a estabilidade de um sistema não-linear, é conveniente analisar sua estrutura. Se esta for identificada como favorável, explícita ou implicitamente, muito trabalho poderá ser poupado e simplificado. Ainda em termos do problema da síntese, verifica-se que a estrutura tem o papel de servir como "guia de referência", ou seja, busca-se sintetizar sistemas que apresentem estruturas favoráveis, se isto for conseguido, a estabilidade do sistema não-linear estará assegurada.

Desta maneira, com este trabalho, cremos ter dado uma contribuição, tanto para a solução, como para a indicação de possíveis soluções para problemas relacionados com a estabilidade de sistemas não-lineares.

APÊNDICE A1

O Teorema mais geral da teoria de "sign stability" demonstrado por Quirk e Ruppert [88] é o seguinte:

Teorema A1.1: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz real $n \times n$ e não decomponível. As condições necessárias e suficientes para que A seja "sign stable" são:

Condição (1): $a_{ij} \cdot a_{ji} \leq 0 \quad i \neq j$

Condição (2): sendo $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_m$, se tivermos $a_{i_1, i_2} \neq 0$, $a_{i_2, i_3} \neq 0$, ..., $a_{i_{m-1}, i_m} \neq 0$ então $a_{i_m, i_1} = 0$ para todo $m > 2$

Condição (3): $a_{ii} \leq 0$ para todo i , $a_{kk} < 0$ para ao menos um k ; $1 \leq k \leq n$.

Condição (4): existe um termo não nulo na expansão de $\det A$.

Seja $\{\bar{B}\}$ o conjunto das matrizes similares em sinal à matriz B , dada abaixo pelos sinais de seus elementos, ou seja:

$$\text{sgn } B = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & - & - & + & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 \end{bmatrix}$$

Vemos que a matriz B satisfaz as condições (1) a (4); mostramos abaixo que o conjunto $\{\bar{B}\}$ tem matrizes que não são estáveis segundo a definição utilizada em [88], na qual "uma matriz \bar{B} é estável se e somente se todos os seus auto-valores tem parte real negativa".

Chamando de B_1 a matriz de $\{\bar{B}\}$ para a qual atribuímos valores numéricos $+1$ para os elementos com sinal positivo e -1 para os elementos com sinal negativo. Neste caso teremos que: $+j$ e $-j$ são auto-valores de B_1 , donde B_1 não é estável. Como $B_1 \in \{\bar{B}\}$ isto implica que B não é "sign stable" e portanto as condições (1) a (4) não são suficientes para garantir "sign stability".

A prova utilizada pelos referidos autores baseia-se na extensão do seguinte Teorema (do mesmo artigo).

Teorema A1.2: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz real $n \times n$ com $a_{ij} < 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Condições necessárias e suficientes para "sign stability" de A são: condição (1) e condição (2) do Teorema anterior.

Apresentamos a seguir o raciocínio utilizado, a partir do Teorema acima, no qual os autores se basearam para provar o Teorema geral, indicando o argumento falso que foi utilizado.

Se a condição de todos os $a_{ij} < 0$ for relaxada, então as condições (1) e (2) não mais serão suficientes para garantir "sign-stability" (evidentemente se para algum i , tivermos $a_{ij} > 0$, A não será "sign stable"). Como os autores mostram em [88], retirando-se a condição de todos $a_{ij} < 0$, a instabilidade somente poderá ocorrer devido à existência de raízes nulas ou imaginárias puras no polinômio característico de A .

Como os coeficientes do polinômio característico de A relativos ao traço de A e ao determinante de A devem ser positivos, para haver estabilidade é necessário que tenhamos ao menos um dos $a_{ij} < 0$ (condição (3)) e $\det A \neq 0$ (condição (4)).

A prova da suficiência das condições (1) a (4) dada pelos autores em [88] baseia-se nos seguintes argumentos que aqui transcrevemos: "As condições (1) e (2) sendo suficientes para "sign-stability", no caso da diagonal estritamente negativa, asseguram que os termos em qualquer dos determinantes de Routh-Hurwitz, após a eliminação de termos iguais, são todos positivos.

Portanto se as condições (1) a (4) deixam de ser suficientes para "sign stability" de A , isto é devido ao fato

de que alguma condição de Routh-Hurwitz é identicamente nula, i.e. alguma raiz característica de A tem parte nula para todo conjunto de valores atribuídos aos elementos de A .

Donde, para provar a suficiência das condições (1) a (4) para sign-stability é preciso somente que mostremos que tais condições são suficientes para a estabilidade de A , para alguma escolha de valores para os elementos de A .

A seguir mostramos que o argumento de que, no caso da ocorrência de instabilidade, "alguma condição de Routh-Hurwitz é identicamente nula para todo conjunto de valores atribuídos a A ", é falso. Tomando-se a matriz B_1 temos os seguintes valores para os Δ_i (determinantes de Routh-Hurwitz).

$$\Delta_1 = 1 > 0; \Delta_2 = 3 > 0; \Delta_3 = 2 > 0; \Delta_4 = 0; \Delta_5 = 0.$$

Ou seja, os determinantes de Routh-Hurwitz Δ_4 e Δ_5 são nulos. Definindo-se a matriz $B_2 \in \{\bar{B}\}$ tal que em relação à matriz B_1 apenas o primeiro elemento da segunda coluna tem seu valor numérico alterado (de 1 para 2), teremos os seguintes valores numéricos para os Δ_i de B_2 :

$$\Delta_1 = 1 > 0; \Delta_2 = 13 > 0; \Delta_3 = 3 > 0; \Delta_4 = 1 > 0; \Delta_5 = 2 > 0$$

donde conclui-se que a matriz B_2 é estável e que a condição dos determinantes de Routh-Hurwitz Δ_4 e Δ_5 que eram nulos para B_1 , alterando-se apenas o valor numérico de um elemento de B_1 , eles

não permaneceram nulos como argumentam os autores em ^[88].

Do exposto acima conclui-se que não basta mostrar que as condições (1) a (4) são suficientes para "sign stability" de A, mostrando apenas que elas o são para "alguma escolha de valores para os elementos de A", invalidando assim a prova utilizada pelos autores em ^[88].

$$\phi_0(s) \triangleq 1; \phi_1(s) = s; \phi_2(s) = s^2 + k^2; \phi_3(s) = s(s^2 + k^2) + \epsilon_1 \cdot \phi_1(s); \dots$$

$$\phi_p(s) = s \cdot \phi_{p-1}(s) + \epsilon_{p-2} \cdot \phi_{p-2}(s); p = 3, \dots, n \quad (\text{A2.1})$$

Onde $\phi_j(s)$, $j = 1, 2, \dots, n$ são os polinômios característicos das sub-matrizes principais de A correspondentes às j primeiras linhas e colunas de A .

Vamos analisar a variação das raízes de $\phi_p(s)$ ($p=n$) em função de seus parâmetros; analisemos primeiramente em relação à variação do parâmetro ϵ_{p-2} . A partir de (A2.1) esta análise pode ser feita considerando-se o lugar das raízes de $F(s)$ onde:

$$F(s) = 1 + \epsilon_{p-2} \cdot \frac{\phi_{p-2}(s)}{s \phi_{p-1}(s)} \quad (\text{A2.2})$$

e onde ϵ_{p-2} pode variar no intervalo $(0, +\infty)$.

Os ângulos das assintotas do lugar das raízes de (A2.2), são dados por:

$$\phi_A = \frac{(2q + 1)}{n_p - n_z} \pi; q = 0, 1, 2, \dots, (n_p - n_z - 1)$$

onde n_p = número de raízes de $s \cdot \phi_{p-1}(s)$

n_z = número de raízes de $\phi_{p-2}(s)$

Pelo fato de que $n_p - n_z = 2$, as assintotas são:

$\phi_A = \pm \pi/2$, o que é esperado pois todas as raízes de $\phi_p(s)$ estão no eixo imaginário.

Tem-se também que: duas raízes $\pm \Omega_n \cdot j$ tendem a infinito com $\epsilon_{p-2} \rightarrow \infty$, a partir das raízes de maior módulo de $\phi_{p-1}(s)$.

Portanto se as raízes $\pm \Omega_p j$ de $\phi_p(s)$ que desejamos "posicionar" em função de ϵ_{p-2} têm módulo maior que as raízes de maior módulo de $\phi_{p-1}(s)$, então o Lema se verifica, e mais, as raízes (complexas conjugadas) que "posicionarmos" em função de ϵ_{n-2} serão as de maior módulo para $\phi_p(s)$ e distintas das demais. Portanto para "posicionarmos" duas raízes $\pm \Omega_n j$ em função de ϵ_{n-2} é suficiente que "posicionemos" as raízes $\pm \Omega_{n-1} j$ de $\phi_{p-1}(s)$ (em função de ϵ_{p-3}) de modo que as raízes de maior módulo de $\phi_{p-1}(s)$ tenham módulo inferior ao módulo das raízes desejadas para $\phi_p(s)$ ($\Omega_{p-1} < \Omega_p$). Ora, para "posicionarmos" as raízes de maior módulo de $\phi_{p-1}(s)$ em função de ϵ_{p-3} dependemos (pelo mesmo raciocínio) de "posicionarmos" as raízes de $\phi_{p-2}(s)$ em função de ϵ_{n-4} ... e assim sucessivamente até chegarmos a $\phi_2(s) = s^2 + k^2$ que são "posicionáveis" em função de k .

Portanto para que tenhamos $\Omega_n = \omega_n = c > 0$, onde c é arbitrário, escolhemos $k < c$, se $\epsilon_j > 0$ ($j = n-2, n-3, \dots, 1$) forem suficientemente pequenos (não nulos) teremos que

Se $v_1 = 0 \rightarrow v_2 = 0$; $(v_1 = v_2 = 0) \rightarrow v_3 = 0$; ... $(v_{n-2} = v_{n-1} = 0) \rightarrow v_n = 0$.

donde, se $v_1 = 0$, isto implica em que $\underline{v} = 0$ e portanto \underline{v} não é auto vetor. Analogamente se $v_n = 0$ chegamos a mesma conclusão.

APÊNDICE A3

Lema A3.1: Dados n polinômios de Hurwitz de grau n_i ($n \geq 2$; $i = 1, 2, \dots, n$)

$$P_i(\lambda) = \lambda^{n_i} + \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} \lambda^{n_i-j}; \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j$$

Definindo o conjunto \widehat{P} de polinômios $P(\lambda)$ tal que:

$$\widehat{P} = \{P(\lambda) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot P_i(\lambda) \mid \underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ e } \underline{\alpha} \in \mathbb{R}_+^n\},$$

dizemos que " \widehat{P} é Hurwitz" se e somente se $\forall P(\lambda) \in \widehat{P}$ isto implica em que $P(\lambda)$ é Hurwitz.

Chamando de $\Delta_M = \max_{p, q} |n_p - n_q|$; $p, q \in \{1, 2, \dots, n\}$ temos o seguinte:

Lema A3.1: "A condição necessária e suficiente para que \widehat{P} seja Hurwitz é que tenhamos $\Delta_M \leq 2$ ".

Prova: Baseamo-nos no fato de que os zeros de um polinômio de grau g , onde $g = \max_{i, j} (n_i, n_j)$ dado por: $P_{ij}(\lambda) = \alpha_i P_i(\lambda) + \alpha_j P_j(\lambda)$ são os polos de

$$F_{ij}(\lambda) = \frac{P_j(\lambda)}{P_i(\lambda) + \frac{\alpha_j}{\alpha_i} P_j(\lambda)} \quad (n_j < n_i) \quad (\alpha_i, \alpha_j > 0) \quad (\text{A3.1})$$

e podemos neste caso aplicar as regras do lugar das raízes.

Suficiência: tomando-se, sem perda de generalidade, os polinômios $P_1(\lambda)$ e $P_2(\lambda)$ de \hat{P} . Como os polos de

$$F_{ij}(\lambda) = \frac{P_2(\lambda)}{P_1(\lambda) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} P_2(\lambda)} \quad (n_2 < n_1) \quad (A3.2)$$

pelo fato de as assíntotas do lugar das raízes de (A3.2) não cruzarem o eixo imaginário ($\Delta_M \leq 2$) e todos os zeros de $F_{ij}(\lambda)$ estarem no semi plano lateral esquerdo (aberto) do plano complexo, para todo par (α_1, α_2) ; $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ os zeros de $P_{12}(\lambda)$ ($P_{12}(\lambda) = \alpha_1 P_1(\lambda) + \alpha_2 P_2(\lambda)$) também estarão no s.p.l.e.aberto.

Aplicando o mesmo raciocínio adicionamos um terceiro polinômio $P_3(\lambda)$ e analisamos as raízes de $P_{123}(\lambda) = \alpha_3 P_3(\lambda) + P_{12}(\lambda)$ que também estarão no s.p.l.e.a (semi plano lateral esquerdo aberto) para todo valor de $\alpha_3 > 0$ e portanto para todos os valores positivos de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Assim procedendo sucessivamente, até adicionarmos o último polinômio $P_n(\lambda)$, mostramos que:

$$P_{12\dots n}(\lambda) = \alpha_n P_n(\lambda) + P_{1,2\dots n-1}(\lambda)$$

é estável para todos valores positivos de α_n e portanto \hat{P} é Hurwitz.

Necessidade: Utilizando o mesmo raciocínio acima, caso existam ao menos dois polinômios $P_r(\lambda)$ e $P_s(\lambda)$ ($\eta_s < \eta_r$) tais que $\eta_r - \eta_s > 2$, então dado o fato de que neste caso haverá um valor para α_s/α_r acima do qual $P_{rs}(\lambda)$ não será Hurwitz, neste caso fazendo com que os valores dos α_i restantes tendam a zero e $\alpha_s/\alpha_r \rightarrow \infty$ teremos valores de α tais que $p_{12\dots n}(\lambda)$ não será Hurwitz.

$$\alpha_i^k = (-1)^{(k-i)} \sum_{(k-i)}^k M_{(k-i)}(A_{n-k}); \quad i = k-1, k-2, \dots, 1, 0 \quad (\text{A4.2})$$

onde: $M_{(k-i)}(A_{n-k})$ são os menores principais de ordem $(k-i)$ da matriz A_{n-k}

$\binom{x}{y}$ representa o número de combinações de x elementos tomados y a y .

Para $k = n$, escrevendo a expressão dos coeficientes α_i^k a partir dos menores principais de A ($k=n$), e reagrupando convenientemente os termos temos que:

$$\alpha_{n-1}^n = -a_{11} + \alpha_{n-2}^{n-1}$$

$$\alpha_{n-2}^n = -a_{11} \alpha_{n-2}^{n-1} + \alpha_{n-3}^{n-1} - a_{12} a_{21}$$

(A4.3)

$$\alpha_{n-3}^n = -a_{11} \alpha_{n-3}^{n-1} + \alpha_{n-4}^{n-1} - a_{12} a_{21} \alpha_{n-3}^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1^n = -a_{11} \alpha_1^{n-1} + \alpha_0^{n-1} - a_{12} a_{21} \alpha_1^{n-2}$$

$$\alpha_0^n = -a_{11} \alpha_0^{n-1} - a_{12} a_{21} \alpha_0^{n-2}$$

Dado que A_1 também é uma matriz Jacobi com as mesmas características de A , podemos escrever os coeficientes do polinômio característico de A_1 ($k = n - 1$) da seguinte forma:

$$\alpha_{n-2}^{n-1} = -a_{22} + \alpha_{n-3}^{n-2}$$

$$\alpha_{n-3}^{n-1} = -a_{22} \alpha_{n-3}^{n-2} + \alpha_{n-4}^{n-2} - a_{23} a_{32}$$

$$\alpha_{n-4}^{n-1} = -a_{22} \alpha_{n-4}^{n-2} + \alpha_{n-5}^{n-2} - a_{23} a_{32} \alpha_{n-4}^{n-3}$$

(A4.4)

⋮

$$\alpha_1^{n-1} = -a_{22} \alpha_1^{n-2} + \alpha_0^{n-2} - a_{23} a_{32} \alpha_1^{n-3}$$

$$\alpha_0^{n-1} = -a_{22} \alpha_0^{n-2} - a_{23} a_{32} \alpha_0^{n-3}$$

Visto que todas as sub-matrizes principais inferiores de A i.e., A_j ($j = 0, 1, 2, \dots, n-1$) também são matrizes Jacobi indecomponíveis, as expressões do tipo (A4.3) e (A4.4) também são verificadas para as matrizes A_j , $j = 3, 4, \dots, n-1$.

Chamando $\tilde{a}_{jj} = -a_{jj}$; $j = 1, 2, \dots, n$.

$$\tilde{a}_{l+1,l} = -a_{l+1,l} \cdot a_{l,l+1}; l = 1, 2, \dots, n-1$$

e definindo que:

$a_{n+1,n} = 0$; $\alpha_s^r = 1$ (se $r = s \geq 0$); $\alpha_s^r = 0$ (se $r < s$ ou $r < 0$ ou $s < 0$) podemos estabelecer a relação entre os coeficientes dos polinômios característicos das sub-matrizes principais inferiores A_i e os elementos (a_{ij}) da matriz A ; esta relação é dada por:

$$\alpha_i^k = \hat{a}_{pp} \cdot \alpha_i^{k-1} + \alpha_{i-1}^{k-1} + \hat{a}_{p+1,p} \cdot \alpha_i^{k-2} \quad (\text{A4.5})$$

para

$$k = n, n-1, \dots, 1; i = k-1, k-2, \dots, 1, 0$$

$$p = (n-k) + 1$$

APÊNDICE A5

Prova da estabilidade absoluta do sistema (VI.8) (no setor positivo infinito).

Hipóteses: (a) Todas as funções $\psi_k(\cdot)$; $k = 1, 2, \dots, m$ satisfazem a condição de setor positivo infinito.

(b) $n-1$ destas funções $\psi_k(\cdot)$; correspondem a δ_k 's independentes; (o grafo de interconexão entre máquinas é conexo).

A função de Lyapunov (VI.10), $V(\underline{w}, \underline{\delta})$ é definida positiva, todavia $\dot{V}(\underline{w}, \underline{\delta})$ é apenas semi-definida negativa. Para demonstrarmos a estabilidade assintótica, utilizaremos o Teorema II.4 (LaSalle).

O conjunto de estados no qual $\dot{V}(\underline{w}, \underline{\delta}) = 0, \forall t \geq 0$ é dado por $N(\underline{w}, \underline{\delta}) = \{(\underline{w}, \underline{\delta}) \mid \underline{w} = 0 \text{ e } C_n' \underline{\psi}(\underline{\delta}) = 0\}$.

Sendo a equação $C_n' \underline{\psi}(\underline{\delta}) = 0$ equivalente a

$$[I_{n-1} \quad - C_{n-1}'] \underline{\psi}(\underline{\delta}) = 0 \quad (\text{A5.1})$$

e considerando a relação (VI.4)

$$(\delta_n, \delta_{n+1}, \dots, \delta_m)' = -C_{n-1}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}) \quad (\text{A5.2})$$

podemos construir o seguinte sistema "auxiliar":

$$\dot{\underline{\delta}} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & C'_{n-1} \\ \dots & \vdots & \dots \\ -C_{n-1} & \vdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{n-1} \\ \psi_n(\delta_n) \\ \vdots \\ \psi_m(\delta_m) \end{bmatrix} - I_m \cdot \begin{bmatrix} \psi_1(\delta_1) \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(\delta_{n-1}) \\ \delta_n \\ \vdots \\ \delta_m \end{bmatrix} \quad (\text{A5.3})$$

Se $\dot{\underline{\delta}} = 0$ então (A5.1) e (A5.2) são satisfeitas simultaneamente; se mostrarmos que $\dot{\underline{\delta}} = 0$ somente para $\underline{\delta} = 0$, teremos mostrado que $N(\underline{w}, \underline{\delta}) = \{0\} \forall t \geq 0$ e portanto (VI.8) será assintoticamente estável pelo Teorema (II.4).

Considerando o sistema dinâmico (A5.3) vemos que ele é do tipo (II.14) com estrutura favorável; neste caso podemos aplicar o Teorema II.7 para mostrar a estabilidade assintótica utilizando a função de Lyapunov do tipo (II.7) ou seja:

$$V_I(\underline{\delta}) = \sum_{j=n}^m \int_0^{\delta_j} \psi_j(s) ds + 1/2 \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i^2 \quad (\text{A5.4})$$

A partir do sistema (A5.3) obtemos:

$$\dot{V}_I(\underline{\delta}) = - \sum_{k=1}^m \delta_k \cdot \psi_k(\delta_k) \quad (\text{A5.5})$$

Considerando as hipóteses (a) e (b) temos que $V_I(\underline{\delta})$ e $-\dot{V}_I(\underline{\delta})$ são funções definidas positivas e portanto

(A5.3) é absolutamente estável A_∞ e $\underline{\delta} = 0$ é o único ponto de equilíbrio.

Como consequência, as relações (A5.1) e (A5.2) são satisfeitas somente para $\underline{\delta} = 0$ e portanto $N(\underline{w}, \underline{\delta}) = \{0\}$, o que assegura, pelo Teorema II.4 (LaSalle), a estabilidade absoluta do sistema (VI.8) com as funções $\psi_k(\cdot)$ satisfazendo a condição de setor positivo infinito.

BIBLIOGRAFIA

1. AIZERMAN, M. A. - "On a Problem Concerning the in the Large Stability of Dynamic Systems", Uspekhi Matematicheskikh Nauk, Vol. 4 n^o 4, 187-188, 1949.
2. AIZERMAN, M. A. and GANTMACHER, F. R. - "Absolute Stability of Regulator Systems", Holden Day Inc., San Francisco, 1964.
3. ANDERSON B. D. O. - "Stability of Control Systems with Multiple Nonlinearities", J. Franklin Institute, 281 (1966) 155-160.
4. ANDERSON, B. D. O. - "A Simplified Viewpoint of hyperstability", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-13, June 1968, pp. 292-294.
5. ANDERSON, B. D. O; E. I. JURY; MANSOUR, M. - "Schwartz Matrix Properties for Continuous and Discrete Time Systems", Int. Journal Control, Vol. 23, n^o 1, 1-16, 1976.
6. ARAKI, M. - "Stability of Large Scale Nonlinear Systems- Quadratic Order Theory of Composite System Method Using M-Matrices" - IEEE Trans. Aut. Control (Special Issue on Large-Scale Systems and Decentralized Control), Vol. AC-23, n^o 2, 129-142, 1978.

7. ARROW, K. J. and Mc MANUS, M. A. - "A Note on Dynamic Stability", *Econometrica* 26, 448-454 (1958).
8. BAILEY, F. N. - "The Application of Lyapunov's Second Method to Interconnected Systems", *Siam Journal of Control*, Vol. 3, n^o 3, (1966) 443-462.
9. BARKER G. P.; BERMAN, A. and PLEAMMONS, R. J. - "Positive Diagonal Solutions to the Lyapunov Equations", MRC Technical Summary Report 1713, University of Wisconsin - Mathematics Research Center, January 1977.
10. BARNETT, S. - "Matrices in Control Theory", Van Nostrand , New York 1971.
11. BARNETT, S. and C. STOREY - "Some Applications of the Lyapunov Matrix Equation", *J. Inst Math. Applic* 4, 33-42, 1968.
12. BARNETT, S. and C. STOREY - "Matrix Methods in Stability Theory", T. Nelson, London, 1970.
13. BELLMAN, R. - "Introduction to Matrix Analysis", McGraw - Hill, 1960.
14. BELLMAN, R. - "Vector Lyapunov Functions", *J. SIAM Control* Vol. 1, n^o 1, (1962) 32-34.

15. BERGEN, A. R. and WILLIAMS, I, J. - "Verification of Aizerman's Conjecture for a Class of Third Order Systems", IRE Trans. Automatic Control, Vol. AC-7, pp. 42-46 - Apr. 1962.
16. BOAVENTURA NETTO, P. - "Teoria dos Grafos", Publicação COPPE-UFRJ, PDD-4/77.
17. BROCKETT, R. W. - "The Status of Stability Theory for Deterministic Systems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-11, pp. 596-606, July 1966.
18. BUDAK, A. - "Passive and Active Network Analysis and Synthesis", H. Mifflin, Boston (1974).
19. CAINES, P. E. and R. S. PRINTIS - "The Stabilization of Digraphs of Variable Parameter Systems", IEEE Trans. Aut. Control, AC-23, nº 2, 163-173; 1978.
20. DARYANANI, G. - "Principles of Active Network Synthesis and Design", J. Wiley, New York, 1976.
21. DATTA, B. N. - "A Constructive Method for Finding the Schwarz Form of a Hessenberg Matrix", IEEE Trans. Automatic Control, AC-20, nº 2, pp. 616-617, 1974.

22. DATTA, B. N. - "Stability and D-Stability", Linear Algebra and its Applications (to appear), UNICAMP Relatório Interno nº 18, 1977.
23. DORAISWAMI, R. - "A Nonlinear Load-Frequency Control Design", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-97, pp. 1278-1285, July/August, 1978.
24. DORAISWAMI, R. and GONDAR, U. C. M. - "The Design and Stability of a Multiarea Load-Frequency Control Under Varying Loads", IEEE PES Winter Meeting, Paper A 78, 063-0, Feb. 1978.
25. EL-ABIAD, A. H. and K. NAGAPPAN. - "Transient Stability Regions of Multimachine Power Systems", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-85, nº 2, 169-179, 1966.
26. ELGERD, O. I. - "The Energy System in Steady State - The Control Problem", Electric Energy Systems Theory, Tata McGraw-Hill, New York, 1971.
27. EVANS, F. J. and SCHIZAS - "Digraph Analysis of Large Scale Systems: The System Primitive", Electronics Letters, Vol. 15 nº 2, Sept. 1979, 613-614.
28. EVANS, F. J. and SCHIZAS, C. - "A Graph Theoretic Approach to Multivariable Control System Design", Dept. of Electrical and Electronic Engineering. Queen Mary College, London, Jan. 1980.

29. FITTS, R. E. - "Two Counterexamples to Aizerman's Conjecture", IEEE Trans. Aut. Control, AC-11, 553-536, 1966.
30. FORRESTER, J. W. - "Industrial Dynamics", The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1969.
31. FUJII, K. and K. S. SHOJI - "Verification of the Aizerman and/or Kalman Conjecture", IEEE Trans. Aut. Control AC-17, 406-408, 1972.
32. GANTMACHER, F. R. - "The Theory of Matrices", New York, Chelsea, Vols. I & II, 1959.
33. GLOVER, K. and SILVERMAN, L. M. - "Characterization of Structural Controllability", IEEE Trans. on Automatic Control, AC-21, 534-537, 1976.
34. HABIBAGAH, H. - "Qualitative Analysis of Dynamic Stability in General Equilibrium Theory", Ph. D. Thesis (1966), Purdue University.
35. HAHN, W. - "Stability of Motion", Springer-Verlag, New York, 1967.
36. HAHN, W. - "Theory and Applications of Lyapunov Direct Method", Prentice Hall Inc., N. Jersey, 1963.

37. HARARY, F. - "A Graph Theoretic Method for the Complete Reduction of a Matrix: a View Toward Finding its Eigenvalues", J. Math. and Phys., Vol. 38 (1960) 104-111.
38. HARARY, F. - "The Determinant of the Adjacency Matrix of a Graph", SIAM Review, Vol. 4, nº 3, July 1962, 202-211.
39. HARARY, F., NORMAN, R. Z. and CARTWRIGHT, D. - "Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs", John Wiley & Sons Inc., New York, 1965.
40. HSU, L. e REGO, J. I. - "Compensação Não-Linear de Processos Lineares via Sign Stability", Anais do 3º Congresso Brasileiro de Automática, Rio de Janeiro, 1980 pp. 101-107.
41. HSU, L., SALGADO, L. A. e KASZKUREWICZ, E. - "Structural Properties in the Stability Problem of Interconnected Systems", Proceedings of the Second IFAC Symposium on Large Scale Systems: Theory and Applications, Toulouse, 1980.
42. HOLBROOK, J. G. - "The Recurrent Continuant Method of Transfer Function Synthesis", The Radio and Electronic Engineer, 38, nº 2, 73-79, 1969.

50. KALMAN, R. E. - "Mathematical Description of Linear Dynamical Systems", SIAM Journal Control, Vol. 1, nº 2, 1963.
51. KALMAN, R. E. - "Lyapunov Functions for the Problem of Lur'e in Automatic Control", Proc. Nat. Ac. Sci. USA, Vol. 49, pp. 201-205, 1963.
52. KALMAN, R. E. - "On a New Characterization of Linear Passive Systems", Proc. 1st Allerton Conf. - Circuit and System Theory, Univ. Illinois, 456-470, 1963.
53. KALMAN, R. E. and BERTRAM, J. E. - "Control System Analysis and Design Via the Second Method of Lyapunov: I. Continuous Time Systems; II Discrete-Time Systems, Trans. ASME. J. Basic Eng. 82D, pp. 371-400.
54. KASZKUREWICZ, E. - "Análise de Estabilidade em Dinâmica Industrial", Tese M. Sc., COPPE-UFRJ, Dez. 1972.
55. KASZKUREWICZ, E. e L. HSU - "Um Contra Exemplo para o Teorema de Sign Stability", Publicação COPPE/UFRJ PTC-36/77, 1977.
56. KASZKUREWICZ, E. and HSU, L. - "Stability of Nonlinear Systems: A Structural Approach", Proceedings of the VIIth World-IFAC-Congress, Helsinki, June 1978, pp. 1141-1149.

57. KASZKUREWICZ, E. e L. HSU - "Condições Suficientes para Estabilidade Absoluta Via Sign Stability", Anais do II Congresso Brasileiro de Automática, UFSC, Florianópolis, SC, 1978.
58. KASZKUREWICZ, E. and HSU, L. - "Stability of Nonlinear Systems: A Structural Approach", Automatica, 15, 609-614, 1979.
59. KASZKUREWICZ, E. e HSU, L. - "Estruturas Sign Stable e Redes Passivas: Realizabilidade e Estabilidade", Anais do 3º Congresso Brasileiro de Automática, Rio de Janeiro, 1980, pp. 255-266.
60. KEVORKIAN, A. K. - "Structural Aspects of Large Dynamic Systems", paper 19-3, VIth IFAC World Congress - Boston, 1975.
61. KRON, G. - "Diakoptics", Mc Donald, London (1963).
62. LANCASTER, K. - "The Theory of Qualitative Linear Systems" Econometrica, Vol. 33, Nº 2 (April 1965) 395-408.
63. LANDAU, I. D. - "Adaptive Control: The Model Reference Approach", Marcel Dekker, New York, 1979.

64. LASALLE, J. P. - "Some Extensions of Lyapunov's Second Method", IRE Trans. CT-7. 520-527, 1960.
65. LETOV, A. M. - "Stability in Nonlinear Control Systems", Princeton Univ. Press, Princeton 1961.
66. LIN, C. T. - "Structural Controllability", IEEE Trans. Aut. Control, AC-19, 201-208, 1974.
67. MAY, R. M. - "Qualitative Stability in Model Ecosystems", Ecology n^o 54 (1973) , pp. 638-641.
68. MAYBEE, J. S. - "New Generalizations of Jacobi Matrices", SIAM J. Appl. Math. 14(5) 1033-1039, 1966.
69. MAYBEE, J. S. and QUIRK, J. P. - "Qualitative Problems in Matrix Theory", SIAM Review, 11, 30-51, 1969.
70. METZLER, L. A. - "Stability of Multiple Markets: The Hicks Conditions", Econometrica, Vol. 13, N^o 4, Oct. 1945, pp. 277-292.
71. MICHEL, A. N. - "Stability Analysis of Interconnected Systems", SIAM J. Control, Vol. 12, N^o 3, August 1974, 554-579.
72. MICHEL, A. N. and MILLER, R. K. - "Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems", Academic Press, New York, 1977.

73. MICHEL, A. N. and D. W. PORTER - "Stability Analysis of Composite Systems", IEEE Trans. Automatic Control, AC-17, 222-226, 1972.
74. MICHEL, A. N., R. K. MILLER and W. TANG - "Lyapunov Stability of Interconnected Systems: Decomposition into Strongly Connected Subsystems", IEEE Transactions on Circuits and Systems, CAS-25, 9, 799-809, 1978.
75. MOYLAN, P. J. - "Implications of Passivity in a Class of Nonlinear Systems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-19, No 4, 373-381, 1974.
76. MOYLAN, P. and D. J. HILL - "Stability Criteria for Large Scale Systems", IEEE Trans. Automatic Control, AC-23,2, 143-149, 1978.
77. NARENDRA, K. S. and NEUMAN, C. P. - "Stability of a Class of Differential Equations with Single Monotone Nonlinearity", J. SIAM Control, Vol. 4, No 2, 1966, 295-308.
78. NARENDRA, K. S. and TAYLOR, H. J. - "Frequency Domain Criteria for Absolute Stability", Ac. Press, New York, 1973.
79. NIKAIDO, H. - "Convex Structures and Economic Theory", Ac. Press, London 1968.

80. PAI, M. A.; M. A. MOHAN, and J. G. RAO - "Power System Transient Stability Regions Using Popov's Method", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-89, n^o 5, 788-801, 1970.
81. PERSIDSKII, S. K. - "Problem of Absolute Stability", Autom. Remote Control, 12, 1889-1895, 1969.
82. PIONTKOVSKII, A. A. and L. D. RUTKOVSKAYA - "Investigation of Certain Stability Theory Problems by the Vector Lyapunov Functions Method", Autom. Remote Control, 10 1422-1429, 1967.
83. POPOV, V. N. - "Absolute Stability of Nonlinear Systems of Automatic Control", Aut. and Rem. Control, pp. 857-875, March 1962.
84. POPOV, V. N. - "The Solution of a New Stability Problem for Controlled Systems", Automation and Remote Control, Vol. 24, pp. 1-23, Jan. 1963.
85. POPOV, V. N. - "Hyperstability of Control Systems", New York, Springer-Verlag, 1973.
86. PRASAD, S. C. and Y. K. YADAV - "The Transfer Function Synthesis of LC Ladder Networks". The Radio and Electronic Engineer, Vol. 47, n^o 6, 274-276, 1977.

87. PYATNITSKII, E. S. - "New Research on the Absolute Stability of Automatic Control Systems", *Avtom. Telemekh.*, 6, 5-36, 1968.
88. QUIRK, J. and R. RUPPERT - "Qualitative Economics and the Stability of Equilibrium", *Rev. Economic Studies* 32, 311-326, 1965.
89. QUIRK, J. and SAPOSNIK, R. - "Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics", McGraw-Hill, New York, 1968.
90. ROBERTS, F. S. - "Discrete Mathematical Models", Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
91. ROBERTS, F. S. - "Structure and Stability in Weighted Digraph Models", *Annals of the New York, Academy of Sciences*. Vol. 321 (1979) pp. 64-77.
92. SALGADO NETO, L. A. - "Controle Descentralizado de Potência - Frequência Via Estabilidade Qualitativa", Tese M. Sc. COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, 1979.
93. SAMUELSON, P. A. - "The Stability of Equilibrium: Comparative Statics and Dynamics", *Econometrica*, Vol. 9, Nº 2, April 1941, 97-120.

94. SAMUELSON, P. A. - "The Relation Between Hicksian Stability and True Dynamic Stability", *Econometrica*, Vol. 12, Nos. 3 e 4, July/Oct. 1944, 256-257.
95. SAMUELSON, P. A. - "Foundations of Economic Analysis", Cambridge Harvard University Press, 1959.
96. SANDELL, M. R.; VARAIYA, P.; ATHANS, M. and M. G. SAFONOV - "A Survey of Decentralized Control Methods for Large Scale Systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-23, n° 2, April 1978, 108-128.
97. SCHWARZ, H. R. - "Ein Verfahren zur Stabilitätsfrage bei Matrizen-Eigenwerte-Problem, *Z. Angew. Math. Phys.* 7, 473-500, 1956.
98. SHAKED, V. - "The Zero Properties of Linear Passive Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-22, N° 6, Dec. 1977.
99. SHIELDS, R. W. and J. B. PEARSON - "Structural Controllability of Multiinput Linear Systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-21 (2), 1976.
100. SILJAK, D. D. - "Stability of Large-Scale Systems Under Structural Perturbations", *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. SMC-2, N° 5, Nov. 1972, pp. 657-663.

101. SILJAK, D. D. - "Competitive Economic Systems: Stability, Decomposition and Aggregation", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-21, No 2, April 1976.
102. SILJAK, D. D. - "Large Scale Dynamic Systems: Stability and Structure", North Holland, New York, 1978.
103. SILJAK, D. D. and WEISSENBERGER - "A Construction of the Lur'e Lyapunov Function", Regelungstech. Process-Daten verarbeitung, Vol. 18, pp. 455-456, No 10, 1970.
104. SINGH, V. - "A Note on Kalman's Conjecture for a Class of Third-order Systems", Proc. IEEE, 1246-1247, 1976.
105. VALKENBURG, M. E. V. - "Introduction to Modern Network Syn thesis", J. Wiley & Sons Inc., 1966.
106. VARGA, R. - "Matrix Iterative Analysis" - Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. Jersey, 1962.
107. VENIKOV, V. - "Transient Processes in Electrical Power Sys tems", Moscou, Mir Publishers; 1977.
108. WALL, H. - "Polynomials Whose Zeros Have Negative Real Parts", The Am. Math. Montly, 308-322, 1945.
109. WEINBERG, L. - "Network Analysis and Synthesis", McGraw-Hill, New York, 1962.

110. WILKINSON, J. H. - "The Algebraic Eigenvalue Problem", New York, Oxford 1965.
111. WILLEMS, J. C. - "Dissipative Dynamical Systems", Part I & Part II, Arch Rational. Mech. Anal. Vol. 45, pp. 321-393.
112. WILLEMS, J. L. and J. C. WILLEMS - "The Application of Lyapunov Methods to the Computation of Transient Stability Regions for Multimachine Power Systems", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems PAS-89 (5/6), 795-801, 1970.
113. WILLIAMSON, D. - "Nonlinear Compensation of Linear Processes", Automatica, Vol. 15: 601-608, Sept. 1979.
114. WONHAM, W. M. - "Linear Multivariable Control: A Geometric Approach", Springer Verlag, New York, 1974.
115. YOULA, D. C.; CASTRIOTA, L. J. and CARLIN, H. J. - "Bounded Real Scattering Matrices and the Foundations of Linear Passive Network Theory", IRE Trans. on Circuit Theory, CT-4, pp. 102-124, March 1959.

ÍNDICE DE LOCALIZAÇÃO DE DEFINIÇÕES, TEOREMAS, ...

<u>DEFINIÇÕES</u>	pág.	<u>DEFINIÇÕES</u>	pág.
II.1.....	9	III.13.....	39
II.2.....	9	III.14.....	39
II.3.....	10	III.15.....	40
II.4.....	10	III.16.....	40
II.5.....	10	III.17.....	43
II.6a.....	15	III.18.....	46
II.6b.....	15	III.19.....	47
II.7a.....	16	III.20.....	54
II.7b.....	17	III.21.....	54
II.7c.....	18	III.22.....	69
II.7d.....	18	III.23.....	69
II.8.....	18	III.24.....	70
II.9.....	27	III.25.....	80
III.1.....	31	III.26.....	84
III.2.....	33	III.27.....	85
III.3.....	35	IV.1.....	106
III.4.....	35	IV.2.....	107
III.5.....	35	IV.3.....	107
III.6a.....	36	IV.4.....	112
III.6b.....	36	IV.5.....	112
III.7.....	37	IV.6.....	120
III.8.....	37	V.1.....	195
III.9.....	37		
III.10.....	37		
III.11.....	38		
III.12.....	38		

<u>LEMAS</u>	pāg.	<u>TEOREMAS</u>	pāg.
III.1.....	37	II.1.....	11
III.2.....	43	II.2.....	12
III.3.....	43	II.3.....	12
III.4.....	45	II.4.....	13
III.5.....	46	II.5.....	22
III.6.....	46	II.5(bis).....	24
III.7.....	46	II.6.....	25
III.8.....	47	II.7.....	26
III.9.....	55	III.1.....	37
III.10.....	56	III.2.....	39
III.11.....	57	III.3.....	41
III.12.....	78	III.4.....	48
III.13.....	85	III.5.....	54
III.14.....	87	III.6.....	58
III.15.....	89	III.7.....	71
III.16.....	94	III.8.....	75
V.1.....	164	III.9.....	79
V.2.....	165	III.10.....	81
V.3.....	169	III.11.....	96
V.4.....	171	IV.1a.....	100
V.5.....	173	IV.1b.....	101
V.6.....	197	IV.1c.....	101
A2.1.....	270	IV.2a.....	103
A2.2.....	273	IV.2b.....	103
A3.1.....	275	IV.2c.....	103

<u>TEOREMAS</u>	pāg.	<u>COROLĀRIOS</u>	pāg.
IV.3.....	108	IV.4.....	117
IV.4.....	115	IV.5.....	122
IV.5.....	121	IV.6.....	123
IV.6.....	131	IV.7.....	131
IV.7.....	132		
V.1.....	183	<u>EXEMPLOS</u>	
V.2.....	183	II.1.....	28
V.3.....	184	III.1.....	65
V.4.....	184	III.2.....	76
V.5.....	196	IV.1.....	125
V.6.....	196	IV.2.....	127
A1.1.....	265	IV.3.....	139
A1.2.....	266	IV.4.....	143
		IV.5.....	144
<u>COROLĀRIOS</u>		IV.6.....	148
II.1.....	24	V.1.....	186
II.1(bis).....	27	V.2.....	188
II.2.....	25	V.3.....	188
III.1.....	53	V.4.....	190
III.2.....	59	V.5.....	191
III.3.....	64	VI.1.....	234
III.4.....	74	VI.2.....	242
IV.1.....	109	VI.3.....	249
IV.2.....	110		
IV.3.....	116		

<u>FIGURAS</u>	pāg.	<u>FIGURAS</u>	pāg.
II.1.....	17	VI.1.....	205
III.1.....	65	VI.2.....	215
IV.1.....	105	VI.3.....	223
IV.2.....	112	VI.4.....	226
IV.3.....	119	VI.5.....	235
IV.4.....	130	VI.6.....	238
IV.5.....	140	VI.7.....	246
IV.6.....	146	VI.8.....	251
V.1.....	162		
V.2.....	180		