

Grafos Clique de Arestas

Márcia Rosana Cerioli

Maio de 1997

Resumo

Dado um grafo G , o grafo clique de arestas $K_e(G)$ tem vértices representando as arestas de G e dois vértices de $K_e(G)$ são adjacentes se as arestas correspondentes em G estão em uma mesma clique. Este texto é uma coletânea de resultados relacionados a este operador.

Abstract

Given a graph G , the edge clique graph $K_e(G)$ has vertices representing the edges of G . Two vertices of $K_e(G)$ are joined by an edge if the corresponding edges in G are contained in a clique. This text is a survey of results related to this operator.

Sumário

1	Introdução	3
2	Propriedades básicas	4
3	Número de interseção	6
4	Grafos bons e cobons	7
5	Expoentes	16
5.1	Grafo bom	16
5.2	Grafo cobom	17
6	Classes de grafos clique-de-arestas-fechadas	18
6.1	Grafos planares	19
6.2	Grafos cordais	20
6.3	Grafos fortemente cordais	22
6.4	Grafos de intervalo	23
6.5	Grafos de indiferença	23
6.6	Grafos linha	25
6.7	Grafos de interseção Helly	29
7	Reconhecimento	31
8	Outros operadores	34
8.1	Operador linha	34
8.2	Operador 2-clique	34
8.3	Operador $\Phi_{k,m}$	37
9	Perguntas	37
	Referências bibliográficas	38

1 Introdução

Uma *clique* em um grafo é um conjunto de vértices que induz um subgrafo completo maximal.

Dado um grafo $G = (V, E)$, o *grafo clique de arestas de G* , denotado $K_e(G)$, é o grafo com conjunto de vértices igual a E e tal que existe uma aresta entre dois vértices de $K_e(G)$ se e somente se os extremos das arestas correspondentes em G pertencem a uma mesma clique em G . Um grafo G é *grafo clique de arestas* se existe um grafo H tal que $G = K_e(H)$. Indutivamente, definimos a aplicação iterada do operador por $K_e^r(G) = K_e(K_e^{r-1}(G))$ com $K_e^1(G) = K_e(G)$ e $K_e^0(G) = G$.

Na figura 1, temos um grafo G e seu grafo clique de arestas, $K_e(G)$.

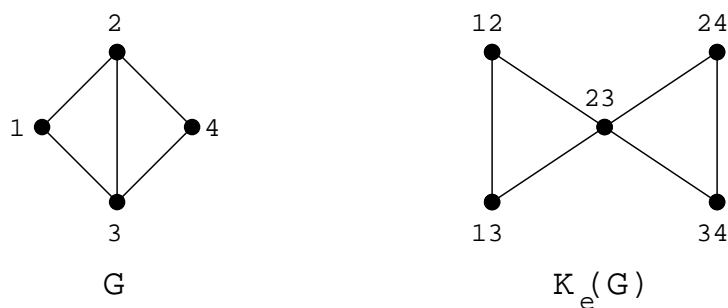


Figura 1: Grafo e seu grafo clique de arestas.

Grafos clique de arestas foram definidos e primeiramente estudados por Albertson e Collins, em 1984 [1], embora tenham sido implicitamente utilizados por Kou, Stockmeyer e Wong, em 1978 [3]. Outros trabalhos sobre o assunto foram feitos por Raychaudhuri [7, 8] e por Chartrand, Kapoor, McKee e Saba [2]. Coletâneas em que este operador aparece foram feitas por Prisner [5, 6].

Este texto está organizado do seguinte modo: na seção 2, apresentamos algumas propriedades básicas do operador clique de arestas. Mostramos que K_3 é o único grafo conexo fixo pelo operador. Na seção 3, são apresentados resultados que relacionam o número de interseção e os tamanhos das coberturas mínimas por clique, tanto de vértices quanto de arestas, nos grafos G e $K_e(G)$. Na seção 4 são apresentadas condições que um grafo deve satisfazer para garantir que seu grafo clique de arestas seja bom, cobom, ou ainda, perfeito. A seção 5 é uma continuação da seção 4. Nela estudamos o número de vezes que o operador deve ser iteradamente aplicado de modo a garantir que o resultado da aplicação seja um grafo bom ou cobom. Na seção 6 são apresentadas as classes

de grafos conhecidas para os quais a aplicação do operador clique dá como resultado grafos ainda na classe. O problema do reconhecimento de grafos clique de arestas é tratado na seção 7. A relação do operador clique de arestas com os operadores linha e 2-clique é tratada na seção 8. Finalmente, na seção 9 são apresentadas as perguntas ainda sem respostas encontradas na literatura, relacionadas a este operador.

As definições utilizadas são as usuais. Se um grafo G não possui arestas, $K_e(G)$ é o grafo vazio, denotado por \emptyset . E, como é feito usualmente no estudo de operadores, $K_e(\emptyset) = \emptyset$. Vamos supor que G possui pelo menos uma aresta, a menos de menção explícita em contrário.

Dados dois grafos G e H , a *combinação* de G com H é o grafo com conjunto de vértices igual a $V(G) \cup V(H)$ e com conjunto de arestas igual a $E(G) \cup E(H) \cup \{uv : u \in V(G) \text{ e } v \in V(H)\}$.

2 Propriedades básicas

O operador clique de arestas claramente não é sobrejetor, dado que, por exemplo, o grafo P_2 (caminho com dois vértices) não é grafo clique de arestas. E também não é injetor, dado que $K_e(C_7^2) = K_e(W_7)$. Este exemplo aparece em [2] e pode ser melhor observado na figura 2.

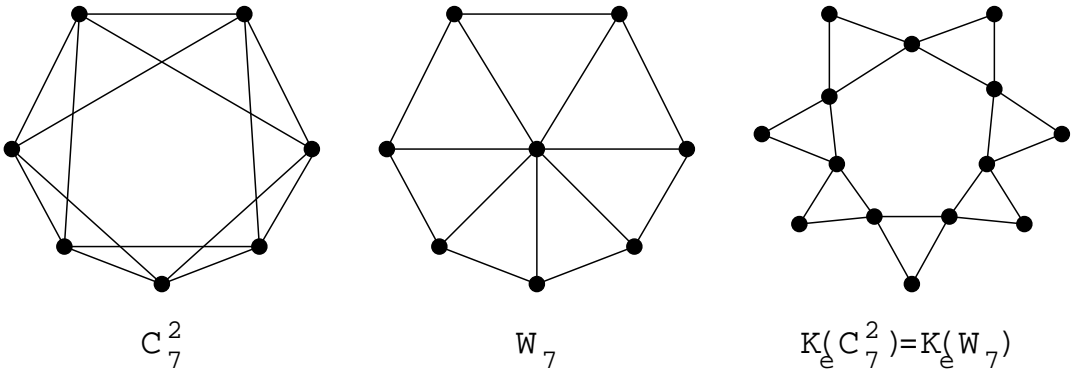


Figura 2: Grafos com o mesmo grafo clique de arestas.

É claro que um conjunto de arestas com ambos os extremos em uma mesma clique em G corresponde a um conjunto de vértices dois a dois adjacentes em $K_e(G)$ e vice-versa. É também claro que uma clique com pelo menos dois vértices em G corresponde a uma clique em $K_e(G)$ e vice-versa. O que determina uma correspondência entre as cliques de G e as de $K_e(G)$. Assim,

ambos os grafos têm a mesma quantidade de cliques, quando G não tem vértices isolados.

Neste texto, denotaremos por $q(G)$ o número de cliques do grafo G e por $M(G)$ o tamanho da maior interseção entre duas cliques de G . Da correspondência acima, $q(G) \geq q(K_e^r(G))$, $r \geq 0$. Mais especificamente, $K_e(G)$ não terá cliques de tamanho 2 e $K_e^2(G)$ não terá cliques de tamanho 1 ou 2. Logo, $q(K_e^r(G)) = q(K_e^{r-1}(G))$, $r \geq 3$.

Proposição 2.1 ([1]) *Se G tem uma clique de tamanho k , então $K_e(G)$ tem uma clique de tamanho $\binom{k}{2}$, e vice-versa.*

Assim sendo, as cliques de um grafo clique de arestas têm tamanho igual a um número triangular, isto é, a um número da forma $\binom{n}{2}$ e, portanto, só pode ser um dos números 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

E, mais ainda, duas cliques de tamanhos m e n que têm t vértices em comum em G correspondem a duas cliques de tamanhos $\binom{m}{2}$ e $\binom{n}{2}$ que têm $\binom{t}{2}$ vértices em comum em $K_e(G)$. E ainda, existem $\binom{m}{2} - \binom{t}{2}$ e $\binom{n}{2} - \binom{t}{2}$ vértices fora da interseção das cliques em $K_e(G)$, enquanto que em G existem $m - t$ e $n - t$ tais vértices.

Juntando as afirmações acima, temos:

Proposição 2.2 (Propriedade dos números triangulares, [1]) *Em um grafo clique de arestas as cliques e as interseções de cliques têm tamanho igual a um número triangular.*

A proposição 2.2 fornece uma condição necessária para que um grafo seja um grafo clique de arestas. No entanto, esta condição não é suficiente. Na figura 3 temos um grafo que satisfaz a propriedade dos números triangulares mas não é grafo clique de arestas de nenhum grafo [2]. Este é o menor tal exemplo que pode ser encontrado.

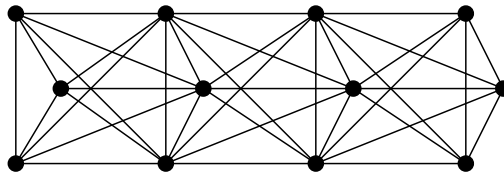


Figura 3: Grafo que não é clique de arestas de nenhum grafo.

Corolário 2.1 *A menos do grafo trivial, nenhuma árvore é grafo clique de arestas.*

Corolário 2.2 *Nenhum $C_n, n \geq 4$, é grafo clique de arestas.*

Corolário 2.3 *Se n não é um número triangular, então K_n não é um grafo clique de arestas.*

Seja N_n o grafo com n vértices e nenhuma aresta. É claro que $K_e(P_n) = N_{n-1}$, $K_e(C_3) = C_3$ e $K_e(C_n) = N_n$, se $n > 3$. E, se B é um grafo bipartido com m arestas, então $K_e(B) = N_m$.

Obviamente, $K_e(K_3) = K_3$, e este é o único grafo conexo fixo pelo operador clique de arestas. De um modo geral, os únicos grafos fixos pelo operador clique de arestas são os grafos em que cada um dos seus componentes conexos é um triângulo.

3 Número de interseção

Um grafo $G = (V, E)$ é um *grafo de interseção* se é possível atribuir a cada vértice $v \in V$ um conjunto $S(v)$, de forma que $xy \in E \Leftrightarrow S(x) \cap S(y) \neq \emptyset$. Chamamos uma família $\mathcal{F} = \{S(v) : v \in V\}$ de *modelo de interseção* de G . E denotamos $S = \bigcup_{v \in V} S(v)$.

É sabido que todo grafo é grafo de interseção. O *número de interseção* de um grafo G , $i(G)$, é a cardinalidade de um menor conjunto S , tal que G é o grafo de interseção de subconjuntos de S .

Dado $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_p\}$ uma família de cliques em um grafo $G = (V, E)$, dizemos que \mathcal{C} é uma *cobertura de vértices* de G se para todo $v \in V$, existe $C_i \in \mathcal{C}$ tal que $v \in C_i$ e dizemos que \mathcal{C} é uma *cobertura de arestas* de G se para todo $uv \in E$, existe $C_i \in \mathcal{C}$ tal que $u, v \in C_i$.

Denotamos por $\theta_e(G)$ o tamanho da menor cobertura de arestas por cliques de G e por $\theta(G)$ o tamanho da menor cobertura de vértices por cliques de G .

O seguinte resultado foi estabelecido por vários autores. Temos a seguir a prova encontrada em [7].

Proposição 3.1 *Para todo grafo sem vértices isolados G , $i(G) = \theta_e(G)$.*

Prova:

Seja $\mathcal{F} = \{S(v) : v \in V\}$ um modelo de interseção de $G = (V, E)$ para o qual $|S|$ seja mínimo, isto é, $S = \{1, 2, \dots, i(G)\}$. Seja $K_j = \{v : j \in S(v)\}$, para todo $j \in S$. Claramente, $K_1, K_2, \dots, K_{i(G)}$ contém todas as arestas de G . Considere C_i uma clique que contém K_i , $1 \leq i \leq i(G)$. Como $C_1, C_2, \dots, C_{i(G)}$ é uma cobertura de arestas por cliques, temos que $\theta_e(G) \leq i(G)$.

Seja $\{C_1, \dots, C_{\theta_e(G)}\}$ uma cobertura de arestas por cliques mínima de G . Seja $S(v) = \{j : v \in C_j\}$. Como G não tem vértices isolados, $\{S(v) : v \in V\}$ é um modelo de interseção de G e daí $i(G) \leq \theta_e(G)$. ■

Obviamente, para todo grafo sem vértices isolados G , $\theta_e(G) = \theta(K_e(G))$, pois existe uma correspondência das cliques de G com as cliques de $K_e(G)$. Logo, temos o seguinte resultado:

Corolário 3.1 *Para todo grafo sem vértices isolados G , $i(G) = \theta(K_e(G))$.*

Kou, Stockmeyer e Wong, em 1978, mostraram que o problema de determinar $i(G)$ é NP -difícil, usando esta relação. Mas pouco se sabe sobre a complexidade deste problema quando classes particulares de grafos são consideradas. Opsut e Roberts, em 1981, mostraram que este problema é polinomial para grafos de intervalo. Já Raychaudhuri [7], exibiu um algoritmo polinomial para determinar o número de interseção de grafos cordais. Pela igualdade acima, o algoritmo determina o grafo clique de arestas do grafo dado, que é cordal pois esta classe é clique-de-arestas-fechada e, depois, utiliza o algoritmo já conhecido para determinar o tamanho da menor cobertura de vértices por cliques, em grafos cordais.

4 Grafos bons e cobons

Seja G um grafo. Denotamos por

$\chi(G)$ o número cromático de G

$\omega(G)$ o tamanho da maior clique de G

$\theta(G)$ o tamanho da menor cobertura (de vértices) por cliques de G

$\alpha(G)$ o tamanho do maior conjunto independente de G .

É claro que, para todo grafo G e seu complemento \bar{G} ,

$$\chi(G) \geq \omega(G), \quad \theta(G) \geq \alpha(G), \quad \chi(G) = \theta(\bar{G}) \quad \text{e} \quad \omega(G) = \alpha(\bar{G}).$$

Albertson e Collins [1] estudaram estes parâmetros para G e $K_e(G)$.

Proposição 4.1 ([1]) *Para todo grafo G , $\omega(K_e(G)) = \binom{\omega(G)}{2}$.*

Prova:

Conseqüência imediata da proposição 2.1. ■

Qualquer coloração (própria) dos vértices de G com k cores fornece uma coloração nas arestas de G com $\binom{k}{2}$ cores e, portanto, uma coloração dos

vértices de $K_e(G)$ com $\binom{k}{2}$ cores. É claro que uma tal coloração dos vértices de $K_e(G)$ é própria, pois dois vértices adjacentes e com a mesma cor em $K_e(G)$ corresponderiam a duas arestas em uma mesma clique de G com a mesma cor e conseqüentemente, a pares de vértices na mesma clique de G com a mesma cor. Assim, temos:

Proposição 4.2 ([1]) *Para todo grafo G , $\binom{\chi(G)}{2} \geq \chi(K_e(G))$.*

Dizemos que um grafo G é *bom* se $\chi(G) = \omega(G)$ e *cobom* se $\theta(G) = \alpha(G)$. Um grafo G é *perfeito* se G e todo subgrafo induzido de G é bom.

Na figura 4 temos um grafo G com $\chi(G) = 4$, $\omega(G) = 3$, $\theta(G) = 3$ e $\alpha(G) = 2$, isto é, G não é bom e nem cobom. Por outro lado, $\chi(K_e(G)) = 3$, $\omega(K_e(G)) = 3$, $\theta(K_e(G)) = 6$ e $\alpha(K_e(G)) = 5$, isto é, $K_e(G)$ é bom mas não é cobom. Mas, $K_e^2(G)$ é tanto bom quanto cobom, visto que $K_e^2(G)$ consiste do grafo desconexo composto por 10 triângulos disjuntos.

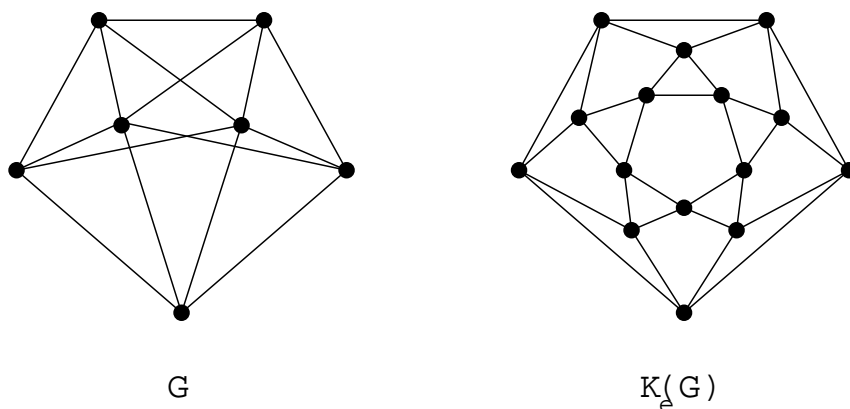


Figura 4: Grafo não bom com grafo clique de arestas bom.

Teorema 4.1 ([1]) *Se G é bom, então $K_e(G)$ é bom.*

Prova:

Como para todo grafo H , $\chi(H) \geq \omega(H)$, temos que $\chi(K_e(G)) \geq \omega(K_e(G))$ e, pelas proposições 4.1 e 4.2

$$\binom{\omega(G)}{2} = \omega(K_e(G)) \leq \chi(K_e(G)) \leq \binom{\chi(G)}{2}.$$

Se G é bom, $\omega(G) = \chi(G)$ e, conseqüentemente, $\omega(K_e(G)) = \chi(K_e(G))$. ■

Cabe observar que para grafo cobom não temos um resultado análogo. De fato, na figura 5, temos um exemplo de um grafo G com $\theta(G) = \alpha(G) = 3$ mas $\theta(K_e(G)) = 7$ e $\alpha(K_e(G)) = 6$.

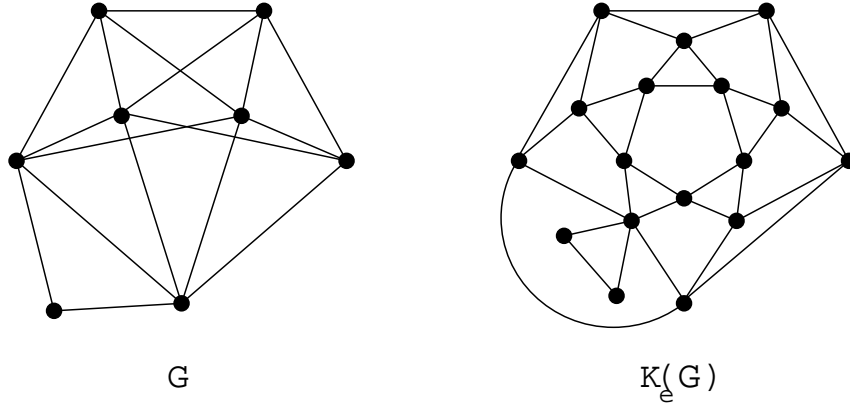


Figura 5: Grafo cobom com grafo clique de arestas não cobom.

Proposição 4.3 ([1]) *Se $\omega(G) = 3$, então $\chi(K_e(G)) \leq \chi(G)$. E se $\chi(G)$ é par, então $\chi(K_e(G)) < \chi(G)$.*

Prova:

Vamos exibir uma coloração apropriada de $K_e(G)$.

Considere, primeiramente, uma coloração das arestas de um grafo completo com vértices $1, 2, \dots, k$. Sabemos que esta coloração pode ser feita com k cores, e até com $k - 1$ cores se k for par. Denote por $c(i, j)$ a cor da aresta ij .

Suponha que G é k -cromático e considere uma k -coloração dos vértices de G com cores $\{1, 2, \dots, k\}$. Para cada aresta de G com extremos coloridos com as cores i e j , pinte-a com a cor $c(i, j)$. Isto fornece uma coloração dos vértices de $K_e(G)$ com k cores se k for ímpar ou com $k - 1$ cores se k for par. Para verificar que tal coloração é própria, basta notar que dois vértices x e y adjacentes em $K_e(G)$ correspondem a arestas em uma mesma clique em G . Assim, por hipótese, x e y estão em um mesmo triângulo de G e portanto, são arestas adjacentes em G . Logo $c(x) \neq c(y)$ em G e portanto x e y têm cores diferentes em $K_e(G)$. ■

Teorema 4.2 ([1]) *Se $\chi(G) \leq 4$, então $K_e(G)$ é bom.*

Prova:

Se $\omega(G) = 2$, $K_e(G)$ é um conjunto de vértices isolados e, portanto é bom.

Se $\omega(G) = 3$, pela proposição 4.3 temos que $\chi(K_e(G)) \leq 3$. Além disso, como $\chi(K_e(G)) \geq \omega(K_e(G)) = 3$, temos que $\chi(K_e(G)) = \omega(K_e(G)) = 3$ e portanto, $K_e(G)$ é bom.

Se $\omega(G) = 4$, G é bom e pelo teorema 4.1, $K_e(G)$ é bom. ■

Seja G_4 a combinação do grafo de Grötzsch com o grafo trivial. Temos $\chi(G_4) = 5$, $\omega(G_4) = 3$, $\chi(K_e(G_4)) = 4$ e $\omega(K_e(G_4)) = 3$. Assim, G_4 é um exemplo de um grafo 5-cromático cujo grafo clique de arestas não é bom. De um modo geral, seja G_r a combinação de M_r com o grafo trivial, onde M_r é o grafo de Mycielski r -cromático, com $r \geq 4$. Claramente, $\omega(G_r) = 3$ e $\chi(G_r) = r + 1$. Construindo $K_e(G_r)$ temos $\omega(K_e(G_r)) = 3$ e $\chi(K_e(G_r)) = r$. Assim, para todo r , $r \geq 5$, existe um grafo r -cromático cujo grafo clique de arestas não é bom. Isso garante que o teorema 4.2 não pode ser melhorado.

Corolário 4.1 ([1]) *Se G é planar, então $K_e(G)$ é bom.*

Prova:

Pois todo grafo planar G é tal que $\chi(G) \leq 4$. ■

Cabe observar que, na verdade, o corolário 4.1 é equivalente ao Teorema das Quatro Cores [1].

Na prova do teorema a seguir faremos uso do fato que o grafo clique de arestas de um grafo planar que não contém K_4 é planar. Este resultado está provado na seção 6.1 onde também estão apresentadas algumas definições relativas a grafos planares.

Teorema 4.3 ([1]) *Se G é planar e $\chi(G) \leq 3$, então $K_e(G)$ é perfeito.*

Prova:

Seja G um grafo planar com $\chi(G) \leq 3$ mas tal que $K_e(G)$ não é perfeito.

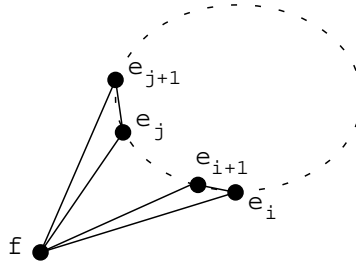
Como G é planar e não contém K_4 , pelo teorema 6.1, $K_e(G)$ é planar. Como a conjectura forte dos grafos perfeitos vale para os grafos planares, $K_e(G)$ deve conter um ciclo ímpar sem cordas de comprimento pelo menos cinco ou o complemento de um tal ciclo. Como o complemento de um C_5 é o próprio C_5 e o complemento de um C_{2k+1} , com $k > 2$, não é planar, temos que $K_e(G)$ contém um ciclo ímpar sem cordas de comprimento pelo menos 5.

Considere os contra-exemplos que fornecem um ciclo ímpar sem cordas de menor tamanho e dentre esses, tome G um grafo com o menor número de arestas. Considere G imerso no plano.

Sejam e_1, \dots, e_m as arestas de G que fornecem um tal ciclo C em $K_e(G)$, nesta ordem. Vamos também denotar por C o conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ de arestas de G .

Obs.1 Se G contém um triângulo separador T , então devem existir r, s , $1 \leq r, s \leq m$, tais que a aresta e_r é interior a T e a aresta e_s é exterior a T . Pois, caso contrário, seria possível eliminar o interior (ou o exterior) de T obtendo um contra-exemplo com menos arestas que G . Além disso, e_r e e_s não são consecutivas em C pois, caso contrário, T não seria separador, dado que arestas consecutivas em C estão em uma mesma clique de G . Assim, existe uma aresta de C entre e_r e e_s que é aresta de T . Analogamente, existe uma aresta de C entre e_s e e_r que está em T . Portanto, existem duas arestas de T que são arestas não consecutivas no ciclo. Tais arestas determinam uma corda em C , o que é uma contradição. Logo, G não tem triângulo separador.

Obs.2 Se G contém uma aresta f , $f \notin C$, tal que existem $e_i, e_{i+1}, e_j, e_{j+1}$, com $i < j$, de modo que e_i, e_{i+1}, f e e_j, e_{j+1}, f são triângulos em G , então $C_1 = e_i, f, e_{j+1}, e_{j+2}, \dots, e_{i-1}$ e $C_2 = e_{i+1}, f, e_j, e_{j-1}, \dots, e_{i+2}$ são ciclos em $K_e(G)$ cujo único vértice comum é f . Qualquer corda de C_1 ou C_2 deve ter um extremo em f e outro em uma aresta e_k do ciclo. Assim, em G , f e e_k estão em uma mesma clique e como $\chi(G) \leq 3$, em um mesmo triângulo. Um destes triângulos seria separador em G , contradizendo a Obs.1. Conseqüentemente, tanto C_1 quanto C_2 são ciclos sem cordas em $K_e(G)$.



Como cada e_i está em exatamente um dos ciclos, e como C é ímpar, exatamente um dos ciclos C_1 ou C_2 é ímpar. O que contradiz a minimalidade de C , a menos que este ciclo seja um triângulo. Mas neste caso, G teria um K_4 , uma contradição. Assim, G não possui uma aresta f em dois triângulos como descrito acima.

Se $I = \{e_i, e_{i+1}, \dots, e_q\}$ é uma seqüência maximal de arestas de C que têm um extremo comum x , então I é chamado de *intervalo em x* .

Suponha que existam n intervalos distintos em x , I_1, I_2, \dots, I_n . Como G está imerso no plano, podemos considerar as arestas incidentes a x que estão entre intervalos consecutivos I_m e I_{m+1} . Vamos mostrar que, neste caso, existem exatamente duas tais arestas.

Se não existisse aresta entre I_m e I_{m+1} , então existiria uma corda em C .

Se existisse uma única aresta entre I_m e I_{m+1} , ela estaria inserida em dois triângulos, um com a última aresta de I_m e outro com a primeira aresta de I_{m+1} , contradizendo a Obs.2.

Se existissem mais de duas arestas entre I_m e I_{m+1} , então existiria pelo menos uma aresta que não está em um triângulo com duas arestas de C . Neste caso, ela pode ser retirada de G sem que o ciclo C seja afetado, contradizendo a minimalidade de G .

Vamos agora construir um novo grafo G' , com o mesmo número de arestas que G . Basta fazer o split de cada vértice x que define n intervalos, se $n > 1$, em n vértices x_1, x_2, \dots, x_n de modo que as arestas incidentes a x_i sejam as de I_i mais a anterior e a posterior. Note que G' também é um contra-exemplo.

Vamos agora mostrar que em cada intervalo em x também existem exatamente duas arestas.

Se existissem pelo menos três arestas, considere x e sejam e_i, e_{i+1} e e_{i+2} arestas incidentes a x . Sejam y_i, y_{i+1} e y_{i+2} , respectivamente os outros extremos dessas arestas. Como $\chi(G') \leq 3$, toda coloração de G' atribui a y_i e y_{i+2} a mesma cor. Construa G'' retirando y_{i+1} de G' e identificando y_i e y_{i+2} . O grafo G'' é planar com $\chi(G'') \leq 3$ e $e_1, e_2, \dots, e_i, e_{i+3}, \dots, e_m$ corresponderia a um ciclo sem cordas de comprimento $m - 2$ em $K_e(G'')$, contradizendo a minimalidade de m , ou, se $m - 2 = 3$ é fácil verificar que $\chi(G') > 3$.

Se existisse exatamente uma aresta e_i incidente a x , o outro extremo de e_i seria incidente a pelo menos três arestas: e_{i-1}, e_i, e_{i+1} , contradizendo o parágrafo anterior.

Logo, os únicos vértices de G' são os vértices x_i que foram definidos pelos splits dos vértices que definem os intervalos e cada um deles é incidente a exatamente duas arestas consecutivas de C . Isto é, $V(G') = \{x_1, \dots, x_m\}$.

Considere o grafo obtido de G' contraindo os vértices $\{x_3, x_5, \dots, x_{m-2}\}$ a um único vértice y e $\{x_4, x_6, \dots, x_{m-1}\}$ a um único vértice z . Este grafo tem cinco vértices: x_1, x_2, y, z e x_m , dois a dois adjacentes. O que garante, pelo teorema de Kuratowski que G' não é planar, uma contradição. ■

Como um exemplo que ilustra a necessidade da hipótese de 3-coloração do teorema 4.3 temos, na figura 4, um grafo planar 4-cromático cujo grafo clique de arestas não é perfeito [1]. Por outro lado, o grafo C_9^2 é 3-cromático e não é planar. Como $K_e(C_9^2)$ não é perfeito, este exemplo ilustra a necessidade da hipótese de planaridade do teorema 4.3 [1].

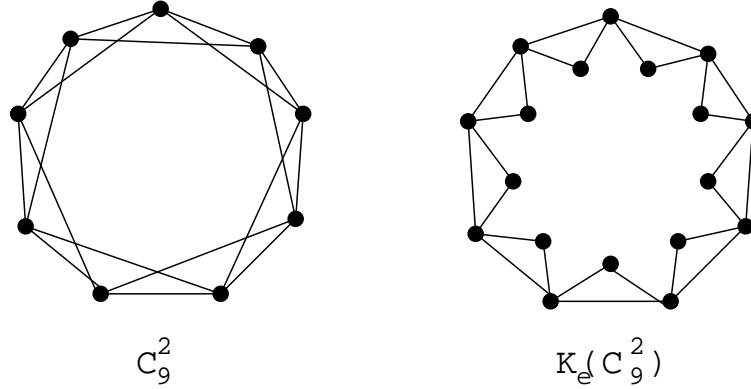


Figura 6: Grafo não planar com grafo clique de arestas planar.

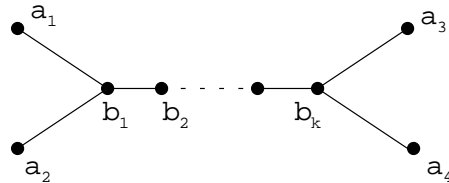
Raychaudhuri também tem um resultado na área de grafos cobons [8]. Seu trabalho é relacionado aos grafos clique de arestas dos grafos comparabilidade.

Um grafo $G = (V, E)$ é um *grafo de comparabilidade* se G admite uma orientação transitiva em suas arestas, isto é, se existe uma orientação F de E tal que

$$\forall u, v, w \in V \quad u \rightarrow v \in F \quad \text{e} \quad v \rightarrow w \in F \quad \Rightarrow \quad u \rightarrow w \in F.$$

Se um grafo G admite uma orientação transitiva, existe uma ordem parcial de seus vértices e é possível determinar o diagrama de Hasse associado a G . Para apresentar o trabalho de Raychaudhuri, precisamos de alguns resultados preliminares. No que segue, consideramos o diagrama de Hasse implicitamente orientado da esquerda para a direita e denotamos por W_4 o grafo roda com quatro aros.

Proposição 4.4 ([8]) *Se G é de comparabilidade sem W_4 , então nenhum diagrama de Hasse de G contém um subgrafo isomorfo ao grafo*



Prova:

Suponha que algum diagrama de Hasse de G tenha tal subgrafo. Os vértices a_1, a_2, b_1, a_3 e a_4 , as arestas entre eles no diagrama de Hasse e as implícitas por transitividade formam um W_4 induzido em G . ■

Dados G um grafo de comparabilidade sem W_4 e H um diagrama de Hasse

de G , denotamos por X o conjunto dos elementos maximais de H e por Y o conjunto dos minimais.

Vamos agora definir D , a *rede associada* a H . Tal rede é construída da seguinte forma: Explícite a orientação das arestas de H . Se $|X| = 1$, denote este único vértice por s e considere-o uma fonte. Se $|X| > 1$, acrescente um vértice fonte s e os arcos sx , para todo $x \in X$. Analogamente, se $|Y| = 1$, denote este único vértice por t e considere-o um sumidouro. Se $|Y| > 1$, acrescente um vértice sumidouro t e os arcos yt , para todo $y \in Y$. Defina a *necessidade* (capacidade mínima) de cada arco de D como sendo 1.

Como H é subgrafo de D , temos que D também não conterá o subgrafo da proposição 4.4 como subgrafo induzido. De fato, se contivesse, algum a_i deveria ser s ou t . É claro que s só pode ser a_1 ou a_2 . Se $s = a_1$, então b_1 seria um elemento maximal de H , uma contradição pois a_2b_1 é um arco de D . Analogamente, t só poderia ser a_3 ou a_4 . Se $t = a_3$, então b_k seria um elemento minimal de H , uma contradição pois $b_k a_4$ é um arco de D .

Proposição 4.5 ([8]) *Se G é de comparabilidade sem W_4 , então $\theta_e(G) = f^*$, onde f^* é o fluxo mínimo da rede associada ao diagrama de Hasse de G .*

Prova:

Considere $C_1, C_2, \dots, C_{\theta_e(G)}$ uma cobertura de arestas por cliques de G . Como G é de comparabilidade, cada C_i corresponde a um caminho P_i em H , e portanto em D , que tem o primeiro vértice em X e o último em Y . Observe que toda aresta de H pertence a pelo menos um destes caminhos.

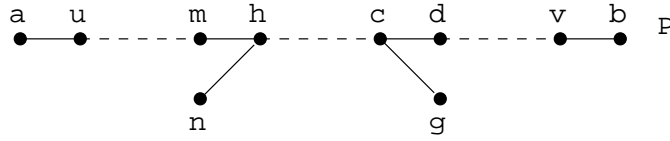
Defina um fluxo f em D , associando o valor 1 a cada um dos arcos destes caminhos. Assim, o fluxo de cada arco é igual ao número de caminhos P_i a que ele pertence. Para os arcos do tipo sx ou yt associe valores de modo a manter a conservação do fluxo. É claro que o valor de f é $\theta_e(G)$. Assim, $\theta_e(G) \geq f^*$.

Considere f^* o fluxo mínimo em D . Como as necessidades em D são números inteiros, f^* tem um valor inteiro e pode ser decomposto em fluxos unitários P_1, P_2, \dots, P_{f^*} que são caminhos de s a t .

Assim, temos $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_{f^*}\}$, um conjunto de cliques que cobre todas as arestas de H . Suponha que exista $e = ab$, uma aresta de G que não está coberta por \mathcal{C} .

Considere P um caminho de a a b em H . Sejam u e v tais que $au \in P$ e $vb \in P$. Se $au \in P_i$ e $vb \in P_i$, então $ab \in C_i$, uma contradição. Seja i tal que $au \in P_i$ e P_i contém o vértice mais distante de a em P . Seja c tal vértice. Pela afirmação anterior, $c \neq b$. Assim, c não é elemento minimal. Seja d o vértice

seguinte a c em P e g o vértice seguinte a c em P_i , que existe pois P_i é caminho de s a t . É claro que $d \neq g$ e $dg \notin E(H)$ pois H não contém triângulo.



Seja h tal que $cd \in P_j$, $au \notin P_j$ e h é o primeiro vértice de P que está em P_j . Como $h \neq a$, h não é elemento maximal. Seja m o vértice anterior a h em P e n o vértice anterior a h em P_j . É claro que $m \neq n$ e $mn \notin E(H)$.

Assim, m, n, h, c, d, g e a seção de P de h a c formam um subgrafo de H isomorfo ao da proposição 4.4, uma contradição.

Logo \mathcal{C} é uma cobertura de arestas por cliques de G de tamanho f^* e, portanto, $\theta_e(G) \leq f^*$. ■

Teorema 4.4 (Dilworth, 1950) *Se $D = (V, A)$ é um digrafo acíclico, então o número mínimo de caminhos direcionados necessários para cobrir os arcos em A é igual ao número máximo de arcos de A que não estão, dois a dois, contidos no mesmo caminho direcionado em D .*

Finalmente, temos:

Teorema 4.5 ([8]) *Se G é de comparabilidade sem W_4 , então $K_e(G)$ é cobom.*

Prova:

Seja G um grafo de comparabilidade sem W_4 com diagrama de Hasse direcionado H . Pela proposição 4.5, $\theta_e(G)$ é igual ao número mínimo de caminhos direcionados que cobrem os arcos de H .

Seja $\beta(G)$ o número máximo de arestas de G que não estão duas a duas em uma mesma clique de G . Como cliques em G correspondem a caminhos direcionados em H , $\beta(G)$ é igual ao número máximo de arcos de H que não estão, dois a dois, contidos no mesmo caminho direcionado em H .

Pelo teorema de Dilworth, $\beta(G)$ é igual ao número mínimo de caminhos direcionados que cobrem os arcos de H , logo $\beta(G) = \theta_e(G)$.

Como $\beta(G) = \alpha(K_e(G))$ e $\theta_e(G) = \theta(K_e(G))$, $K_e(G)$ é um grafo cobom. ■

5 Expoentes

Albertson e Collins [1] estudaram a aplicação iterada do operador clique de arestas no contexto dos grafos bons e cobons. Provaram que existe um inteiro m tal que $K_e^r(G)$ é tanto bom quanto cobom, para todo $r \geq m$. Nesta seção, estes resultados serão tratados com algumas melhorias.

A aplicação iterada do operador clique de arestas pode levar a um grafo que não possui arestas e, conseqüentemente, ao grafo vazio. Para simplificar as definições e resultados desta seção, vamos admitir que o grafo vazio é tanto bom quanto cobom. Todos os logaritmos são na base 2.

5.1 Grafo bom

O expoente χ de um grafo G , denotado por $\chi\text{-exp}(G)$, é o menor inteiro m tal que $K_e^r(G)$ é bom, para todo $r \geq m$.

Pelo teorema 4.1 temos que se G é bom, $\chi\text{-exp}(G) = 0$ e se $K_e^m(G)$ é bom, então $K_e^r(G)$ é bom, para todo $r \geq m$. Mas não está claro se o parâmetro $\chi\text{-exp}$ está bem definido, isto é, poderia acontecer que $K_e^m(G)$ não fosse bom, para nenhum m . No entanto, Albertson e Collins exibiram uma cota superior para o expoente χ de um grafo com pelo menos três cliques. Observamos que todo grafo com no máximo duas cliques é bom e tem expoente χ igual a 0.

Teorema 5.1 ([1]) $\chi\text{-exp}(G) \leq \max\{0, \lceil \log(\frac{\log \binom{q(G)}{2}}{\log \omega(G) - \log M(G)}) \rceil\}$.

Prova:

Se $\omega(G) \geq \binom{q(G)}{2} M(G)$, então é possível colorir os vértices de G com $\omega(G)$ cores pois existem cores suficientes para colorir propriamente os vértices que estão em mais de uma clique e também para completar a coloração, colorindo os vértices que estão em uma única clique. Neste caso, G é bom, $\chi\text{-exp}(G) = 0$ e temos o resultado.

Para completar a prova é suficiente mostrar que existem H e s tais que $H = K_e^s(G)$ e $\frac{\omega(H)}{M(H)} \geq \binom{q(H)}{2}$.

Como $q(G) \geq q(K_e^r(G))$, para todo número natural r , basta mostrar que $\frac{\omega(H)}{M(H)} \geq \binom{q(G)}{2}$.

Observamos que, $s \geq \log(\frac{\log \binom{q(G)}{2}}{\log \omega(G) - \log M(G)}) \Leftrightarrow 2^s \geq \frac{\log \binom{q(G)}{2}}{\log \omega(G) - \log M(G)} \Leftrightarrow 2^s \log \frac{\omega(G)}{M(G)} \geq \log \binom{q(G)}{2} \Leftrightarrow \log \left(\frac{\omega(G)}{M(G)}\right)^{2^s} \geq \log \binom{q(G)}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{\omega(G)}{M(G)}\right)^{2^s} \geq \binom{q(G)}{2}$.

E também que, se n e m são inteiros com $n \geq m \geq 2$, então $\binom{\frac{n}{2}}{\frac{m}{2}} \geq \left(\frac{n}{m}\right)^2$.

Assim, tomando $s \geq \log\left(\frac{\log\binom{q(G)}{2}}{\log\omega(G) - \log M(G)}\right)$ e $H = K_e^s(G)$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\omega(H)}{M(H)} &= \frac{\omega(K_e^s(G))}{M(K_e^s(G))} = \frac{\binom{\omega(K_e^{s-1}(G))}{2}}{\binom{M(K_e^{s-1}(G))}{2}} \geq \left(\frac{\omega(K_e^{s-1}(G))}{M(K_e^{s-1}(G))}\right)^2 \geq \\ &\geq \left(\frac{\omega(K_e^{s-2}(G))}{M(K_e^{s-2}(G))}\right)^{2^2} \geq \dots \geq \left(\frac{\omega(K_e^{s-s}(G))}{M(K_e^{s-s}(G))}\right)^{2^s} = \left(\frac{\omega(G)}{M(G)}\right)^{2^s}, \end{aligned}$$

logo, $\frac{\omega(H)}{M(H)} \geq \binom{q(G)}{2}$ e, neste caso, H é bom. ■

Considere o grafo bipartido completo $K_{1,r}$, $r > 2$. Temos que, $q(K_{1,r}) = r$, $\omega(K_{1,r}) = 2$ e $M(K_{1,r}) = 1$. Como $K_{1,r}$ é bom, $\chi\text{-exp}(K_{1,r}) = 0$, mas a cota superior dada por Albertson e Collins é $\lceil \log(\log\binom{r}{2}) \rceil$, o que exemplifica que esta cota pode estar bem afastada do valor real do expoente χ do grafo.

Por outro lado, se considerarmos o grafo bom G formado por r cliques de tamanho $\binom{r}{2}$, $r > 2$, que se interceptam no mesmo vértice, temos $q(G) = r$, $\omega(G) = \binom{r}{2}$, $M(G) = 1$ e que a cota dada por Albertson e Collins é o próprio expoente χ de G .

Albertson e Collins observaram que existem grafos com expoente χ arbitrariamente grande. Tal exemplo é obtido pela família de grafos H_n , onde cada H_n é a combinação do grafo de Mycielski n -cromático com o grafo K_3 [1].

5.2 Grafo cobom

O expoente θ de um grafo G , denotado por $\theta\text{-exp}(G)$, é o menor inteiro m tal que $K_e^r(G)$ é cobom, para todo $r \geq m$.

Dado que o grafo da figura 5 mostra um grafo cobom com grafo clique de arestas não cobom, não está claro que este parâmetro esteja bem definido. No entanto, Albertson e Collins exibiram uma cota superior para o expoente θ de um grafo.

Um vértice é *simplicial* se ele pertence a exatamente uma clique.

Teorema 5.2 ([1]) $\theta\text{-exp}(G) \leq \lceil \log(\omega(G)) \rceil$.

Prova:

Se toda clique em uma cobertura de vértices por cliques mínima de G contém um vértice simplicial, então estes vértices simpliciais formam um conjunto independente que comprovam que G é cobom.

Assim, é suficiente mostrar que tomando $r \geq \lceil \log\omega(G) \rceil$, toda clique de $K_e^r(G)$ conterà um vértice simplicial.

Como todo vértice em $K_e(G)$ vem de um par de vértices adjacentes em G , um vértice de $K_e^r(G)$ vem de 2^r vértices, não necessariamente distintos, de G .

Se $2^r \geq \omega(G)$, então toda clique de $K_e^r(G)$ contém um vértice x que veio de todos os vértices da clique correspondente em G , digamos x_1, \dots, x_t . Se x não é simplicial, então x_1, \dots, x_t devem estar contidos na interseção de duas cliques distintas de G . Uma contradição, pois x_1, \dots, x_t formam uma clique em G . ■

Considere o grafo completo K_n . Como K_n é cobom, $\theta\text{-exp}(K_n) = 0$. No entanto, a cota superior dada por Albertson e Collins é $\lceil \log n \rceil$, isto é, pode estar bem distante do valor real do expoente θ do grafo.

Por outro lado, nos ciclos ímpares, C_{2k+1} , temos $\omega(C_{2k+1}) = 2$, logo a cota de Albertson e Collins fornece valor 1. Tais grafos não são cobons dado que $\theta(C_{2k+1}) = k+1$ e $\alpha(C_{2k+1}) = k$, mas $K_e(C_{2k+1}) = N_{2k+1}$ que é cobom. Assim, $\theta\text{-exp}(C_{2k+1}) = 1$, mostrando que a cota de Albertson e Collins pode fornecer um resultado exato.

Albertson e Collins observaram que existem grafos com expoente θ arbitrariamente grande. Tal exemplo é obtido pela família de grafos $K_e(T_{2n})$, onde cada T_{2n} é obtido pela retirada de um emparelhamento perfeito do grafo completo K_{2n} [1].

Relacionado a grafos bons e cobons, poderíamos considerar de forma análoga o *expoente perfeito* de um grafo com sendo o menor inteiro m tal que $K_e^r(G)$ é perfeito, para todo $r \geq m$. No entanto, este parâmetro não está bem definido.

Seja P o grafo obtido pela combinação de um C_5 com um K_3 . O grafo P não é perfeito dado que contém um ciclo ímpar sem cordas como subgrafo induzido. Como é fácil provar que se G contém P como subgrafo induzido, então $K_e(G)$ também contém, temos que $K_e^r(G)$ conterá P e, portanto, C_5 como subgrafo induzido. Assim, $K_e^r(P)$ não é perfeito, para todo r .

6 Classes de grafos clique-de-arestas-fechadas

Considere uma classe de grafos \mathcal{G} . Se $K_e(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{G}$, dizemos que \mathcal{G} é uma classe *clique-de-arestas-fechada* ou *fechada sob o operador K_e* . Se, além disso, para cada $G \in \mathcal{G}$ existir $H \in \mathcal{G}$ tal que G é o grafo clique de arestas de H , isto é, se $\mathcal{G} = K_e(\mathcal{G})$, dizemos que \mathcal{G} é uma classe *clique-de-arestas fixa* ou *fixa sob o operador K_e* .

Como o grafo completo com dois vértices não é grafo clique de aresta de

nenhum grafo, temos que qualquer classe de grafos que possua o grafo K_2 como elemento, não é fixa sob o operador K_e .

O teorema 4.1 garante que a classe dos grafos bons é clique-de-arestas-fechada. A seguir, apresentamos outras classes de grafos que também possuem esta propriedade.

6.1 Grafos planares

Um grafo G é *planar* se pode ser desenhado no plano sem cruzamento de arestas.

Sabemos que para estudar grafos planares é suficiente estudar triangulações. Em uma triangulação do plano um triângulo é *separador* se sua remoção desconecta o grafo. Observamos que, neste caso, o grafo pode ser particionado no triângulo, uma parte interior ao triângulo e outra parte exterior ao triângulo. De uma maneira geral, dado um grafo G desenhado no plano, um triângulo é separador se particiona o grafo em três partes, como descrito acima.

É claro que, se G é planar com $\omega(G) = 4$, então $K_e(G)$ não será planar pois conterá um K_6 . Mas, temos o seguinte resultado:

Teorema 6.1 ([1]) *Se G é planar e $\omega(G) \leq 3$, então $K_e(G)$ é planar.*

Prova:

Suponha que G esteja imerso no plano e considere uma triangulação G' de G . Identifique cada vértice de $K_e(G')$ com um ponto arbitrário da aresta correspondente em G' . Se nenhuma clique de tamanho três de G' é um triângulo separador, então é claro que as arestas de $K_e(G')$ podem ser desenhadas sem cruzamentos, no interior das faces de G' . Se G' contém um triângulo separador T , seja G_1 o subgrafo de G' formado por T e a parte de G' interior a T . Analogamente, seja G_2 o subgrafo de G' formado por T e a parte de G' exterior a T . Por indução, podemos imergir $K_e(G_1)$ e $K_e(G_2)$ no plano. Em cada caso isso deve ser feito de modo que a clique de tamanho 3 correspondente a T seja uma face de fronteira. Uma imersão de $K_e(G')$ pode ser obtida das imersões de $K_e(G_1)$ e $K_e(G_2)$ identificando as cliques correspondentes a T . Finalmente, deletando os vértices de $K_e(G')$ correspondentes a arestas acrescentadas na triangulação, obtemos uma imersão no plano de $K_e(G)$. ■

Observamos que, se $K_e(G)$ é planar, não é sempre o caso que G é planar. Basta considerar o grafo de Petersen, por exemplo.

6.2 Grafos cordais

Um grafo $G = (V, E)$ é *cordal* se todo ciclo em G com pelo menos quatro vértices tem uma corda. Grafos cordais também são chamados de grafos *triangularizados*, *circuito rígido* ou *de eliminação perfeita*.

A classe dos grafos cordais tem várias caracterizações e vamos mencionar somente algumas que têm interesse no que segue.

Dirac, em 1961, mostrou que se G não é um grafo completo, G é cordal se e somente se G tem um corte clique, isto é, um conjunto de vértices S que é uma clique e $G \setminus S$ é desconexo.

Um *esquema de eliminação perfeito* de um grafo $G = (V, E)$ é uma ordem $\sigma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ nos vértices de V , tal que se $v_i < v_j$ e $v_i < v_k$ em σ e $v_i v_j \in E$, $v_i v_k \in E$, então $v_j v_k \in E$, isto é, $S_i = \{v_i\} \cup \{v_j \in \text{Adj}(v_i) : v_j > v_i\}$ é uma clique em G .

Fulkerson e Gross, em 1965, mostraram que um grafo G é cordal se e somente se existe um esquema de eliminação perfeito de G .

Gavril, em 1974, mostrou que um grafo G é cordal se e somente se existe uma árvore T e uma família \mathcal{T} de subárvores de T , tal que G é o grafo de interseção de \mathcal{T} .

Encontramos na literatura três provas de que a classe dos grafos cordais é clique-de-arestas-fechada.

A primeira, de Albertson e Collins, de 1984, é baseada no fato de que todo grafo cordal que não é completo tem um corte clique.

Teorema 6.2 ([1]) *Se G é cordal, então $K_e(G)$ é cordal.*

Prova:

Seja G um grafo cordal, minimal em relação ao número de vértices, tal que $K_e(G)$ não seja cordal. Seja e_1, \dots, e_r , com $r \geq 4$, a seqüência de arestas de G que corresponde a um ciclo sem cordas em $K_e(G)$.

Pela minimalidade de G , todo vértice de G é extremo de uma das arestas e_i , $i = 1, \dots, r$. Observe que dadas duas arestas correspondentes a vértices consecutivos no ciclo, seus extremos são iguais ou adjacentes.

Seja S um corte clique em G (que existe pois G é cordal e não é completo). Sejam e_i e e_j duas arestas que tenham pelo menos um de seus extremos em componentes distintos de $G \setminus S$. Sejam x_i e x_j , respectivamente, tais extremos. Estas arestas correspondem a vértices não consecutivos no ciclo de $K_e(G)$ pois, caso contrário, $x_i x_j \in E(G)$ ou $x_i = x_j$.

Em e_i, e_{i+1}, \dots, e_j existe uma aresta e_k que tem ambos os extremos em S . De fato, um caminho de x_i a x_j em G , dado por e_i, e_{i+1}, \dots, e_j , passa por S e os extremos de duas arestas consecutivas em e_i, e_{i+1}, \dots, e_j ou são iguais ou são adjacentes, fornecendo ou uma aresta com ambos os extremos em S ou um par de arestas consecutivas com uma tendo um extremo no mesmo componente de x_i e outra um extremo no mesmo componente de x_j , formando uma aresta entre os dois componentes, uma contradição.

Analogamente, em $e_j, e_{j+1}, \dots, e_r, e_1, \dots, e_i$ existe uma aresta e_m que tem ambos os extremos em S .

Obviamente, $k \neq m$ e, sendo e_k e e_m duas arestas na mesma clique S de G , elas correspondem a vértices adjacentes em $K_e(G)$, formando uma corda no ciclo, uma contradição. ■

A segunda prova é de Raychaudhuri, de 1988, e é baseada no esquema de eliminação perfeito de um grafo cordal.

Dada uma ordem $\sigma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dos vértices de G , a *ordem lexicográfica σ' de E induzida por σ* é definida da seguinte forma:

Se $v_i v_j$ e $v_k v_l$ são arestas de G com $v_i < v_j$ e $v_k < v_l$, então $v_i v_j < v_k v_l$ em σ' se e somente se $v_i < v_k$ em σ , ou $v_i = v_k$ e $v_j < v_l$ em σ .

Teorema 6.3 ([7]) *Se σ é um esquema de eliminação perfeito do grafo cordal, então σ' é um esquema de eliminação perfeito de $K_e(G)$, isto é, se G é cordal, então $K_e(G)$ é cordal.*

Prova:

Sejam $e_i = v_{i1} v_{i2}$, $e_j = v_{j1} v_{j2}$ e $e_k = v_{k1} v_{k2}$ três arestas de G com $v_{i1} < v_{i2}$, $v_{j1} < v_{j2}$ e $v_{k1} < v_{k2}$ em σ . Se $e_i < e_j$ e $e_i < e_k$ em σ' com $e_i e_j \in E(K_e(G))$ e $e_i e_k \in E(K_e(G))$, queremos mostrar que $e_j e_k \in E(K_e(G))$.

Por definição, e_i e e_j estão em uma mesma clique de G e e_i, e_k também estão em uma mesma clique de G . Como temos que $v_{i1} \leq v_{j1} < v_{j2}$ e $v_{i1} \leq v_{k1} < v_{k2}$, temos que $\{v_{j1}, v_{j2}, v_{k1}, v_{k2}\} \subseteq S_{i1}$ em σ , isto é, estão todos em uma mesma clique de G e $e_j e_k \in E(K_e(G))$. ■

A terceira prova, descrita por Raychaudhuri, em 1991, é baseada na caracterização de Gavril dos grafos cordais e faz uso do fato que toda família de subárvores de uma árvore satisfaz a propriedade Helly. Esta prova aparece na seção 6.7.

6.3 Grafos fortemente cordais

Um *esquema de eliminação forte* de um grafo $G = (V, E)$ é uma ordem $\sigma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ nos vértices de V , tal que se $v_i < v_j$ e $v_k < v_l$ em σ e $v_k, v_l \in Adj[v_i]$ e $v_k \in Adj[v_j]$, então $v_l \in Adj[v_j]$.

Um grafo $G = (V, E)$ é *fortemente cordal* se existe um esquema de eliminação forte de G . Esta classe de grafos foi definida e estudada por Farber, em 1983.

Note que todo esquema de eliminação forte é também um esquema de eliminação perfeito. Para isso, basta considerar $i = k$ na definição de esquema de eliminação forte. Assim, todo grafo fortemente cordal também é cordal. Conseqüentemente, se G é um grafo fortemente cordal, então pelo teorema 6.2, $K_e(G)$ é um grafo cordal. Raychaudhuri, em 1988 [7], provou que neste caso, $K_e(G)$ também é fortemente cordal.

Seja $A(G)$ a matriz de incidência clique por vértice de um grafo $G = (V, E)$, isto é, as linhas de $A(G)$ são indexadas pelas cliques de G e as colunas pelos vértices de G , sendo que a entrada $a_{ij} = 1$ se e somente se o vértice v_j pertence a clique K_i .

Farber, entre muitas caracterizações dos grafos fortemente cordais, provou que:

Teorema 6.4 (Farber, 1983) *Um grafo G é fortemente cordal se e somente se existe uma permutação das linhas e colunas de $A(G)$ que não contém a submatriz Γ , onde $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

Seja $B(G)$ a matriz de incidência clique por aresta de um grafo G . É claro que $B(G) = A(K_e(G))$, quando G não tem vértices isolados.

Observamos que se G possui vértices isolados e G' é o grafo obtido de G pela remoção destes vértices, então $K_e(G) = K_e(G')$. Observamos ainda que G é fortemente cordal se e somente se G' é fortemente cordal. Vamos considerar somente grafos fortemente cordais sem vértices isolados.

Teorema 6.5 ([7]) *Se G é fortemente cordal, então existe uma permutação das linhas e colunas de $B(G)$, tal que $B(G)$ não contém a submatriz Γ , isto é, se G é fortemente cordal, então $K_e(G)$ é fortemente cordal.*

Prova:

Seja $\sigma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ um esquema de eliminação forte de G e sejam C_1, C_2, \dots, C_q as cliques de G na ordem que fornecem a matriz $A(G)$ sem Γ .

Seja σ' a ordem lexicográfica de $E(G)$ induzida por σ . Vamos mostrar que considerando as arestas na ordem dada por σ' e as cliques na ordem C_1, C_2, \dots, C_q , a matriz $B(G)$ não tem Γ .

Supondo que $B(G)$ contém um Γ formado por $C_r < C_s$ e $e_i < e_j$, temos dois casos a considerar:

caso 1: As arestas e_i e e_j têm um vértice em comum a , isto é, $e_i = ab$ e $e_j = ac$. Logo, $\{a, b, c\} \subseteq C_r$, $\{a, b\} \subseteq C_s$ e $c \notin C_s$. Como $e_i < e_j$ em σ' , temos que $b < c$ em σ . Assim, $C_r < C_s$ e $b < c$ formam um Γ em $A(G)$, uma contradição.

caso 2: As arestas e_i e e_j não têm um vértice em comum, isto é, $e_i = ab$ e $e_j = cd$. Logo, podemos considerar $a < b$ e $c < d$, e como $e_i < e_j$ em σ' , $a < c$ em σ . Portanto, $a < c < d$ em σ . Mas $\{a, b, c, d\} \subseteq C_r$, $\{a, b\} \subseteq C_s$ e $c \notin C_s$ ou $d \notin C_s$. Assim, $C_r < C_s$ e $a < c$ ou $C_r < C_s$ e $a < d$ formam um Γ em $A(G)$, uma contradição. ■

6.4 Grafos de intervalo

Um grafo $G = (V, E)$ é *de intervalo* se G é o grafo de interseção de uma família de intervalos sobre a reta real. Uma tal família de intervalos é chamada de *modelo de intervalos* de G .

Teorema 6.6 ([2]) *Se G é de intervalo, então $K_e(G)$ é de intervalo.*

Prova:

Seja $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_n\}$ um modelo de intervalos de G . Assim, $\mathcal{I}' = \{I_{ij} = I_i \cap I_j : I_i \cap I_j \neq \emptyset \text{ e } i \neq j\}$ é um modelo de intervalos de $K_e(G)$. De fato, basta observar que os vértices de $K_e(G)$ estão em correspondência com os elementos de \mathcal{I}' e, dois vértices ij e kl são adjacentes em $K_e(G) \Leftrightarrow$ as arestas ij e kl estão em uma mesma clique de $G \Leftrightarrow$ os vértices i, j, k e l estão em uma mesma clique de $G \Leftrightarrow I_i \cap I_j \neq \emptyset, I_i \cap I_k \neq \emptyset, I_i \cap I_l \neq \emptyset, I_j \cap I_k \neq \emptyset, I_j \cap I_l \neq \emptyset$ e $I_k \cap I_l \neq \emptyset \Leftrightarrow (*) (I_i \cap I_j) \cap (I_k \cap I_l) \neq \emptyset \Leftrightarrow I_{ij} \cap I_{kl} \neq \emptyset$.

A equivalência $(*)$ se deve ao fato que qualquer família de intervalos sobre a reta real que têm interseção dois a dois tem um elemento em comum a todos os intervalos (Propriedade Helly). ■

6.5 Grafos de indiferença

Um grafo $G = (V, E)$ é *de indiferença* se G é o grafo de interseção de uma família de intervalos de comprimento unitário sobre a reta real. Decorre da

definição que todo grafo de indiferença é grafo de intervalo. Mais especificamente, temos o seguinte resultado:

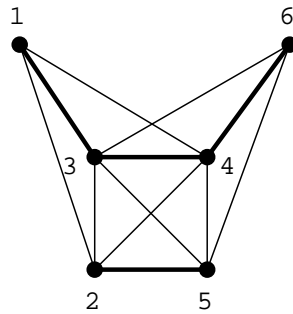
Teorema 6.7 (Roberts, 1969) *Um grafo de intervalo é de indiferença se e somente se não contém $K_{1,3}$ como subgrafo induzido.*

Teorema 6.8 *Se G é de indiferença e $\omega(G) \leq 3$, então $K_e(G)$ é de indiferença e $\omega(K_e(G)) \leq 3$.*

Prova:

Seja G um grafo de indiferença, tal que $K_e(G)$ não seja de indiferença. Pelo teorema 6.6, $K_e(G)$ é de intervalo. Logo, $K_e(G)$ contém $K_{1,3}$. Considere este $K_{1,3}$ formado pelos vértices a, b, c e d e pelas arestas ab, ac e ad em $K_e(G)$. As arestas a e b de G estão em uma mesma clique C_{ab} de G , analogamente, a e c estão em C_{ac} e a e d estão em C_{ad} . Seja $C = C_{ab} \cap C_{ac} \cap C_{ad}$. Obviamente, C contém ambos os extremos de a . Seja b_1 um extremo de b que só está em C_{ab} . Analogamente, sejam c_1 e d_1 . Obviamente, $b_1c_1, b_1d_1, c_1d_1 \notin E(G)$, pois, caso contrário, existiria uma clique de tamanho maior que 3 em G , formada pelos dois extremos de a e pelos extremos da aresta considerada. Seja a_1 um extremo de a . Logo, a_1, b_1, c_1 e d_1 formam um $K_{1,3}$ em G , uma contradição. ■

A classe dos grafos de indiferença não é fechada sob o operador clique de arestas. Na figura 7 temos um grafo de indiferença G com $\omega(G) = 4$. Este grafo tem exatamente três cliques, a saber: $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$ e $\{3, 4, 5, 6\}$. Observamos que as arestas 34, 13, 25 e 46 formam um $K_{1,3}$ em $K_e(G)$.



G

Figura 7: Grafo de indiferença com grafo clique de arestas não de indiferença.

6.6 Grafos linha

Dado um grafo $G = (V, E)$, o *grafo linha* de G , denotado $L(G)$, é o grafo com conjunto de vértices igual a E e tal que existe uma aresta entre dois vértices de $L(G)$ se e somente se as arestas correspondentes em G têm um extremo em comum. Um grafo G é *grafo linha* se existe um grafo H tal que $G = L(H)$.

São conhecidas duas provas de que a classe dos grafos linha é clique-de-arestas-fechada: a de Chartrand, Kapoor, McKee e Saba [2] e a de Raychaudhuri [8], ambas de 1991, e que serão reproduzidas nesta seção.

A prova de Chartrand, Kapoor, McKee e Saba faz uso do operador STP , que definimos a seguir, e exhibe o grafo H tal que $L(H) = K_e(G)$, quando G é um grafo linha.

Dado G , o *grafo estrela-triângulo-caminho* de G , denotado $STP(G)$, tem três tipos de vértices:

S -vértices, correspondentes às estrelas maximais $K_{1,n}$, $n \geq 2$, de G ;

T -vértices, correspondentes aos triângulos de G ;

P -vértices, correspondentes aos caminhos induzidos P_3 de G .

Dois vértices são adjacentes em $STP(G)$ se e somente se seus grafos correspondentes em G compartilham um P_3 , não necessariamente induzido.

Um grafo G é STP se existe um grafo H tal que $G = STP(H)$. Na figura 8 temos um grafo e seu grafo estrela-triângulo-caminho.

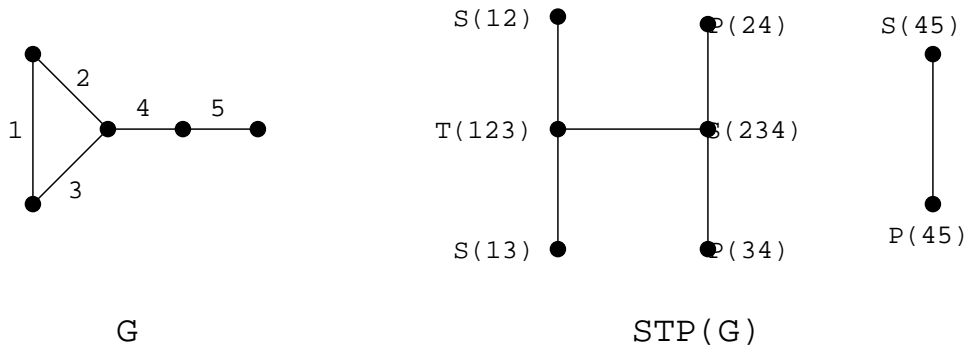
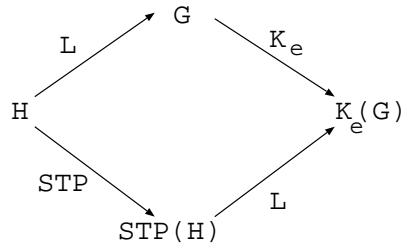


Figura 8: Grafo e seu grafo STP .

Os grafos STP são grafos bipartidos com bipartição $(S, T \cup P)$ e foram estudados em [2], onde condições necessárias e suficientes para um grafo bipartido ser STP foram apresentadas. Em [2] também foi mostrado que a menos de $K_{1,3}$ — que é imagem tanto do triângulo quanto do próprio $K_{1,3}$ — o operador STP é injetor.

A relação entre os operadores linha, clique de arestas e STP é estabelecida no teorema a seguir e ilustrada na figura abaixo.



Teorema 6.9 ([2]) *Se $G = L(H)$, então $K_e(L(H)) = L(STP(H))$, isto é, se G é grafo linha, então $K_e(G)$ é grafo linha.*

Prova:

Um vértice de $K_e(G)$ corresponde a uma aresta em G , que por sua vez corresponde a um P_3 em H . Este P_3 de H corresponde a uma aresta em $STP(H)$, que por sua vez corresponde a uma vértice em $L(STP(H))$. Assim, temos uma bijeção dos vértices de $K_e(G)$ nos vértices de $L(STP(H))$.

Dois vértices são adjacentes em $K_e(G)$ se e somente se seus P_3 's correspondentes em H estão em um triângulo ou estrela comum de H . Por outro lado, dois vértices são adjacentes em $L(STP(H))$ se e somente se seus P_3 's correspondentes em H estão em um triângulo ou estrela comum de H .

Assim, $K_e(G) = L(STP(H))$. ■

Dados os grafos G e H , tais que $G = L(H)$, o grafo G também pode ser considerado como o grafo de interseção das arestas de H . Cada vértice x de G tem associado um par não ordenado $S(x) = \{a, b\}$ de vértices de H . A família $\{S(x) : x \in V(G)\}$ é chamada de *modelo de linha* de G .

A prova de Raychaudhuri [8] faz uso do conceito de grafo de interseção e exhibe um modelo de linha para o grafo $K_e(G)$, também determinando o grafo H tal que $L(H) = K_e(G)$, quando G é um grafo linha.

Teorema 6.10 ([8]) *Se existe um modelo de linha de G , então existe um modelo de linha de $K_e(G)$, isto é, se G é grafo linha, então $K_e(G)$ é grafo linha.*

Prova:

Os seguintes fatos a respeito de qualquer grafo linha G são óbvios.

Fato 1 Nenhuma aresta de G pode estar em mais de uma clique de tamanho maior que três.

Fato 2 Nenhuma aresta de G pode estar em mais de duas cliques de tamanho maior que dois.

Assim, dada uma aresta e de G , exatamente um dos seguintes casos deve ocorrer:

caso 1: e é uma clique;

caso 2: e está em exatamente uma clique de tamanho 3;

caso 3: e está em exatamente uma clique de tamanho maior que 3;

caso 4: e está em exatamente duas cliques, uma de tamanho 3 e a outra de tamanho pelo menos 3.

Seja $\mathcal{F} = \{S(x) : x \in V(G)\}$ um modelo de linha de G . Para cada aresta $e = xy$ de G , com $S(x) = \{a, b\}$ e $S(y) = \{a, c\}$, definimos $S'(e)$, um conjunto com dois elementos, de acordo com o caso correspondente. Ao final, teremos $\mathcal{F}' = \{S'(e) : e \in E(G)\}$, um modelo de linha de $K_e(G)$.

caso 1: $S'(e) = \{a, e\}$.

caso 2: Temos dois subcasos, onde z é o terceiro vértice da clique.

(a) Se $S(z) = \{a, d\}$, então $S'(e) = \{a, e\}$.

(b) Se $S(z) = \{b, c\}$, então $S'(e) = \{e, \delta\}$, onde δ é o triângulo de G cujos vértices são x, y e z .

caso 3: $S'(e) = \{a, e\}$. Como G é grafo linha, uma clique C de tamanho pelo menos 4 em G , corresponde a uma estrela em $L^{-1}(G)$. Logo, o vértice a escolhido é tal que $\bigcap_{x \in C} S(x) = a$.

caso 4: $S'(e) = \{a, \delta\}$, onde δ é o triângulo de G cujos vértices são x, y e o representado por $\{b, c\}$.

Resta mostrar que $\{S'(e) : e \in E(G)\}$ é modelo de linha de $K_e(G)$, isto é, que existe aresta ef em $K_e(G)$ se e somente se $S'(e) \cap S'(f) \neq \emptyset$.

(\Rightarrow) Se existe aresta ef em $K_e(G)$ é porque as arestas e e f estão em uma mesma clique de G e temos dois casos:

- Se e e f não têm um extremo comum, então os elementos de \mathcal{F} que representam os extremos de e e f têm um mesmo vértice a . Tanto para e quanto para f só podemos ter os casos 3 ou 4 e, em quaisquer dos casos, $a \in S'(e) \cap S'(f)$.

- Se e e f têm um extremo comum, sendo $\{a, b\}$ e $\{a, c\}$ a representação dos extremos de e , então temos dois casos para a representação do outro extremo de f .

Caso seja $\{a, d\}$, então os elementos de \mathcal{F} que representam os extremos de e e f têm o mesmo vértice a . Tanto para e quanto para f só podemos ter os

casos 2(a), 3 ou 4 e, em quaisquer dos casos, $a \in S'(e) \cap S'(f)$.

Caso seja $\{b, c\}$, então e e f só podem ser um dos casos 2(b) ou 4 e, em quaisquer dos casos, $\delta \in S'(e) \cap S'(f)$.

(\Leftarrow) Se $S'(e) \cap S'(f) \neq \emptyset$, então dois casos são possíveis:

- $\delta \in S'(e) \cap S'(f)$. Em quaisquer dos casos, tanto e quanto f são arestas de δ e assim estão em uma mesma clique de G .

- $a \in S'(e) \cap S'(f)$. Em quaisquer dos casos, a é o vértice comum na representação dos extremos de e e f . Assim, as arestas e e f estão em uma mesma clique de G . ■

Na figura 9 temos um exemplo da construção efetuada na prova do teorema 6.10. Considere o grafo G onde $\delta_1 = \{4, 5, 6\}$ e $\delta_2 = \{5, 6, 7\}$ são as únicas cliques de tamanho 3 de G .

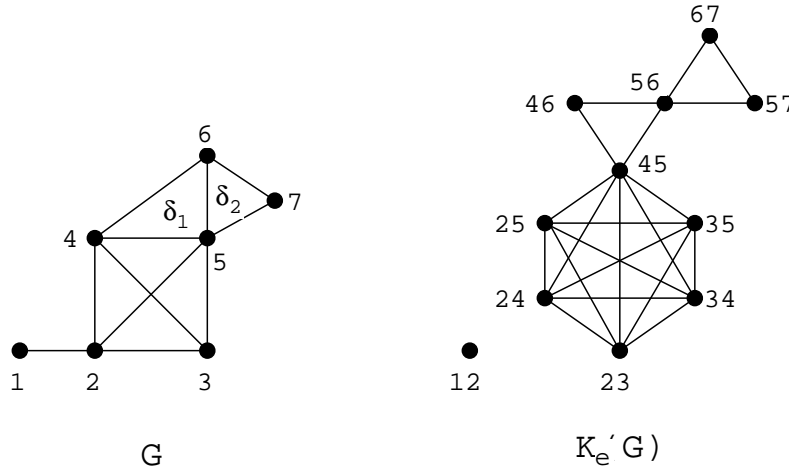


Figura 9: Grafo linha e seu grafo clique de arestas que também é linha.

Observe que $S(1) = \{a, b\}$, $S(2) = \{b, c\}$, $S(3) = \{c, d\}$, $S(4) = \{c, e\}$, $S(5) = \{c, f\}$, $S(6) = \{e, f\}$ e $S(7) = \{f, g\}$ é um modelo de linha de G .

A única aresta caso 1 é 12, assim $S'(12) = \{b, 12\}$.

As arestas 23, 24, 25, 34 e 35 estão em uma única clique de tamanho 4. Assim são caso 3 e como todos os seus extremos têm c na sua representação, temos $S'(23) = \{c, 23\}$, $S'(24) = \{c, 24\}$, $S'(25) = \{c, 25\}$, $S'(34) = \{c, 34\}$ e $S'(35) = \{c, 35\}$.

A aresta 45 é caso 4, e como o único triângulo com vértices 4 e 5 é δ_1 , temos $S'(45) = \{c, \delta_1\}$.

A aresta 56 também é caso 4. O vértice que não contém f — o elemento comum na representação de 5 e 6 — é o 4. Logo $S'(56) = \{f, \delta_1\}$.

As arestas restantes são caso 2. A aresta 46 é caso 2(b), sendo $S'(46) = \{46, \delta_1\}$. Já 57 e 67 são caso 2(a) pois f está na representação de 5, 6 e 7. Assim, $S'(57) = \{f, 57\}$ e $S'(67) = \{f, 67\}$.

Construindo o grafo de interseção de $\{S'(e) : e \in E(G)\}$ temos $K_e(G)$, também representado na figura 9.

6.7 Grafos de interseção Helly

Uma família $\mathcal{F} = \{T_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos não vazios de T satisfaz a *propriedade Helly* se para todo $J \subseteq I$, sempre que para todos $i, j \in J$, $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, temos $\bigcap_{i \in J} T_i \neq \emptyset$. Isto é, \mathcal{F} satisfaz a propriedade Helly quando para cada subfamília \mathcal{F}' de \mathcal{F} , se \mathcal{F}' é formada por conjuntos que se interceptam dois a dois, então os elementos de \mathcal{F}' têm um elemento em comum.

Suponha que G é um grafo de interseção com modelo de interseção $\mathcal{S} = \{S(v_1), \dots, S(v_n)\}$, tal que $\mathcal{S} \subseteq D$, onde D é uma família onde todos os elementos possuem uma estrutura especificada. Por exemplo, D pode ser a família de todos os intervalos da reta real, ou ainda, todas as cliques de um grafo. Denotamos $S(xy) = S(x) \cap S(y)$ quando $S(x) \cap S(y) \neq \emptyset$, isto é, quando xy for uma aresta de G . Considere $\mathcal{S}' = \{S(xy) : xy \in E(G)\}$.

Teorema 6.11 ([8]) *Seja G um grafo de interseção. Se existe um modelo de interseção $\mathcal{S} = \{S(v) : v \in V\}$ de G com $\mathcal{S} \subseteq D$, satisfazendo*

- (i) $S(xy) \in D$, para toda $xy \in E(G)$;
- (ii) \mathcal{S} satisfaz a propriedade Helly;

então \mathcal{S}' é um modelo de interseção de $K_e(G)$. Isto é, $K_e(G)$ é um grafo de interseção de conjuntos pertencentes a D .

Prova:

É fácil ver que o número de elementos em \mathcal{S}' é igual ao número de arestas de G e, portanto, igual ao número de vértices de $K_e(G)$.

Sejam $e = uv$ e $f = wz \in E(G)$. Vamos mostrar que $ef \in E(K_e(G)) \Leftrightarrow S(e) \cup S(f) \neq \emptyset$.

(\Rightarrow) Se $ef \in E(K_e(G))$, então existe C , uma clique em G , tal que $u, v, w, z \in C$. Por definição, $S(e) = S(u) \cap S(v) \neq \emptyset$ e $S(f) = S(w) \cap S(z) \neq \emptyset$. Como $u, v, w, z \in C$, temos que $S(u) \cap S(v)$, $S(u) \cap S(w)$, $S(u) \cap S(z)$, $S(v) \cap S(w)$, $S(v) \cap S(z)$ e $S(w) \cap S(z)$ são não-vazios. Assim, por (ii), $S(u) \cap S(v) \cap S(w) \cap S(z) \neq \emptyset$ e conseqüentemente $S(e) \cap S(f) \neq \emptyset$.

(\Leftarrow) Se $S(e) \cap S(f) \neq \emptyset$, então $(S(u) \cap S(v)) \cap (S(w) \cap S(z)) \neq \emptyset$. Logo os

conjuntos $S(u)$, $S(v)$, $S(w)$ e $S(z)$ são, dois a dois não disjuntos. Assim, existe uma clique C em G tal que u, v, w e $z \in C$ e $ef \in E(K_e(G))$.

Portanto, \mathcal{S}' é modelo de interseção de $K_e(G)$. E, por (i), $S(xy) \in D$, para todo $S(xy) \in \mathcal{S}'$, acarretando que $K_e(G)$ é um grafo de interseção de conjuntos pertencentes a família D . ■

Usando o teorema 6.11 podemos provar que várias classes de grafos de interseção são clique-de-arestas-fechadas, somente provando que elas satisfazem às condições (i) e (ii). Tal abordagem foi utilizada por Raychaudhuri em [8] para obter os seguintes resultados:

Corolário 6.1 ([8]) *Se G é cordal, então $K_e(G)$ é cordal.*

Prova:

Seja G um grafo cordal. Pelo teorema de Gavril, existe uma árvore T e uma família $\mathcal{T} = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ de subárvores de T , tal que G é o grafo de interseção de \mathcal{T} . Neste caso, D é a família de todas as subárvores de T .

(i) Se $xy \in E(G)$, então é fácil ver que $T(x) \cap T(y) \neq \emptyset$ é um subgrafo acíclico e conexo de T , ou seja, é um elemento de D .

(ii) Gavril também mostrou que qualquer família de subárvores de uma árvore satisfaz a propriedade Helly. ■

Como Gavril também mostrou que qualquer família de caminhos em uma árvore satisfaz a propriedade Helly e, interseção de caminhos em árvore também é um caminho, temos que as classes de grafos de caminho também são clique-de-arestas-fechadas.

Corolário 6.2 *Se G é UV (DV ou RDV), então $K_e(G)$ é UV (DV ou RDV).*

Uma *caixa* no espaço euclideo de dimensão n é um retângulo generalizado com todos os seus lados paralelos aos eixos coordenados. Por exemplo, um retângulo no espaço de dimensão 2, um intervalo no espaço de dimensão 1 e um ponto no espaço de dimensão 0. Roberts provou que todo grafo G é um grafo de interseção de caixas em alguma dimensão. A menor dimensão satisfazendo esta propriedade é chamada de *boxicity de G* e é denotada por $box(G)$. Assim, considerando os grafos completos como sendo grafos de interseção de pontos (todos iguais) no espaço de dimensão 0, temos $box(K_n) = 0$, para todo n , e os grafos completos são os únicos grafos com boxicity igual a 0. Além disso, um

grafo G é de intervalo se e somente se $\text{box}(G) \leq 1$. Roberts dá exemplos de grafos com boxicity k , para todo k .

Corolário 6.3 ([8]) *Se $\text{box}(G) \leq n$, então $\text{box}(K_e(G)) \leq n$.*

Prova:

Se $\text{box}(G) = 0$, então G é um grafo completo e como neste caso $K_e(G)$ também é um grafo completo, temos $\text{box}(K_e(G)) = 0$.

Se $\text{box}(G) = n > 0$, seja $\mathcal{S} = \{S(v) : v \in V(G)\}$ um modelo de interseção de G onde cada $S(v)$ é uma caixa no espaço de dimensão n . Podemos denotar $S(v) = (J_1(v), J_2(v), \dots, J_n(v))$ as projeções da caixa em cada um dos eixos coordenados. Assim, $S(u) \cap S(v) \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall i, 1 \leq i \leq n, J_i(u) \cap J_i(v) \neq \emptyset$.

(i) $S(uv)$ é uma caixa no espaço de dimensão n , pois se $uv \in E(G)$, então $S(u) \cap S(v) \neq \emptyset$ e basta considerar $J_i(uv) = J_i(u) \cap J_i(v), \forall i, 1 \leq i \leq n$.

(ii) \mathcal{S} satisfaz a propriedade Helly pois considerando $u_1, u_2, \dots, u_k \in V(G)$ tais que $S(u_i) \cap S(u_j) \neq \emptyset, \forall i, j$, então $\forall p, 1 \leq p \leq n, J_p(u_i) \cap J_p(u_j) \neq \emptyset$, e, como a propriedade Helly é válida para intervalos, então $J_p(u_1) \cap J_p(u_2) \cap \dots \cap J_p(u_k) \neq \emptyset, \forall p$ e $S(u_1) \cap S(u_2) \cap \dots \cap S(u_k) \neq \emptyset$. ■

7 Reconhecimento

Nesta seção apresentamos a única caracterização existente na literatura para grafos clique de arestas. Esta caracterização é feita através de um algoritmo (exponencial) de reconhecimento e foi apresentada por Chartrand, Kapoor, McKee e Saba em [2].

Dado um grafo G , o *pseudografo clique de G* , denotado por $P_K(G)$, é o pseudografo cujos vértices são as cliques de G e dois vértices em $P_K(G)$ são adjacentes por uma aresta de multiplicidade k se e somente se as cliques correspondentes têm exatamente k vértices em comum. Em particular, se uma clique de G tem k vértices, então existirão k laços paralelos no vértice correspondente em $P_K(G)$.

Na figura 10 temos um grafo G e seu pseudografo clique $P_K(G)$.

ALGORITMO: Reconhecimento de grafos clique de arestas.

Entrada: Um grafo G .

Saída: Um grafo H , tal que $K_e(H) = G$ ou “ G não é grafo clique de arestas”.

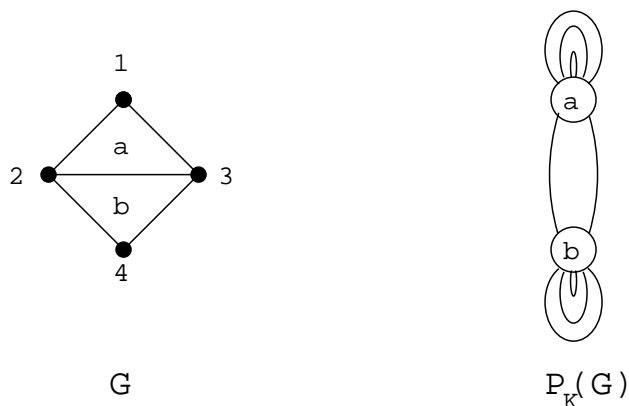


Figura 10: Grafo e seu pseudografo clique.

1. Verifique se G satisfaz a propriedade dos números triangulares. Se não, pare com saída “ G não é grafo clique de arestas”.
2. Construa $P_K(G)$, o pseudografo clique de G . Note que a multiplicidade de cada aresta de $P_K(G)$ é um número triangular.
3. Forme um novo pseudografo Q a partir de $P_K(G)$, fazendo o seguinte:
Troque cada aresta de multiplicidade $\binom{k}{2}$ por uma de multiplicidade k .
Ligue os vértices não adjacentes em $P_K(G)$ por arestas pontilhadas. Tais arestas pontilhadas podem ser interpretadas tanto como arestas simples quanto como não-arestas.
4. Forme um novo pseudografo Q^+ a partir de Q , interpretando as arestas pontilhadas de Q de forma que o conjunto de arestas de Q^+ possa ser particionado em uma família \mathcal{F} de subgrafos completos com laços, que satisfaz a propriedade Helly. Se isto não puder ser feito, pare com saída “ G não é grafo clique de arestas”.
5. Seja H o grafo de interseção de \mathcal{F} . Neste caso, H é tal que $K_e(H) = G$.

A prova de corretude deste algoritmo encontra-se parcialmente em [2] e parcialmente em [4].

Observe que a aplicação deste algoritmo tendo o grafo da figura 10 como entrada, pára, no passo 1, com saída “ G não é grafo clique de arestas”. Isto acontece porque as cliques a e b têm dois vértices em comum e dois não é um número triangular.

Na figura 11, temos um exemplo de aplicação do algoritmo em um grafo que é clique de arestas. Neste caso, os pseudografos Q e Q^+ são iguais, dado que não é possível particionar as arestas de Q em uma família de subgrafos completos sem utilizar a aresta pontilhada. Como a figura mostra, as arestas de Q podem ser particionadas em cinco grafos completos com laços, que satisfazem a propriedade Helly. Assim, o grafo de interseção H é tal que $K_e(H) = G$

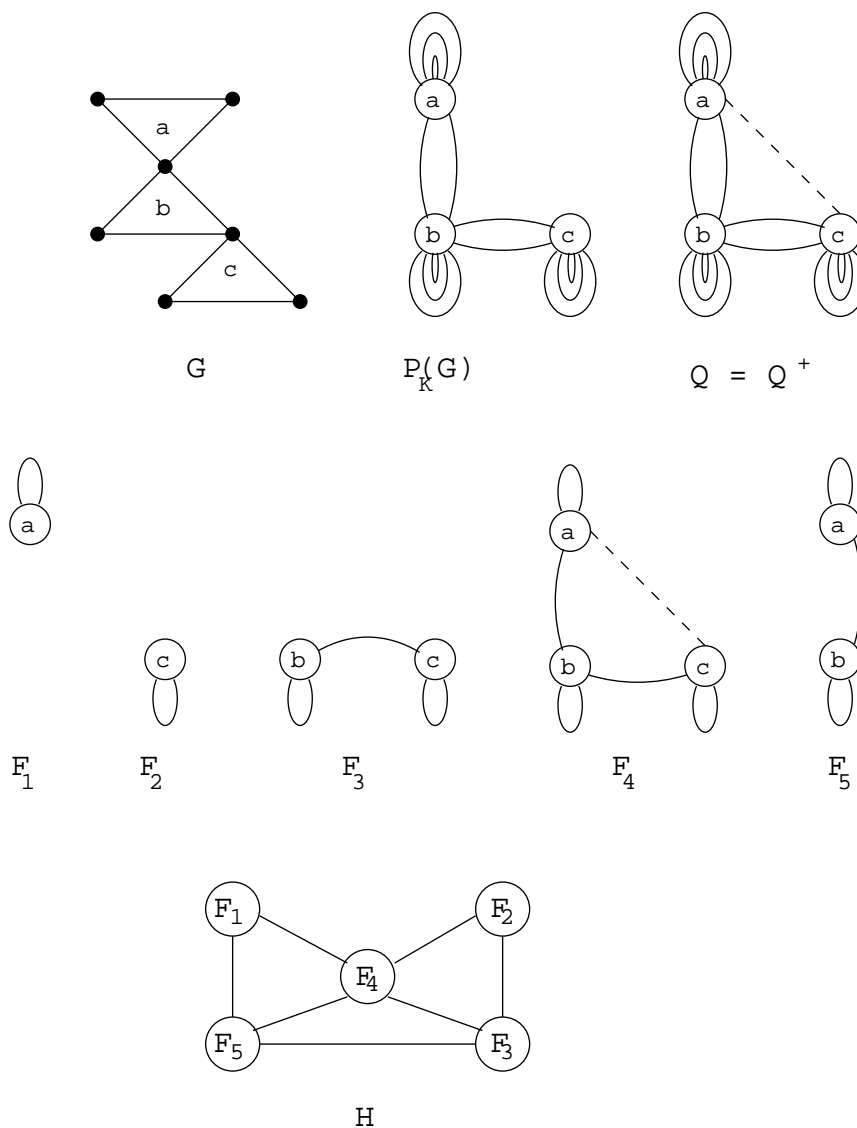


Figura 11: Aplicação do algoritmo de reconhecimento.

8 Outros operadores

Nesta seção, vamos relacionar o operador clique de arestas com outros operadores.

8.1 Operador linha

Como observado em [2], o operador clique de arestas pode ser visto como uma alternativa de generalização para o operador linha, no sentido que no operador linha apenas arestas que têm um extremo em comum são adjacentes em $L(G)$, enquanto que em $K_e(G)$ elas são adjacentes se induzem um K_3 ou um K_4 em G .

Assim, é claro que se G não tem K_4 , então toda aresta de $K_e(G)$ também é aresta de $L(G)$, mas nem toda aresta de $L(G)$ é aresta de $K_e(G)$. Isto é, neste caso, $K_e(G)$ é subgrafo de $L(G)$. Reciprocamente, se toda aresta de $K_e(G)$ também é aresta de $L(G)$, então G não tem K_4 .

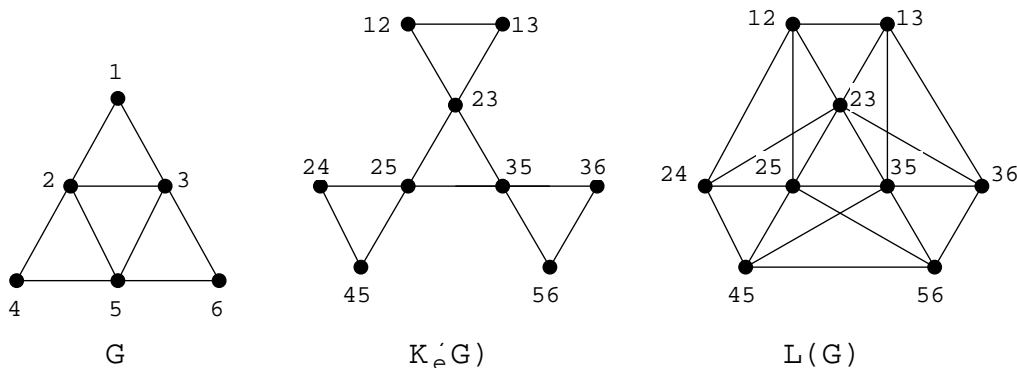


Figura 12: Grafo, seu grafo clique de arestas e seu grafo linha.

Por outro lado, $L(G)$ é subgrafo de $K_e(G)$ se e somente se cada componente conexo de G é um subgrafo completo. Assim, temos o seguinte resultado:

Proposição 8.1 ([2]) $K_e(G) = L(G)$ se e somente se todo componente conexo de G é um subgrafo completo com no máximo três vértices.

8.2 Operador 2-clique

Dado um grafo $G = (V, E)$, o grafo p -clique de G , (sendo p um número natural não nulo), denotado $K_p(G)$, é o grafo com conjunto de vértices igual a \mathcal{C} , onde \mathcal{C} é o conjunto de todas as cliques de G , e tal que existe uma aresta

entre dois vértices de $K_p(G)$ se e somente se as cliques correspondentes em G têm pelo menos p vértices em comum.

Desta forma os grafos 1-clique formam a bem conhecida classe dos grafos clique, isto é, $K_1 = K$. E, em particular, $K_2(G)$ é o grafo 2-clique de G . Um grafo G é 2-clique se existe um grafo H tal que $G = K_2(H)$.

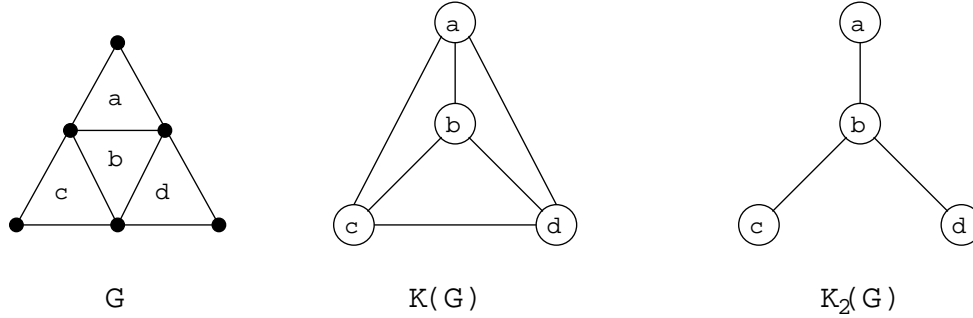


Figura 13: Grafo, seu grafo clique e seu grafo 2-clique.

Na figura 13 temos um grafo G , seu grafo clique e seu grafo 2-clique. A relação entre os grafos 2-clique e os grafos clique de arestas é estabelecida nos seguintes resultados.

Teorema 8.1 ([4]) *Todo grafo 2-clique é grafo clique.*

Prova:

Seja G um grafo 2-clique. Logo existe um grafo H tal que $G = K_2(H)$.

Se H não tem vértices isolados, vamos mostrar que $G = K(K_e(H))$. Para isto basta observar que os vértices de $G = K_2(H)$ são as cliques de H e, os vértices de $K(K_e(H))$ são as cliques de $K_e(H)$ que por sua vez estão em correspondência (veja a proposição 2.1) com as cliques de H . Logo, há uma bijeção dos vértices de $K_2(H)$ nos vértices de $K(K_e(H))$.

Sejam u e v dois vértices adjacentes em $K_2(H)$. Então, C_u e C_v , as cliques correspondentes a eles em H são tais que $|C_u \cap C_v| \geq 2$. Logo C'_u e C'_v , as cliques correspondentes a C_u e C_v em $K_e(H)$, têm pelo menos um vértice em comum e $C'_u \cap C'_v \neq \emptyset$. Logo, os vértices correspondentes a u e v em $K(K_e(H))$ são adjacentes.

Reciprocamente, se C'_u e C'_v são cliques em $K_e(H)$ com interseção não vazia, as cliques correspondentes C_u e C_v em H têm pelo menos dois vértices em comum e C_u e C_v corresponderão a vértices adjacentes em $K_2(H)$.

Se H tem vértices isolados, v_1, \dots, v_m , considere H' o grafo obtido de H retirando-se estes vértices. Construa $K_e(H')$. Acrescente a $K_e(H')$ os vértices

v_1, \dots, v_m obtendo o grafo G' . Segue do caso anterior e do fato que os operadores K e K_2 preservam vértices isolados que $G = K(G')$ e portanto é grafo clique. ■

Na figura 14, temos o mesmo grafo da figura 13, seu grafo clique de arestas e o grafo clique de seu grafo clique de arestas.

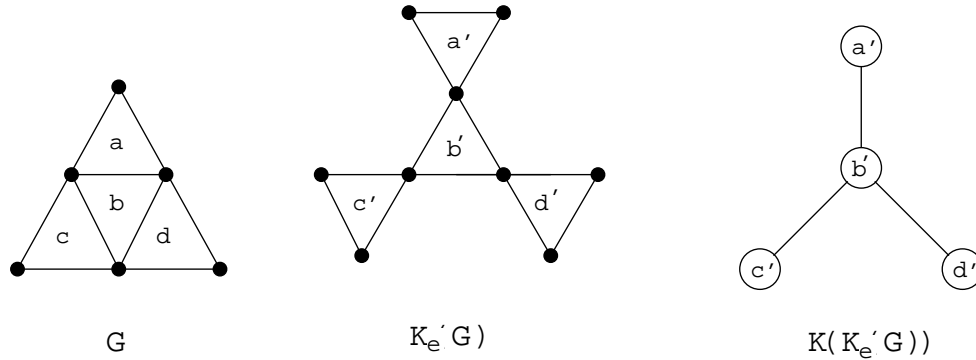


Figura 14: Grafo, seu grafo clique de arestas e o grafo clique do clique de arestas.

Na verdade, vale também a recíproca do teorema 8.1 e, portanto, a classe dos grafos 2-clique é exatamente a classe dos grafos clique.

Teorema 8.2 ([5]) *Todo grafo clique é grafo 2-clique.*

Prova:

Seja G um grafo clique. Logo existe um grafo H tal que $G = K(H)$. Considere H' a combinação de H com o grafo trivial cujo único vértice é x .

Obviamente, C é uma clique em H se e somente se $C' = C \cup \{x\}$ é uma clique em H' . Logo, existe uma correspondência entre as cliques de H e as cliques de H' .

Sejam u e v dois vértices adjacentes em $K(H)$. Então, C_u e C_v , as cliques correspondentes a eles em H são tais que $|C_u \cap C_v| \geq 1$. Logo C'_u e C'_v , as cliques correspondentes a C_u e C_v em H' são tais que $|C'_u \cap C'_v| \geq 2$. Logo, os vértices u e v em $K_2(H')$ são adjacentes.

Reciprocamente, se C'_u e C'_v são cliques em H' tais que $|C'_u \cap C'_v| \geq 2$, as cliques C_u e C_v correspondentes a C'_u e C'_v em H têm interseção não vazia e, os vértices u e v em $K(H)$ são adjacentes. ■

8.3 Operador $\Phi_{k,m}$

Dados $2 \leq k < m$, o grafo k em m de G , $\Phi_{k,m}$, tem como vértices todos os subgrafos completos de tamanho k de G e dois tais subgrafos são adjacentes se eles estão em algum subgrafo completo comum com no máximo m vértices.

Para $k = 2$ e $m = 4$, temos que $\Phi_{2,4}$ é o operador clique de arestas.

Em [5] há um estudo sobre os operadores $\Phi_{k,m}$ onde alguns resultados válidos para o operador $\Phi_{2,4}$ são generalizados. Em [1], conjecturou-se que o comportamento do operador $\Phi_{k,m}$ é o mesmo que o do operador $\Phi_{2,4}$.

9 Perguntas

Para finalizar, apresentamos uma lista de problemas em aberto coletados na literatura, sobre o operador clique de arestas.

- [1, 5] Se G não é bom, então $\chi(K_e(G)) - \omega(K_e(G)) < \chi(G) - \omega(G)$?
- [1] Se G é 4-cromático, perfeito e planar, então $K_e(G)$ é cobom?
- [7] É possível determinar o número de interseção de um grafo fortemente cordal levando-se em conta que $K_e(G)$ é fortemente cordal?
- [8] Se G é grafo de comparabilidade, a que classe de grafos pertence $K_e(G)$?
- Todo grafo clique de arestas é um grafo clique?

Esta pergunta aparece respondida erroneamente em [2].

- Encontrar um exemplo de grafo em que a cota de Albertson e Collins para o expoente χ seja o próprio expoente χ do grafo.
- [1, 5] Encontrar uma boa caracterização para os grafos clique de arestas.

Referências bibliográficas

- [1] M.O. ALBERTSON E K.L. COLLINS. Duality and perfection for edges in cliques. *Journal of Combinatorial Theory (Series B)*, 36:298–309, 1984.
- [2] G. CHARTRAND, S.F. KAPOOR, T.A. MCKEE, E F. SABA. Edge-clique graphs. *Graphs and Combinatorics*, 7:253–264, 1991.
- [3] L.T. KOU, L.J. STOCKMEYER, E C.K. WONG. Covering edges by cliques with regard to keyword conflicts and intersection graphs. *Communications of ACM*, 21:135–139, 1978.
- [4] T.A. MCKEE. Clique multigraphs. Em Y. Alavi, F.R.K. Chung, R.L. Graham, e D.F. Hsu, editores, *Second International Conference in Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications*, páginas 371–379. SIAM, 1991.
- [5] E. PRISNER. *Graph Dynamics*, volume 338 de *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman, Essex, 1995.
- [6] E. PRISNER. Line graphs and generalizations – a survey. *Congressus Numerantium*, 116:193–229, 1996.
- [7] A. RAYCHAUDHURI. Intersection number and edge clique graphs of chordal and strongly chordal graphs. *Congressus Numerantium*, 67:197–204, 1988.
- [8] A. RAYCHAUDHURI. Edge clique graphs of some important classes of graphs. *Ars Combinatoria*, 32:269–278, 1991.