



## COBERTURA DE CORPOS POR ESFERAS UTILIZANDO SUAVIZAÇÃO HIPERBÓLICA

Daniela Cristina Lubke

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Adilson Elias Xavier

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2014

COBERTURA DE CORPOS POR ESFERAS UTILIZANDO SUAUIZACÃO  
HIPERBÓLICA

Daniela Cristina Lubke

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO  
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE  
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE  
SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

---

Prof. Adilson Elias Xavier, D.Sc.

---

Prof. Helder Manoel Venceslau, D.Sc.

---

Prof. Antonio Alberto Fernandes de Oliveira, D.Sc.

---

Prof. Roberto Quirino do Nascimento, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
FEVEREIRO DE 2014

Lubke, Daniela Cristina

Cobertura de corpos por esferas utilizando Suavização Hiperbólica/Daniela Cristina Lubke. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2014.

XII, 51 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Adilson Elias Xavier

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2014.

Referências Bibliográficas: p. 49 – 51.

1. Problemas de localização. 2. Problemas min-max-min. 3. Programação não-diferenciável. I. Xavier, Adilson Elias. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*Para: Cristina Lubke,  
Edna Gomes Lubke e  
Thiago Ferreira de Mello.*

# Agradecimentos

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

Aos meus orientadores: Prof. Adilson Xavier e Prof. Helder Venceslau.

Aos professores Antonio de Oliveira e Roberto Quirino por aceitarem prontamente avaliar este trabalho.

Aos amigos por sempre me ajudarem e aconselharem: Evandro, Ricardo, Vander, Israel, Renato, Wanderson e Moisés.

Aos companheiros do Laboratório de Otimização (LabOtim): Priscilla, Renan, Jesus, Marcos Almeida, Luiz Antonio, Marilis, Jhonatas e Thiago.

Aos professores e funcionários do PESC que estiveram sempre dispostos a ajudar: Fátima secretária de OT, Carol secretária do LAND, Prof. Sérgio Villas Boas, Prof. Maculan, Prof. Fampa, Gutierrez, Josefina Solange, Sônia, Roberto Rodrigues e Itamar.

Aos professores da UFRRJ por todo o apoio: Benaia, José Airton e Ronaldo Gregório.

Aos familiares por todo o apoio e carinho: Fernando, Rosane, Angela Becker, Família Maiani, Walter, Eliana e Camila.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## COBERTURA DE CORPOS POR ESFERAS UTILIZANDO SUAVIZAÇÃO HIPERBÓLICA

Daniela Cristina Lubke

Fevereiro/2014

Orientador: Adilson Elias Xavier

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Consideramos o problema de recobrimento de um corpo por um determinado número de esferas. A modelagem matemática deste problema apresenta uma formulação *min – max – min* com natureza multi-nível intrínseca, além de ser não diferenciável. Para superar as dificuldades do problema, desenvolvemos uma estratégia de suavização utilizando uma classe especial  $C^\infty$  de função suavizada. A solução final é obtida através da resolução de uma sequência de subproblemas que gradualmente se aproximam do problema original. A técnica utilizada, chamada Suavização Hiperbólica, permite que as principais dificuldades apresentadas no problema original sejam superadas e gradualmente o problema se aproxime do original.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## OPTIMAL COVERING OF SOLID BODIES BY SPHERES VIA HYPERBOLIC SMOOTHING TECHNIQUE

Daniela Cristina Lubke

February/2014

Advisor: Adilson Elias Xavier

Department: Systems Engineering and Computer Science

We consider the problem of optimally covering solid bodies by a given number of spheres. The mathematical modeling of this problem leads to a *min – max – min* formulation which, in addition to its intrinsic multi-level nature, has the significant characteristic of being non-differentiable. In order to overcome these difficulties, we have developed a smoothing strategy using a special class  $C^\infty$  smoothing function. The final solution is obtained by solving a sequence of differentiable subproblems which gradually approach the original problem. The use of this technique, called Hyperbolic Smoothing, allows the main difficulties presented by the original problem to be overcome. A simplified algorithm containing only the essential of the method is presented. For the purpose of illustrating both the actual working and the potentialities of the method, a set of computational results is presented.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Sequência da Apresentação . . . . .	3
<b>2 Revisão Bibliográfica</b>	<b>4</b>
2.1 Problemas de Recobrimento . . . . .	5
2.1.1 Recobrimento de Regiões Planas $\mathbb{R}^2$ . . . . .	5
2.1.2 Recobrimento de Corpos $\mathbb{R}^3$ . . . . .	7
2.2 Problemas de Empacotamento . . . . .	8
2.2.1 Problema Tammes . . . . .	9
2.3 O problema do Kissing Number - KNP . . . . .	10
2.4 <i>Gamma Knife</i> . . . . .	11
<b>3 Apresentação Metodológica</b>	<b>13</b>
3.1 Descrição do Problema . . . . .	13
3.2 Transformando o Problema . . . . .	14
3.2.1 Suavizando o problema . . . . .	17
3.2.2 Penalização Hiperbólica . . . . .	19
3.2.3 Conectando a Suavização Hiperbólica com a Penalização Hiperbólica . . . . .	22
<b>4 Resultados Computacionais</b>	<b>24</b>
4.1 Testes no Toro . . . . .	25
4.1.1 Desenvolvimento da Solução Analítica do Toro . . . . .	26
4.1.2 Recobrimento do Toro . . . . .	36
4.2 Aplicação em corpos genéricos . . . . .	41
4.2.1 Mecanismo de discretização - Gerando os voxels do Feijão. . . . .	41
4.2.2 Recobrimento do Oito . . . . .	44
4.2.3 Recobrimento do Feijão . . . . .	45



<b>5 Conclusões</b>	<b>47</b>
5.1 Trabalhos Futuros . . . . .	48
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>49</b>

# Lista de Figuras

2.1	Empacotamento regular hexagonal ou colmeia no $\mathbb{R}^2$ . . . . .	5
2.2	Cobertura com 5 circunferências dos mapas do Brasil e da Holanda. . . . .	6
2.3	Cobertura regional de Dublin por 25 sirenes. . . . .	6
2.4	Solução para o problema de recobrimento de um paralelepípedo 14mm $\times$ 12mm $\times$ 10mm por esferas de diferentes tamanhos. . . . .	7
2.5	Cobertura de um elipsoide por esferas apresentado em [3]. . . . .	7
2.6	Empacotamentos de círculos em polígonos regulares. . . . .	8
2.7	Empacotamento de 77 círculos. . . . .	8
2.8	Ilustrações do problema de Tammes. . . . .	9
2.9	Empacotamento de círculos na superfície da esfera no $\mathbb{R}^3$ . . . . .	10
2.10	Solução do KNP em uma e duas dimensões, respectivamente. . . . .	11
2.11	Solução do KNP no $\mathbb{R}^3$ . . . . .	11
2.12	Representação esquemática da ação dos raios gama em um tumor. . . . .	12
3.1	Parcelas do somatório em (3.12) . . . . .	16
3.2	Parcelas originais e suavizadas do somatório em (3.12) . . . . .	18
3.3	Função Penalização Hiperbólica. . . . .	20
3.4	Decréscimo do parâmetro $\tau$ até zero. . . . .	22
3.5	Decréscimo do parâmetro $\epsilon$ até zero. . . . .	23
4.1	Toro visto de 3 diferentes ângulos de observação. . . . .	25
4.2	Toro projetado no plano $x \times y$ . . . . .	26
4.3	Seção do toro projetado no plano $x \times z$ . . . . .	26
4.4	Semi reta $x_\theta$ . . . . .	27
4.5	Distância $\rho$ entre a origem e o centro da esfera. . . . .	27
4.6	Parábolas para $q = 4$ esferas. . . . .	31
4.7	Parábolas para $q = 6$ esferas. . . . .	31
4.8	Parábolas para $q = 12$ esferas. . . . .	31
4.9	Representação gráfica das regiões (a) e (b) no plano $\gamma \times q$ . . . . .	32
4.10	Toro dividido em 4 setores. . . . .	33
4.11	Os pontos em verdes representam os pontos mais críticos. . . . .	33

4.12	Ligando os pontos críticos . . . . .	34
4.13	Os pontos em vermelho representam os centros das Esferas. . . . .	34
4.14	Solução geométrica para o Recobrimento do Toro com 4 Esferas. . . . .	35
4.15	Toro coberto com 9 esferas. . . . .	36
4.16	Toro coberto com 36 esferas. . . . .	36
4.17	Região hachurada não contemplada pela cobertura. . . . .	38
4.18	Toro coberto com 10 esferas. . . . .	40
4.19	Toro coberto com 20 esferas. . . . .	40
4.20	Toro coberto com 40 esferas. . . . .	40
4.21	Feijão 71 pontos. . . . .	42
4.22	Polígono composto de 71 pontos. . . . .	42
4.23	Geração da linha central do polígono. . . . .	42
4.24	Centro do polígono. . . . .	43
4.25	Seção circular utilizada para formar os voxels. . . . .	43
4.26	Oito (849095 voxels) 4 esferas. . . . .	44
4.27	Feijão (361904 voxels) coberto com 4 esferas. . . . .	45
4.28	Feijão (1202211 voxels) coberto 4 esferas. . . . .	46
4.29	Feijão (1202211 voxels) coberto 5 esferas. . . . .	46

# Lista de Tabelas

4.1	Toro discretizado por 244080 voxels . . . . .	37
4.2	Oito discretizado por 33351 voxels. . . . .	44
4.3	Feijão discretizado por 361904 voxels. . . . .	45
4.4	Feijão discretizado por 1202211 voxels. . . . .	46

# Capítulo 1

## Introdução

Esta dissertação considera a resolução do problema de cobertura de corpos por esferas. Este problema é considerado uma extensão do problema de cobertura de regiões planares, por círculos. Considera-se, neste trabalho, o problema de recobrimento ótimo de um corpo sólido genérico por um pré-determinado número de esferas com mesmo raio.

Analogamente, poderíamos definir o problema de cobertura de sub-espacos compactos de espacos euclidianos de  $n$  dimensões ( $\mathbb{R}^n$ ) por hiper-esferas.

No problema de recobrimento planar, dado um determinado polígono (regular ou irregular), deve-se recobri-lo tipicamente com figuras geométricas tais como: círculos, quadrados, triângulos, hexágonos, por exemplo. Por definição, tem-se um recobrimento quando todos os pontos pertencente à região a ser coberta estão contidos em pelo menos uma dessas figuras.

A formulação matemática de problemas de recobrimento, conhecidos na literatura internacional como *Covering Problems*, engendra problemas de 3 níveis do tipo *min – max – min*. Esses têm como característica serem problemas não-lineares, não-convexos, não-diferenciáveis e com uma miríade de mínimos locais. Sua resolução portanto se constitui em uma tarefa de grande dificuldade.

Esta dissertação apresenta uma metodologia baseada na articulação das técnicas de Penalização Hiperbólica e Suavização Hiperbólica.

A metodologia utilizada nesta pesquisa foi originalmente apresentada por XAVIER [29]. As técnicas de Suavização Hiperbólica e Penalização Hiperbólica, foram empregadas com sucesso em aplicações complexas tais como problemas de agrupamento (*clustering problems*) XAVIER [31] e XAVIER e XAVIER [32],

empacotamento DE PAULA JUNIOR [2] e JUNIOR [10], cobertura XAVIER e OLIVEIRA [30] e localização de hubs NETO [15].

O método de Suavização Hiperbólica se mostrou eficiente em problemas envolvendo recobrimento de áreas por circunferências XAVIER e OLIVEIRA [30], que tem aplicabilidade direta à localização ótima de estações de telefonia celular. Neste trabalho buscamos demonstrar a robustez do método no recobrimento de corpos por esferas utilizando as técnicas de Penalização Hiperbólica e Suavização Hiperbólica.

O problema de recobrimento de corpos por esferas é definido da seguinte forma: Seja  $V$  um corpo sólido a ser recoberto por um conjunto de  $q$  esferas com  $d$  raios iguais.

O recobrimento considerado nesta dissertações é o recobrimento conhecido na literatura como recobrimento do tipo 1, ou seja, cada ponto de  $V$  estará contido em pelo menos uma esfera.

O problema consiste em encontrar um recobrimento de ordem 1 do corpo sólido  $V$  com  $q$  esferas, que utilizem o menor raio possível, ou seja, deve-se achar os centros das  $q$  esferas que ensejam um recobrimento de ordem 1 e que tenha o menor raio possível. Dessa forma, as variáveis são os centros das esferas,  $x_i \in \mathbb{R}^3$   $i = 1, \dots, q$ , e o raio  $d$ . Portanto esse problema está definido no espaço real com  $(3q + 1)$  dimensões.

Por simplicidade, denomina-se a variável por

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_q, d),$$

onde  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, q \in \mathbb{R}^3$ . Assim, o problema é definido em um espaço solução com  $(3q + 1)$  componentes, ou seja,

$$x \in \mathbb{R}^{3q+1}.$$

Para efeitos computacionais, o corpo sólido  $V$  é discretizado em um conjunto finito de  $m$  volumes elementares denominados de voxels:  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

O problema de recobrimento de corpos tem diversas aplicações práticas. Por exemplo, no tratamento de tumores cerebrais por radiocirurgia, através da utilização do equipamento conhecido como *Gamma Knife*, tem-se a necessidade de se efetuar

o recobrimento do tumor com um conjunto de esferas, associadas a descargas de radiação do equipamento.

## 1.1 Sequência da Apresentação

Esta dissertação está organizada como segue:

No Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica, resumida, da ampla família de problemas de programação matemática com natureza geométrica similares ao problema de recobrimento de corpos por esfera, objeto da presente dissertação.

No Capítulo 3 o problema matemático associado ao recobrimento de corpos por esferas é descrito formalmente. São também apresentadas suas características e a metodologia proposta para sua resolução.

No Capítulo 4 são apresentados os experimentos computacionais desenvolvidos e seus respectivos resultados, obtidos pela aplicação da metodologia proposta.

Finalmente, no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões e sugestões para futuros trabalhos.

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

Neste capítulo será apresentado de modo resumido um conjunto de problemas de recobrimento de áreas e corpos, juntamente com problemas de natureza geométrica que têm associação com os mesmos.

Importantes resultados sobre o problema de cobertura são encontrados em ROGERS [21], TÓTH [26], CONWAY e SLOANE [1] e HALES [9]. O recobrimento planar por um conjunto de esferas foi estudado por GALIEV [6], XAVIER e OLIVEIRA [30] e WEI *et al.* [27]. Um problema semelhante é apresentado em PINTO [19] e DO NASCIMENTO *et al.* [3], onde corpos são recobertos por esferas com raios diferentes.

O foco central desta dissertação é a suavização do problema *min – max – min* engendrado pela modelagem do problema de recobrimento. O processo de suavização aqui adotado é o esquema denominado de Suavização Hiperbólica. A Suavização Hiperbólica é uma extensão do método de Penalização Hiperbólica, originalmente introduzido por XAVIER [29].

A técnica de suavização é apresentada em SANTOS [22], para problemas não-diferenciáveis, em DE PAULA JUNIOR [2], para problema *max – min*, em SOUZA *et al.* [24] para solucionar o problema de distância geométrica e em NETO [15] e XAVIER e XAVIER [32] para problemas de agrupamento, estes são formulados matematicamente como problemas do tipo *min – sum – min*.

Durante o processo de suavização substitui-se o problema não-diferenciável de 3 níveis por um problema alternativo, que é diferenciável em um único nível. Evidentemente o problema suavizado é diferente do problema de recobrimento original. No método é adotado o esquema de resolução de uma sequência de problemas diferenciáveis, que gradualmente se aproximam do problema original.



## 2.1 Problemas de Recobrimento

Os problemas de recobrimento de regiões planas e de corpos são formulados matematicamente como um problema de 3 níveis do tipo  $min - max - min$ , estes são fortemente não-lineares, não-convexos e não-diferenciáveis. Assim, estes problemas apresentam uma grande quantidade de mínimos locais.

### 2.1.1 Recobrimento de Regiões Planas $\mathbb{R}^2$

Nos problemas de cobertura de regiões bidimensionais pode-se considerar recobrir regiões com diferentes figuras, tais como círculos, quadrados, triângulos, polígonos regulares e/ou polígonos irregulares.

Na literatura pode-se encontrar muitos trabalhos que tratam de recobrimento planar. Por exemplo, KERSHNER [11] provou que nenhum arranjo de círculos consegue recobrir o plano infinito mais eficientemente que o arranjo regular hexagonal, Figura 2.1, cuja densidade é 1,21 aproximadamente.

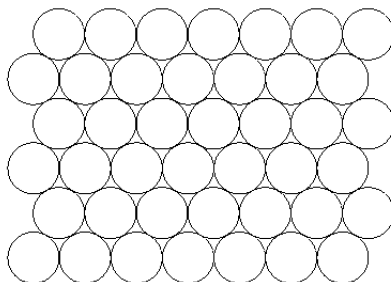


Figura 2.1: Empacotamento regular hexagonal ou colmeia no  $\mathbb{R}^2$ .

A otimização do recobrimento de regiões planas, compactas de formatos quaisquer, por círculos, com a utilização da técnica de Suavização Hiperbólica é apresentada em XAVIER e OLIVEIRA [30]. GALIEV [6] estudou a cobertura de regiões planas por um conjunto de elipses.

A Figura 2.2, retirada de XAVIER e OLIVEIRA [30], mostra o recobrimento planar do Brasil e da Holanda. Estes resultados foram obtidos utilizando a técnica de Suavização Hiperbólica apresentada em XAVIER [29].

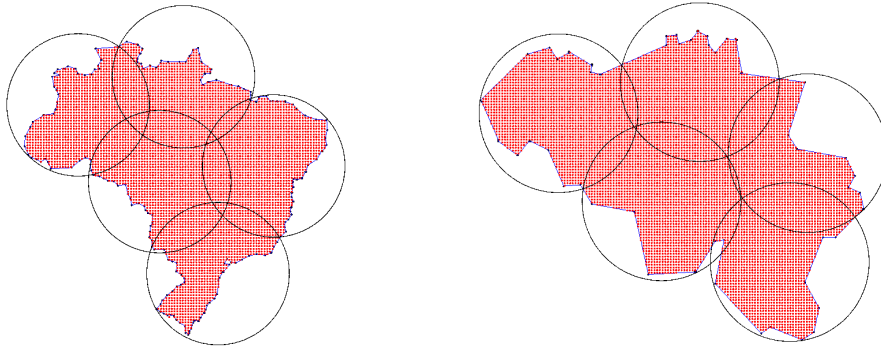


Figura 2.2: Cobertura com 5 circunferências dos mapas do Brasil e da Holanda.

Os problemas envolvendo cobertura de áreas têm diferentes aplicações práticas, tais como determinar a localização de antenas de celular ou a implantação de sirenes em uma região.

A Figura 2.3 foi apresentada em WEI *et al.* [27]. Nela a cidade de Dublin é recoberta por 25 circunferências. Os centros das circunferências representam o local onde devem se localizar as sirenes.

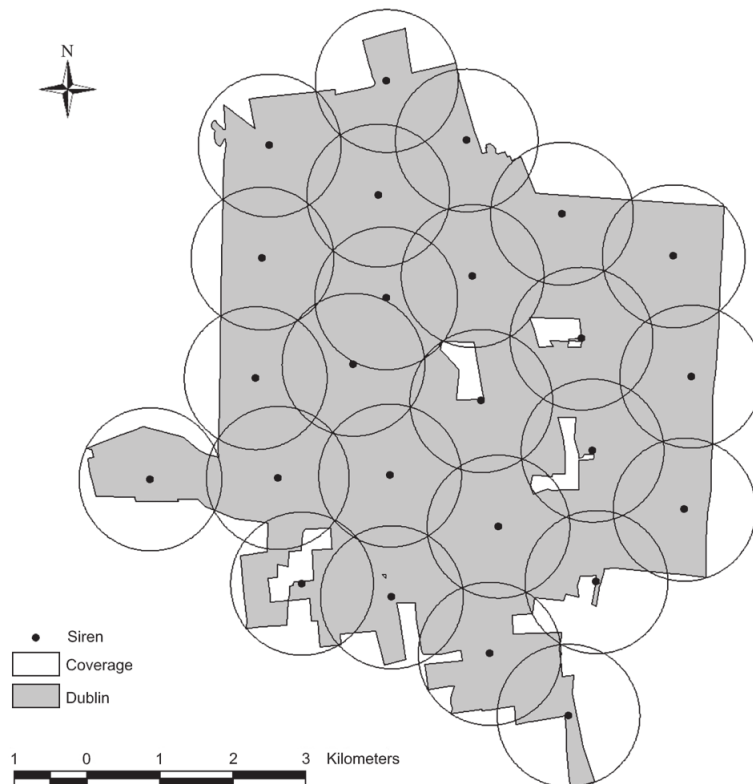


Figura 2.3: Cobertura regional de Dublin por 25 sirenes.

### 2.1.2 Recobrimento de Corpos $\mathbb{R}^3$

Nos problemas envolvendo o recobrimento de áreas ou corpos pode-se efetuar a cobertura utilizando formas geométricas de diferentes tamanhos. Nesta dissertação buscamos recobrir os corpos por esferas de tamanhos iguais.

Uma solução para o problema de recobrimento de corpos por esferas de diferentes tamanhos é apresentado na Figura 2.4 retiradas de PINTO [19].

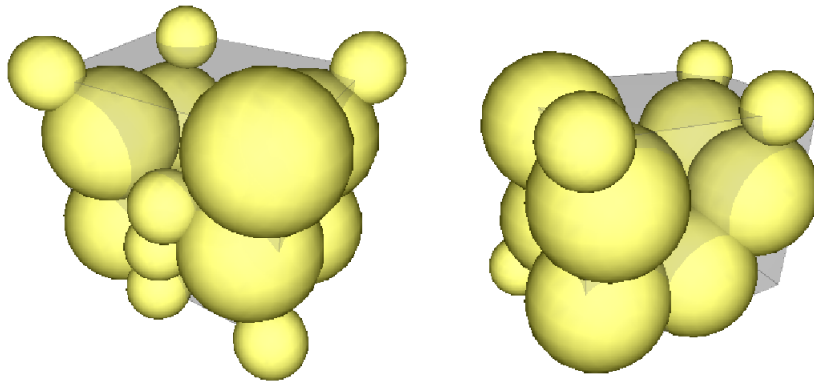


Figura 2.4: Solução para o problema de recobrimento de um paralelepípedo  $14mm \times 12mm \times 10mm$  por esferas de diferentes tamanhos.

No artigo DO NASCIMENTO *et al.* [3] os autores apresentam a resolução do problema de recobrimento do elipsoide utilizando esferas de diferentes tamanhos, conforme ilustra a Figura 2.5.

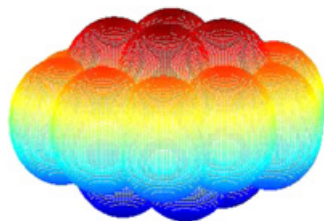


Figura 2.5: Cobertura de um elipsoide por esferas apresentado em [3].

O problema de recobrimento é considerado dual do problema de empacotamento de bolas em espaços n-dimensionais.

## 2.2 Problemas de Empacotamento

Na família de problemas de empacotamento, conhecidos na literatura internacional como *Packing Problems*, deseja-se organizar dentro de um dado contêiner um determinado número de esferas. Estes problemas apresentam as características de serem não-diferenciáveis, não-convexos e não-lineares.

É importante destacar que os problemas de empacotamento assim como os problemas de recobrimento apresentam múltiplos mínimos locais. Estas características dificultam a busca por um mínimo local de boa qualidade.

Dado um polígono regular busca-se determinar a localização dos centros de circunferências de mesmo raio de forma que os espaços vazios dentro deste polígono sejam minimizados. Portanto busca-se maximizar a mínima distância entre os pares de pontos que determinam os centros dos círculos contidos no polígono.

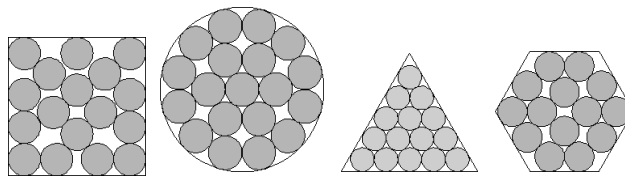


Figura 2.6: Empacotamentos de círculos em polígonos regulares.

Alguns resultados contemplando os problemas de empacotamento de círculos em quadrado são apresentados por PEIKERT [17], MELISSEN [13], PARDALOS *et al.* [16] e JUNIOR [10]. Para os casos em que a região é um triângulo equilátero alguns resultados são encontrados em GRAHAM e LUBACHEVSKY [7]. O empacotamento de círculos em um círculo é apresentado em MELISSEN [14] e GRAHAM *et al.* [8].

A Suavização Hiperbólica se mostrou eficiente para resolver problemas de empacotamento conforme apresentado em JUNIOR [10]. A Figura 2.7 ilustra os novos mínimos globais putativos encontrados para  $q = 77$  círculos.

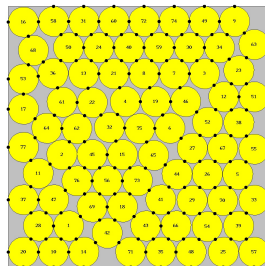


Figura 2.7: Empacotamento de 77 círculos.

## 2.2.1 Problema Tammes

Nesta seção apresentamos, de forma sucinta, o problema de empacotamento de círculos sobre a superfície de uma esfera. Este problema é conhecido como o problema Tammes.

Tammes foi um botânico holandês que estudou a distribuição de orifícios no pólen de grãos esféricos, [25]. Ele observou que esses orifícios apresentavam-se distribuídos sobre a superfície da esfera de forma homogênea. Essa é a origem histórica do problema.



Figura 2.8: Ilustrações do problema de Tammes.

Na Figura 2.8 é possível visualizar o empacotamento sobre esferas. Nos problemas de Tammes o objetivo é maximizar o raio  $d$  dos círculos sobre a superfície da esfera. Este problema pode ser generalizado para o  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ).

O problema de Tammes é não-linear e não-convexo, com restrições não-lineares. A busca por um máximo local de boa qualidade é árdua, em virtude da grande quantidade de máximos locais apresentada pelo problema.

O problema de empacotamento de  $q$  pontos sobre uma esfera busca maximizar a mínima distância entre esses  $q$  pontos. Podemos reescrever o mesmo da seguinte maneira:

Dada uma esfera unitária  $B$  no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , e um determinado número de circunferências  $q$ , deseja-se encontrar a localização dos centros, dessas  $q$  circunferências, sobre a superfície  $S^2$  de  $B$ . Desta forma temos:

$$d_q = \max_{x_1, \dots, x_q \in S^2} \min_{1 \leq i < j \leq q} \|x_i - x_j\|_2, \quad (2.1)$$

onde  $\|\cdot\|_2$  corresponde a distância euclidiana e  $d_q$  é a distância dos  $q$  círculos

dispostos na superfície da esfera unitária, onde  $x_i$  e  $x_j$  correspondem às coordenadas de dois pontos genéricos.

O arranjo correspondente é denominado *empacotamento ótimo*. A Figura 2.9 apresenta o melhor empacotamento conhecido para o caso  $q = 150$  círculos sobre a superfície  $S^2$  de uma esfera unitária  $B$  em  $\mathbb{R}^3$ .

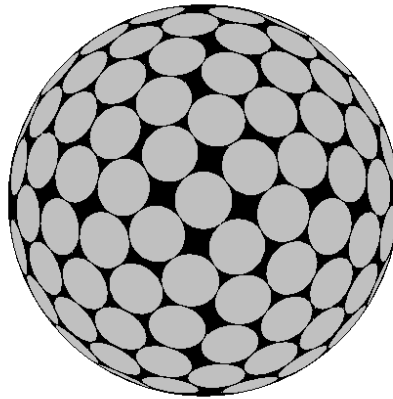


Figura 2.9: Empacotamento de círculos na superfície da esfera no  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.3 O problema do Kissing Number - KNP

O problema de número de toques ou entrechoques, internacionalmente conhecido como *Kissing Number Problem - KNP*, é um problema geométrico onde o objetivo é determinar quantas bolas podem tocar uma bola central ao mesmo tempo sem ocorrer sobreposição das mesmas. Neste problema todas as bolas possuem o mesmo tamanho.

O problema de número de toques ou entrechoques busca determinar no espaço euclidiano  $n$ -dimensional qual o número máximo possível de hiperesferas com raio unitário que se tocam em uma hiperesfera central sem que haja sobreposição. Neste problema as únicas sobreposições encontradas são os pontos de tangência entre as hiperesferas.

O problema do *Kissing Number* apresenta resultados triviais nos espaços  $\mathbb{R}^1$  e  $\mathbb{R}^2$ , conforme ilustrado na Figura 2.10.

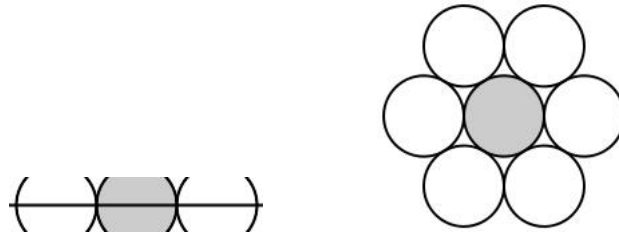


Figura 2.10: Solução do KNP em uma e duas dimensões, respectivamente.

Na Figura 2.10 a parte cinza indica a “esfera” central. Para o problema no  $\mathbb{R}^1$  temos  $KNP(1) = 2$  e para o problema no  $\mathbb{R}^2$  o temos  $KNP(2) = 6$ .

Determinar o  $KNP$  para o espaço tridimensional não é tão simples. Conforme foi provado por LEECH [12],  $KNP(3) = 12$ . Newton já acreditava que o *Kissing Number* em três dimensões era 12. A Figura 2.11 ilustra o resultado do problema no  $\mathbb{R}^3$ .

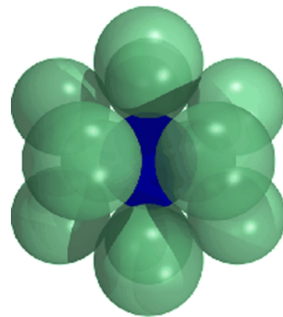


Figura 2.11: Solução do KNP no  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.4 *Gamma Knife*

O *Gamma Knife* é um equipamento utilizado em radiocirurgia para o tratamento, não invasivo de tumores, lesões no cérebro, cabeça e pescoço.

O *Gamma Knife* é fabricado pela ELEKTA [4], empresa sueca fabricante de equipamentos utilizados em radiocirurgia, com base nas invenções do Dr. Lars Leksell (1907-1986).

Durante o tratamento o paciente recebe 192 feixes de radiação gama colimados em um único ponto situado em uma determinada área do cérebro, em princípio, pertencente a um tumor maligno. A Figura 2.12, apresentada em [5], ilustra como o tratamento ocorre. Estes feixes são focados de forma precisa na região a ser

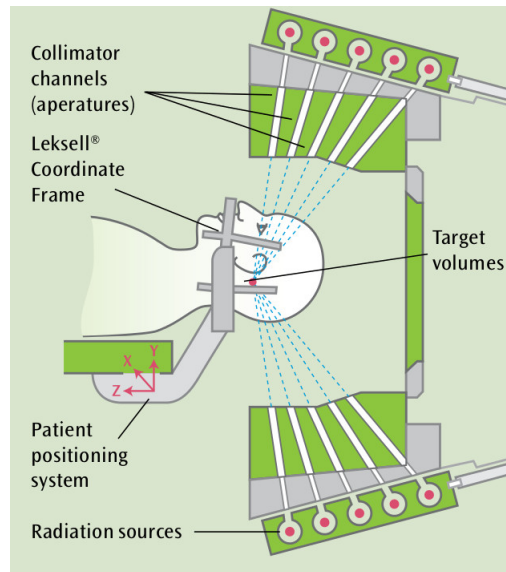


Figura 2.12: Representação esquemática da ação dos raios gama em um tumor.

alvejada. A radiação gama deve “destruir” o tumor minimizando a área de tecido sadio afetado.

Nossa abordagem para o problema de recobrimento de corpos está associada ao uso do equipamento e as técnicas de *Gamma Knife*: os centros das esferas são o local exato onde os raios gama devem ser lançados e o raio das esferas representa o tamanho da região “destruída” por esses raios irradiados.

O objetivo principal deste trabalho é resolver o problema de recobrimento de corpos por esferas. Portanto é importante ressaltar que a determinação da dosagem aplicada pelo *Gamma Knife* nos tumores não faz parte desta dissertação.



# Capítulo 3

## Apresentação Metodológica

### 3.1 Descrição do Problema

O problema de recobrimento de corpos por esferas, conforme amplamente registrado na literatura, é formulado como um problema de otimização do tipo *min - max - min*.

Considerando o problema de recobrimento de um corpo por um determinado número de esferas apresentamos uma metodologia para a resolução do problema. Essa metodologia baseia-se nas técnicas de Suavização (POLYAK [20]; PILLO *et al.* [18] e XAVIER e OLIVEIRA [30]) e Penalização Hiperbólica (XAVIER [28]).

Para superar as dificuldades do problema, a estratégia de suavização utiliza uma classe especial  $C^\infty$  de função suavizada. A solução final é obtida através da resolução de uma sequência de subproblemas que gradualmente se aproximam do problema original. A técnica utilizada, chamada Suavização Hiperbólica, permite que as principais dificuldades apresentadas no problema sejam superadas e gradualmente o problema se aproxime do original.

Sejam  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, q$  os centros das esferas que devem cobrir um domínio  $V \subseteq \mathbb{R}^3$ . O conjunto dos centros das esferas será representado por  $X \in \mathbb{R}^3$ . Dado um ponto genérico  $v$  de  $V$ , devemos calcular a distância de  $v$  ao centro da esfera em  $X$  mais próxima.

$$d(v, X) = \min_{i=1, \dots, q} \|v - x_i\|_2. \quad (3.1)$$

A distância  $d(v, X)$  fornece uma medida da cobertura para um ponto específico

$v \in V$ . Para cobrir o corpo  $V$  com  $q$  esferas deve-se encontrar a maior distância  $d(v, X)$ , que corresponde exatamente à cobertura mais crítica:

$$D(X) = \max_{v \in V} d(v, X). \quad (3.2)$$

A localização ótima dos centros das esferas deve fornecer a melhor qualidade na cobertura  $V$ , isto é, deve minimizar a cobertura mais crítica:

$$\min_x D(X). \quad (3.3)$$

Temos, assim, o problema

$$\min_x [ \max_{v \in V} [ \min_{i=1, \dots, q} (\|v - x_i\|_2) ] ]. \quad (3.4)$$

Assim formulamos o problema *min - max - min*.

## 3.2 Transformando o Problema

Para resolver numericamente o problema (3.4) discretiza-se o corpo  $V$  em um conjunto finito de  $m$  pontos,  $v_j, j = 1, \dots, m$ . Assim o problema pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\min_x [ \max_{j=1, \dots, m} [ \min_{i=1, \dots, q} (\|v_j - x_i\|_2) ] ]. \quad (3.5)$$

Para  $j$  fixo denotaremos  $z_j(X)$  como o mínimo profundo da equação (3.5),

$$z_j(X) = \min_{i=1, \dots, q} \|v_j - x_i\|_2, \quad (3.6)$$

então  $z_j(X)$  deve satisfazer as seguintes desigualdades:

$$z_j(X) - \|v_j - x_i\|_2 \leq 0, \quad i = 1, \dots, q. \quad (3.7)$$

Da mesma maneira, se  $z(X)$  denotar o máximo na equação (3.5) para  $X$  fixo, que é

$$z(X) = \max_{j=1, \dots, m} z_j(X), \quad (3.8)$$

então  $z(X)$  deve satisfazer a seguinte restrição

$$z(X) \geq z_j(X), \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.9)$$

e a solução do problema mais externo de (3.5), não é alterada se dissociarmos  $z$  e  $X$  obtendo assim o problema equivalente

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } z && (3.10) \\ \text{sujeito a: } & z_j = \min_{i=1, \dots, q} \|v_j - x_i\|_2, && j = 1, \dots, m \\ & z \geq z_j, && j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Agora, considere o seguinte problema similar de otimização sobre as mesmas variáveis  $z, z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_q$

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } z && (3.11) \\ \text{sujeito a: } & z_j - \|v_j - x_i\|_2 \leq 0, && j = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, q \\ & z \geq z_j, && j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Este problema não é equivalente ao problema (3.10) pois as variáveis  $z_j$  não possuem limite inferior, assim também  $z$  não possui limite inferior. Para encontrar a equivalência necessária é preciso modificar o problema (3.11).

Denotaremos  $\varphi(y)$  como  $\max\{0, y\}$ , máximo entre 0 e  $y$  e, em seguida, se o primeiro conjunto de desigualdades apresentado em (3.11) é válido, então:

$$\sum_{i=1}^q \varphi(z_j - \|v_j - x_i\|_2) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.12)$$

Para  $j$  fixo e assumindo  $d_1 < \dots < d_q$  com  $d_i = \|v_j - x_i\|_2$ , a Figura (3.1) ilustra as três primeiras parcelas do somatório (3.12) como função de  $z_j$ .

Usando (3.12) no lugar do conjunto de restrições de desigualdades em (3.11), obtêm-se um problema equivalente, mantendo a propriedade de  $z$  e  $z_j$  não serem limitados inferiormente.

Considerando, não obstante, que a função objetivo do problema (3.11) irá forçar para baixo cada  $z$  e, conseqüentemente, cada  $z_j, j = 1, \dots, m$ , pode-se limitar inferiormente as últimas variáveis considerando “>” em lugar de “=” em (3.12) e considerando o problema “não-canônico” resultante:

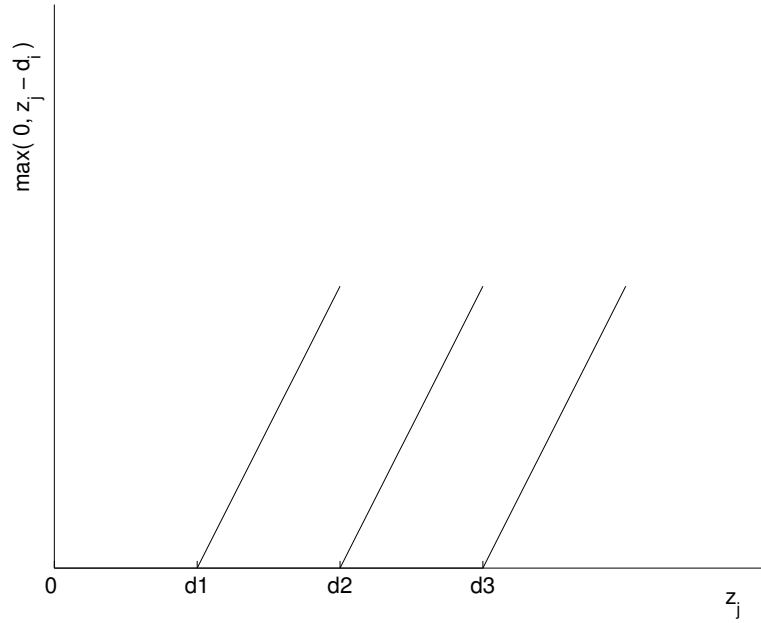


Figura 3.1: Parcelas do somatório em (3.12)

$$\begin{aligned}
 & \text{minimizar } z & (3.13) \\
 \text{sujeito a: } & \sum_{i=1}^q \varphi(z_j - \|v_j - x_i\|_2) > 0, \quad j = 1, \dots, m. \\
 & z \geq z_j \quad j = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

Limitando inferiormente (3.13) através da inclusão de uma perturbação  $\epsilon > 0$  encontra-se o seguinte problema modificado:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimizar } z & (3.14) \\
 \text{sujeito a: } & \sum_{i=1}^q \varphi(z_j - \|v_j - x_i\|_2) \geq \epsilon, \quad j = 1, \dots, m \\
 & z \geq z_j \quad j = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

Uma vez que o conjunto viável do problema (3.13) é o limite de (3.14) quando  $\epsilon \rightarrow 0_+$ , podemos então considerar a resolução (3.13) através da resolução de uma sequência de problemas como (3.14) com uma sequência decrescente de valores  $\epsilon$  que se aproxima de 0.

No trabalho de XAVIER e OLIVEIRA [30] é apresentado em detalhes um conjunto de resultados teóricos associados à resolução do problema (3.14). Estes resultados garantem a equivalência do problema (3.14) com o problema (3.10), no que concerne a solução ótima e a existência de pelo menos uma solução ótima (no problema (3.14), onde todos os raios são iguais, ou seja,  $z_j^* = z^*$ ,  $j = 1, \dots, m$ ).

Com base nestes resultados, pode-se reduzir consideravelmente a dimensão do problema. Considere então o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } z & (3.15) \\ \text{sujeito a: } & \sum_{i=1}^q \varphi(z - \|v_j - x_i\|_2) > 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Deve ser enfatizado que o problema (3.15) é definido no espaço de dimensão  $(3q + 1)$ , que é muito menor que o espaço do problema (3.13), definido no espaço de dimensão  $(3q + m + 1)$ . Assim é mais vantajoso, computacionalmente, resolver o problema (3.15) em vez do problema (3.13).

### 3.2.1 Suavizando o problema

O problema (3.15), apesar de computacionalmente mais vantajoso, apresenta uma estrutura fortemente não-diferenciável, logo sua solução computacional torna-se muito difícil. Portanto para solucionar o problema (3.15) adota-se a estratégia de suavização apresentada em [30].

$$\phi(y, \tau) = \left( y + \sqrt{y^2 + \tau^2} \right) / 2 \quad (3.16)$$

para  $y \in \mathbb{R}$  e  $\tau > 0$ . A função, suavizada,  $\phi$  apresenta as seguintes propriedades:

- (a)  $\phi(y, \tau) > \varphi(y)$ ,  $\forall \tau > 0$ ;
- (b)  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \phi(y, \tau) = \varphi(y)$ ;
- (c)  $\phi(y, \tau)$  é uma função convexa crescente de classe  $C^\infty$ .

Portanto a função  $\phi$  constitui uma aproximação da função  $\varphi$ . Adotando as mesmas ideias iniciais utilizadas na Figura 3.1, as três primeiras parcelas do somatório

na equação (3.12) e suas aproximações suavizadas correspondentes, apresentadas na equação (3.16) estão representados na Figura 3.2.

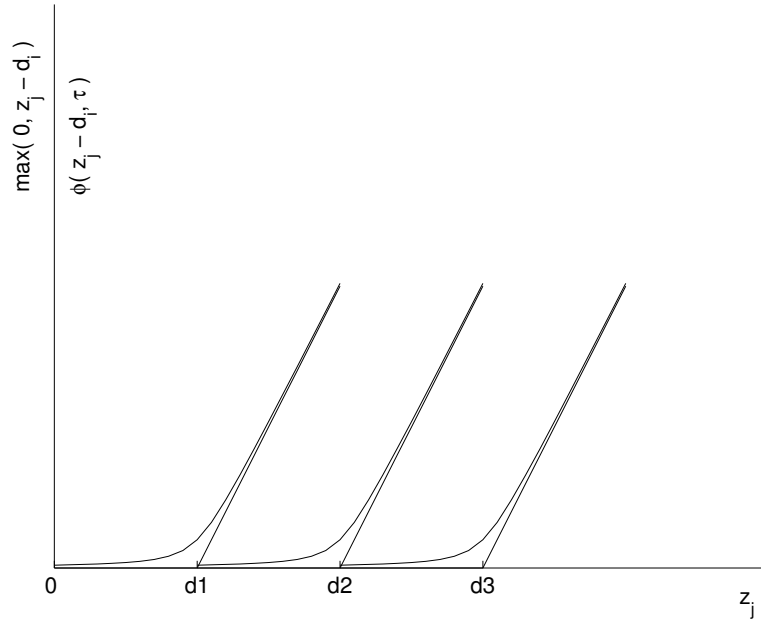


Figura 3.2: Parcelas originais e suavizadas do somatório em (3.12)

Utilizando a função  $\phi$  e substituindo no problema 3.14, encontra-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } z & (3.17) \\ \text{sujeito a: } & \sum_{i=1}^q \phi(z - \|v_j - x_i\|_2, \tau) \geq \varepsilon, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

O problema acima é estabelecido no espaço das variáveis  $(x, d)$ , onde:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_q) \quad x_i \in \mathbb{R}^3$$

representa os centros das  $q$  esferas e  $d \in \mathbb{R}^1$  o raio das esferas.

A solução do problema original pode ser obtida utilizando o Algoritmo de Suavização Hiperbólica, descrito abaixo:

## Algoritmo Simplificado

**Passo de Inicialização:** Escolha de valores:  $0 < \rho_2 \leq \rho_1 < 1$  faça  $k = 1$  e escolha os valores iniciais:  $x^0$ ,  $\varepsilon^1$  e  $\tau^1$ .

**Passo Principal:** Repita Indefinidamente

Resolva o problema (3.17) com  $\tau = \tau^k$  e  $\varepsilon = \varepsilon^k$ , começando no ponto inicial  $(x^{k-1}, d^{k-1})$  e seja  $(x^k, d^k)$  a solução obtida.

Faça  $\tau^{k+1} = \rho_1 \tau^k$ ,  $\varepsilon^{k+1} = \rho_2 \varepsilon^k$ , e  $k := k + 1$ .

Assim como em outros métodos de suavização, a solução para o problema de cobertura é obtido através da resolução de uma sequência infinita de subproblemas de minimização restrita ( $k = 1, 2 \dots$  no Passo Principal). Observe que o algoritmo faz com que  $\tau$  e  $\varepsilon$  se aproximem de zero, fazendo com que as restrições dos subproblemas que ele resolve, dadas como em em (3.17), tendam a aqueles de (3.15). Além disso, o algoritmo assume que  $x^k$  é uma solução global obtida para o  $k^{th}$  subproblema suavizado. Nesta hipótese, devido à propriedade de continuidade de todas as funções envolvidas, a sequência  $d^1, d^2, \dots$  de valores ótimos tende para o valor ótimo de (3.15). Além disso, como  $\rho_2 \leq \rho_1$ , a solução ótima de um subproblema é viável para o próximo, fazendo com que os valores ótimos diminuam monótonamente, já que a função objetivo é sempre a mesma.

### 3.2.2 Penalização Hiperbólica

O método de Penalização Hiperbólica resolve o problema geral de programação não-linear com restrições de desigualdade. É uma alternativa muito adequada para resolver o problema 3.17, pois permite uma articulação natural com a Suavização Hiperbólica.

Nesta subseção encontra-se uma breve apresentação do Método de Penalização Hiperbólica. Outras referências encontram-se em [29] e [30].

O problema geral de programação não-linear com restrições é representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } f(x) & (3.18) \\ & \text{sujeito a: } g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . O nome Penalização Hiperbólica vem do uso da função hiperbólica:

$$P(y, \alpha, \varepsilon) = -\left(\frac{y \tan \alpha}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{y \tan \alpha}{2}\right)^2 + \varepsilon^2} \quad (3.19)$$

onde  $\alpha \in [0, \pi/2]$  e  $\varepsilon \geq 0$ . Esta função hiperbólica  $P(y, \alpha, \varepsilon)$ , como ilustrado na Figura 3.3, possui uma assíntota horizontal e uma inclinação com ângulo  $\alpha$ , interceptando em  $\varepsilon$  o eixo das ordenadas.

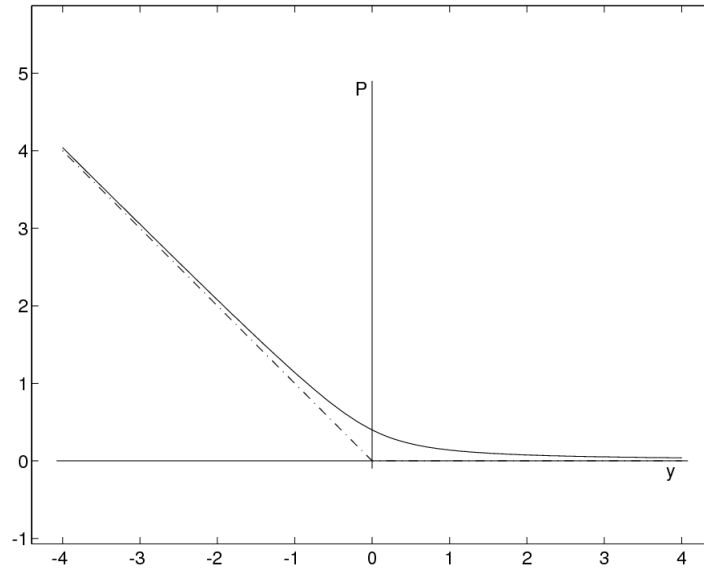


Figura 3.3: Função Penalização Hiperbólica.

De forma mais compacta, a Penalização Hiperbólica pode ser escrita como:

$$P(y, \lambda, \varepsilon) = -\lambda y + \sqrt{(\lambda y)^2 + \varepsilon^2} \quad (3.20)$$

Para resolver 3.18 por meio da técnica Penalização Hiperbólica, é gerada uma



sequência de subproblemas intermediários com a seguinte forma:

$$\text{minimizar } F(x, \lambda^k, \varepsilon^k) = f(x) + \sum_{i=1}^m P(g_i(x), \lambda^k, \varepsilon^k) \quad (3.21)$$

para  $k = 1, 2, \dots$

Aumentar o valor de uma determinada restrição diminui o valor da penalidade assintoticamente a zero. Enquanto este valor torna-se mais negativo, ou seja, o valor da inviabilidade é aumentado, o valor da penalidade aumenta assintoticamente para  $-y \tan \alpha$ . Então, a penalização age de forma coerente na região viável, assim como na região inviável.

### Algoritmo Simplificado Penalização Hiperbólica

**Passo 1:**  $k = 1$ ; introduza os valores iniciais para  $x^0$ ,  $\lambda^1$  e  $\varepsilon^1$ .

**Passo 2:**  $k = k + 1$ ; resolva o problema de minimização irrestrita, ou seja, minimizar  $F(x, \lambda^k, \varepsilon^k)$ , com  $x^{k-1}$  como ponto inicial, e obtenha  $x^k$ ; Se o critério de parada for atendido, então pare.

**Passo 3:** Faça o teste de viabilidade: Se  $x^k$  for um ponto inviável, vá para o Passo 4; caso contrário, vá para o Passo 5;

**Passo 4:** (para pontos inviáveis): Aumente  $\lambda$ , isto é,  $\lambda_i^{k+1} = r \lambda_i^k$ ,  $r > 1$ , vá para o Passo 2;

**Passo 5:** (para pontos viáveis): Diminua  $\varepsilon$ , isto é,  $\varepsilon_i^{k+1} = b \varepsilon_i^k$ ,  $0 < b < 1$ , vá para o Passo 2;

O algoritmo de Penalização Hiperbólica manipula dois parâmetros,  $\lambda$  e  $\varepsilon$ , como pode ser visto na descrição simplificada do algoritmo.

A racionalidade do algoritmo Penalização Hiperbólica é descrito em [29] conforme citado abaixo.

*“A sequência de subproblemas é obtida pela variação controlada dos dois parâmetros,  $\lambda$  e  $\varepsilon$ , em duas diferentes fases do algoritmo. Inicialmente, se aumenta o parâmetro  $\lambda$ , causando um aumento significativo na penalização fora da região viável e, ao mesmo tempo, uma redução significativa na penalização para os pontos dentro da região viável. Esse processo continua até que se obtenha um ponto viável. Daí em diante, mantém-se  $\lambda$  constante e se diminui o valor*

de  $\varepsilon$  sequencialmente. Dessa maneira, a penalização interna fica cada vez mais irrelevante, mantendo o mesmo nível de proibição na região externa.”

### 3.2.3 Conectando a Suavização Hiperbólica com a Penalização Hiperbólica

A combinação das técnicas de Suavização Hiperbólica e Penalização Hiperbólica é bastante natural e atraente, desde que, em ambas seja considerada a resolução de uma sequência de subproblemas. No processo de suavização, esta sequência é engendrada pelo parâmetro  $\tau$ , continuamente decrescente para zero (Figura 3.4).

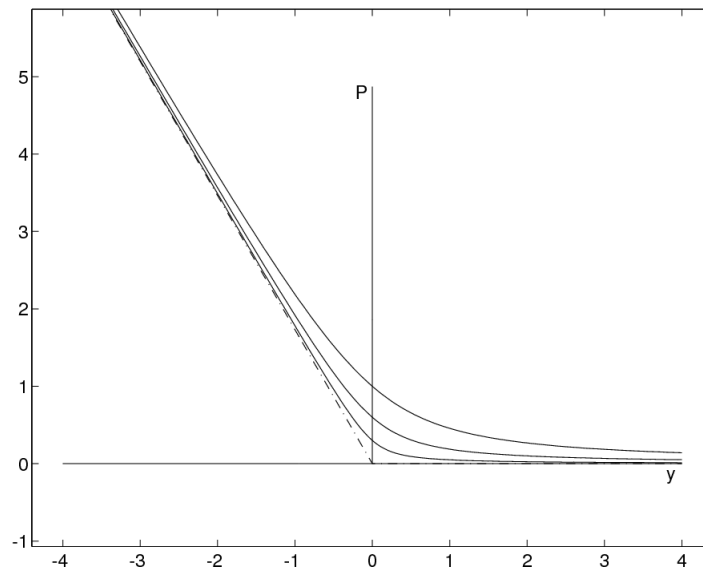


Figura 3.4: Decréscimo do parâmetro  $\tau$  até zero.

No Método de Penalização Hiperbólica, na segunda fase do algoritmo, é efetuado o decréscimo de parâmetro  $\varepsilon$  até zero, ilustrado na Figura 3.5.

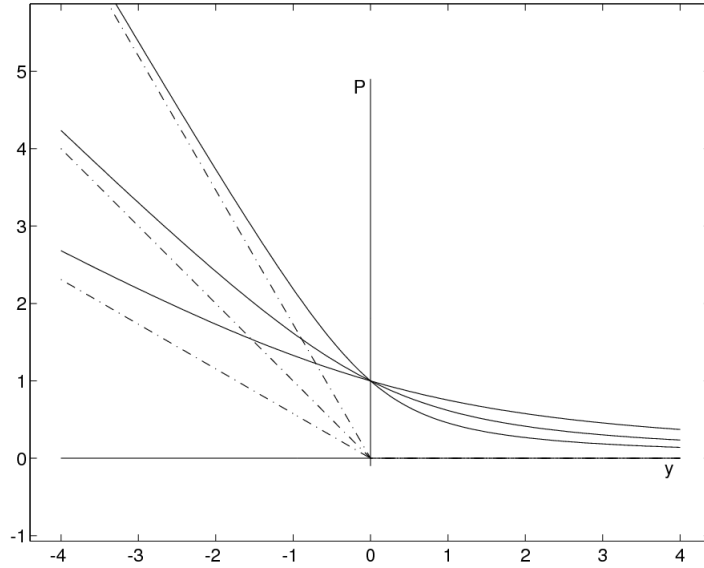


Figura 3.5: Decréscimo do parâmetro  $\epsilon$  até zero.

A conexão entre a Suavização Hiperbólica e Penalidade Hiperbólica consiste na geração de uma sequência única de problemas suavizados através da redução simultânea de ambos os parâmetros. Isto pode ser conseguido utilizando um simples acoplamento linear do parâmetro de suavização  $\tau$  com o parâmetro de penalização  $\epsilon$ . Desta forma, produz-se o algoritmo final utilizado neste trabalho, apresentado a seguir, em uma descrição simplificada.

### Algoritmo de Suavização Hiperbólica Cobertura de Corpos por Esferas

**Passo 1:** Escolha da solução inicial (palpite)  $x^0$  a suavização inicial e a penalização  $\epsilon^1$  e  $\tau^1$ .

**Passo 2:** Escolha da taxa de redução  $\rho : 0 < \rho < 1$  e a tolerância  $\delta > 0$ . Corrigir a Penalização Hiperbólica  $\lambda : \lambda = 1$ ; Faça  $k = 1$ ;

**Passo 3:** Fazer declaração bloco enquanto o critério de parada  $|f(x^k) - f(x^{k-1})| < \delta$  não for atingido. Declaração de bloco começa aqui.

**Passo 4:** Resolva o problema de programação não-linear 3.17, completamente diferenciável, usando como parâmetros  $\tau = \tau^k$  e usando o método de Penalização Hiperbólica com os parâmetros  $\lambda = 1$  e  $\epsilon = \epsilon^k$ , iniciando pelo ponto  $(x^{k-1}, d^{k-1})$ , calculando a solução  $(x^k, d^k)$ .

**Passo 5:** Faça  $\tau^{k+1} = \rho \cdot \tau^k$ ,  $\epsilon^{k+1} = \rho \cdot \epsilon^k$ ,  $k = k + 1$ . Fim da declaração do bloco (repetir enquanto o critério de parada não for atingido).

# Capítulo 4

## Resultados Computacionais

Neste capítulo apresentam-se alguns resultados computacionais obtidos pela presente proposta metodológica na resolução de um conjunto de problemas de recobrimento  $3D$ , tendo a finalidade de validar o método.

Os experimentos foram realizados em um computador pessoal com 3.00GHz Xeon processador e 2,0 GB de RAM.

O MatLab (R2010a) foi utilizado para gerar os pontos que definem o corpo e manipular as soluções obtidas. Os pontos elementares, ou seja, voxels foram gravados em um arquivo de texto. Esse arquivo se constitui da entrada de dados para o algoritmo de Suavização Hiperbólica usado para obter o recobrimento do sólido.

As rotinas de minimização irrestrita, no passo 4 do algoritmo de Suavização Hiperbólica, foram executadas através de um algoritmo Quasi-Newton, com a atualização da matriz hessiana dada pela forma BFGS, contida na Biblioteca Harwell, disponível em [23].

Os resultados obtidos foram gerados em um programa escrito em Fortran para um arquivo de texto.

Os pontos iniciais são escolhidos da seguinte forma:

- 1ª Tentativa:  $x_0$  (ponto inicial gerado de forma aleatória)
- 2ª Tentativa:  $x_0$  (ponto inicial gerado a partir de uma perturbação no ponto ótimo local  $x^*$  encontrado na primeira iteração)
- 3ª Tentativa:  $x_0$  (ponto inicial gerado a partir de uma perturbação no ponto ótimo local  $x^*$  encontrado na segunda iteração)

Como se trata de um problema de otimização global, com grande número de ótimos locais, foi adotado o esquema denominado multi-partida com o uso de 10 diferentes pontos iniciais. Assim pode-se escolher a melhor solução entre as 10 soluções obtidas.

## 4.1 Testes no Toro

Nesta seção apresentam-se os experimentos computacionais efetuados em corpos cujas soluções ótimas são conhecidas analiticamente. Assim estes testes oferecem a oportunidade de avaliar a precisão e robustez do algoritmo.

Para cada exemplo, o ponto de partida  $x_0$  foi escolhido dez vezes de maneira aleatória e submetido ao algoritmo, que obtém a localização dos centros  $x_i$  das  $q$  esferas e o valor do raio  $d^*$ .

O Teste foi criado com o objetivo de obter-se uma validação preliminar do método. Este problema teste consiste em recobrir com esferas, de mesmo raio, o Toro.

O Toro é uma superfície de revolução gerada através da rotação de um círculo no espaço tridimensional sobre um eixo coplanar com o círculo, como mostra a Figura 4.1. A cobertura ótima pode ser facilmente calculada, em função das dimensões do Toro e do número  $q$  de esferas, quando o número de esferas é pequeno, como mostrado a seguir.



Figura 4.1: Toro visto de 3 diferentes ângulos de observação.

### 4.1.1 Desenvolvimento da Solução Analítica do Toro

O Toro pode ser definido parametricamente da seguinte maneira:

$$x(\theta, \phi) = (R + r \cos \phi) \cos \theta$$

$$y(\theta, \phi) = (R + r \cos \phi) \sin \theta$$

$$z(\theta, \phi) = r \sin \phi$$

onde  $\theta$  e  $\phi$  são ângulos entre 0 e  $2\pi$ , fazendo círculos completos que começam e termina no mesmo ponto,  $R$  é a distância do centro do tubo para o centro do Toro,  $r$  é o raio do tubo.

Denotaremos a razão de aspecto (relação entre o  $r$  e  $R$ ) como  $\gamma$  onde  $\gamma = \frac{r}{R}$ .

Em nossos experimentos consideramos o Toro formado por  $R = 3/4$  e  $r = 1/4$ . Portanto a razão de aspecto do Toro é  $\gamma = 1/3$ .

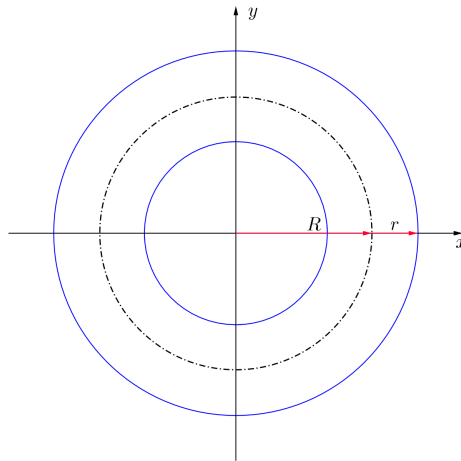


Figura 4.2: Toro projetado no plano  $x \times y$ .

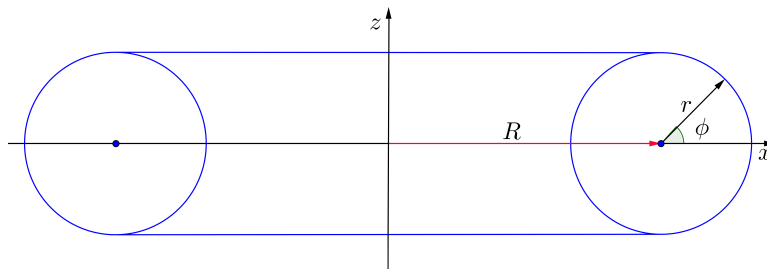


Figura 4.3: Seção do toro projetado no plano  $x \times z$ .

A semi reta  $x_\theta$  pertence ao plano  $x \times y$ , partindo da origem e formando um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$ .

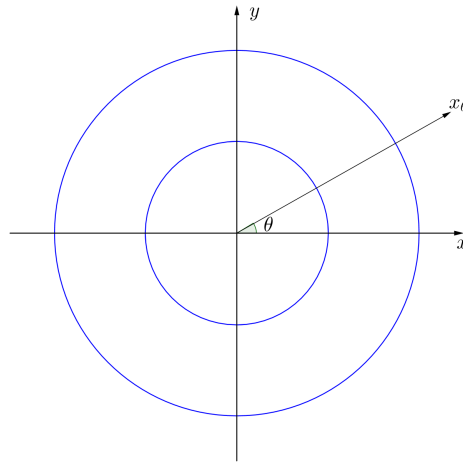


Figura 4.4: Semi reta  $x_\theta$ .

Para recobrir este Toro com  $q$  esferas deve-se considerar que cada esfera irá recobrir um dos  $s$  segmentos do Toro compreendidos entre  $p$  semiplanos tendo como fronteira o eixo  $z$ .

O primeiro semiplano forma um ângulo de  $\theta_s = \frac{\pi}{q}$  com o plano  $x \times z$ . Os semiplanos estão dispostos de maneira que formam um ângulo de  $2\theta_s = \frac{2\pi}{q}$  com os semiplanos.

Com esta configuração de planos podemos localizar a primeira esfera com seu centro no eixo  $x$  a uma distância  $\rho$  da origem conforme ilustra a Figura 4.5 e as outras esferas, da mesma forma, serão dispostas entre os semiplanos adjacentes.

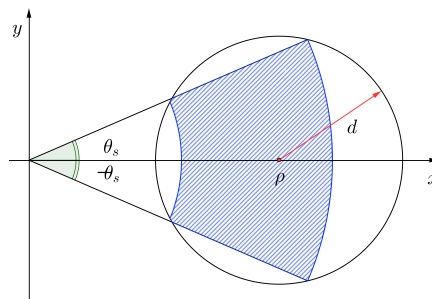


Figura 4.5: Distância  $\rho$  entre a origem e o centro da esfera.

Dados  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\rho$  a distância  $d(\rho, \theta, \phi)$  de um ponto do Toro ao centro da esfera é determinada por:

$$d^2(\rho, \theta, \phi) = [(R + r \cos \phi) \cos \theta - \rho]^2 + (R + r \cos \phi)^2 \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \phi \quad (4.1)$$

Desta forma o problema de recobrimento de uma seção do Toro pode ser formulado como:

$$d_m^2 = \min_{\rho} \max_{\substack{-\theta_s \leq \theta \leq \theta_s \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi}} d^2(\rho, \theta, \phi), \quad (4.2)$$

onde  $d_m$  denota a menor distância dos pontos do Toro a um ponto localizado sobre o eixo  $x$ .

A equação 4.1 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$d^2(\rho, \theta, \phi) = R^2 + r^2 + \rho^2 + 2\rho R \cos \theta - 2\rho r \cos \theta \cos \phi + 2Rr \cos \phi \quad (4.3)$$

Para encontrar o máximo a equação 4.3 pode ser reescrita como:

$$d^2(\rho, \theta, \phi) = (R - \rho \cos \theta + r \cos \phi)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \phi. \quad (4.4)$$

Suponha que o Toro seja recoberto com  $q \geq 3$  esferas. Para estes valores de  $q$  temos  $0 \leq \cos \theta \leq \frac{1}{2}$ .

Para  $|\theta|$  com  $\theta \in [0, \theta_s]$  ou  $\theta \in [-\theta_s, 0]$  as funções  $-\cos \theta$  e  $\sin \theta$  são crescentes. Assim  $d^2(\rho, \theta, \phi)$  atinge seu máximo em  $\theta$  quando  $\theta = \theta_s$  ou  $\theta = -\theta_s$ .

Por simplicidade escolheremos  $\theta = \theta_s = \frac{\pi}{q}$ .

Para determinar o máximo de  $d^2(\rho, \theta_s, \phi)$  com relação a  $\phi$ , tal que  $\phi \in [0, 2\pi]$ , é necessário calcular as derivadas de primeira e segunda ordem.

A derivada de primeira ordem de  $d^2(\rho, \theta_s, \phi)$  com relação a  $\phi$  é:

$$\frac{\partial(d^2)}{\partial \phi} = 2\rho r \cos \theta_s \sin \phi - 2Rr \sin \phi = 2r \sin \phi (\rho \cos \theta_s - R).$$

A derivada de segunda ordem é:



$$\frac{\partial^2(d^2)}{\partial\phi^2} = 2r \cos\phi(\rho \cos\theta_s - R).$$

Para determinar os pontos críticos consideramos  $\frac{\partial(d^2)}{\partial\phi} = 0$ , então temos dois casos:

- **Caso 1:**  $\rho \cos\theta_s - R = 0 \Rightarrow \rho_0 = \frac{R}{\cos\theta_s}$ ;
- **Caso 2:**  $\sin\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$  ou  $\phi = \pi$ .

No Caso 1 temos o caso especial em que  $\rho_0 = \frac{R}{\cos\theta_s} \Rightarrow \frac{\partial(d^2)}{\partial\phi} = 0$  para qualquer valor de  $\phi$ , ou seja,  $d^2\left(\frac{R}{\cos\theta_s}, \theta_s, \phi\right)$  é constante como função de  $\phi$ , dada por:

$$\begin{aligned} d^2\left(\frac{R}{\cos\theta_s}, \theta_s, \phi\right) &= \left(R - \frac{R}{\cos\theta_s} \cos\theta_s + r \cos\phi\right)^2 + \frac{R^2}{\cos^2\theta_s} \sin^2\theta_s + r^2 \sin^2\phi \\ &= \left(R - \frac{R}{\cos\theta_s} \cos\theta_s + r \cos\phi\right)^2 + R^2 \tan^2\theta_s + r^2 \sin^2\phi \\ &= r^2 \cos^2\phi + R^2 \tan^2\theta_s + r^2 \sin^2\phi \\ &= \underbrace{r^2 \cos^2\phi + r^2 \sin^2\phi}_{r^2} + R^2 \tan^2\theta_s \\ &\Rightarrow r^2 + R^2 \tan^2\theta_s \end{aligned}$$

No Caso 2 temos que estudar o sinal de  $\frac{\partial^2(d^2)}{\partial\phi^2}$  em  $\phi = 0$  e  $\phi = \pi$  para encontrar o máximo.

Seja  $\phi = 0$  então

$$\frac{\partial^2(d^2)}{\partial\phi^2} = 2r(\rho \cos\theta_s - R) < 0 \Rightarrow \rho < \frac{R}{\cos\theta_s} = \rho_0$$

Seja  $\phi = \pi$  então

$$\frac{\partial^2(d^2)}{\partial\phi^2} = -2r(\rho \cos\theta_s - R) < 0 \Rightarrow \rho > \frac{R}{\cos\theta_s} = \rho_0$$

Portanto, se  $\rho = R \sec \theta_s$ ,  $d^2(R \sec \theta_s, \theta_s, \phi) = r^2 + R^2 \tan^2 \theta_s$ , constante não variando com  $\phi$ .

Se  $\rho > R \sec \theta_s$  então  $d^2$  tem máximo em  $\phi = \pi$ , dado por:

$$d^2(\rho, \theta_s, \pi) = \rho^2 - 2(R - r) \cos \theta_s \rho + (R - r)^2 \quad (4.5)$$

A equação 4.5 é uma parábola em  $\rho$  com mínimos em  $\rho_2 = (R - r) \cos \theta_s$ .

Para que  $\rho_2 > \rho_0$ , onde  $\rho_0 = \frac{R}{\cos \theta_s}$  e  $\rho_2 = (R - r) \cos \theta_s$ , temos:

$$\begin{aligned} (R - r) \cos \theta_s &> \frac{R}{\cos \theta_s} \\ \Rightarrow (R - r) &> \frac{R}{\cos^2 \theta_s} \\ \Rightarrow (R - r) &> R \sec^2 \theta_s \\ \Rightarrow -r &> R \sec^2 \theta_s - R \\ \Rightarrow -r &> R(\sec^2 \theta_s - 1) \\ \Rightarrow -r &> R(\tan^2 \theta_s) \end{aligned}$$

Portanto temos que  $r < -R \tan^2 \theta_s$  o que é impossível pois  $R > r > 0$ . Logo o mínimo é atingido para  $\rho = \rho_0$ .

Se  $\rho < R \sec \theta_s$  então  $d^2$  tem máximo em  $\phi = 0$ , dado por:

$$d^2(\rho, \theta_s, 0) = \rho^2 - 2(R + r) \cos \theta_s \rho + (R + r)^2 \quad (4.6)$$

A equação 4.6 uma parábola em  $\rho$ , com mínimo dado por  $\rho_1 = (R + r) \cos \theta_s$ .

Para que  $\rho_1 < \rho_0$ , onde  $\rho_0 = \frac{R}{\cos \theta_s}$  e  $\rho_1 = (R + r) \cos \theta_s$ , temos:

$$\begin{aligned} (R + r) \cos \theta_s &< \frac{R}{\cos \theta_s} \\ \Rightarrow (R + r) &< \frac{R}{\cos^2 \theta_s} \\ \Rightarrow (R + r) &< R \sec^2 \theta_s \\ \Rightarrow r &< R \sec^2 \theta_s - R \\ \Rightarrow r &< R(\sec^2 \theta_s - 1) \\ \Rightarrow r &< R(\tan^2 \theta_s) \end{aligned}$$

Os gráficos 4.6, 4.7, 4.8 ilustram as parábolas 4.5 e 4.6 em verde e azul, respectivamente. Neles temos  $\phi = \pi$  para  $\rho \geq R \sec \theta_s$  e  $\phi = 0$  para  $\rho < R \sec \theta_s$ .

No gráfico 4.6 o ponto de mínimo é determinado pelo mínimo da parábola 4.5 em azul.

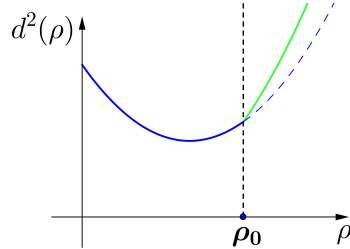


Figura 4.6: Parábolas para  $q = 4$  esferas.

No gráfico 4.7 o ponto de mínimo é determinado pela interseção das duas parábolas que coincide com o vértice da parábola azul.

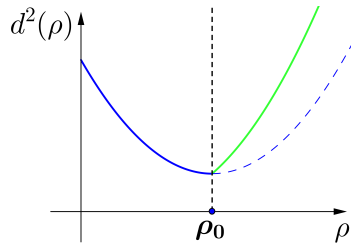


Figura 4.7: Parábolas para  $q = 6$  esferas.

No gráfico 4.8 o ponto de mínimo é determinado pela interseção parábola 4.6.

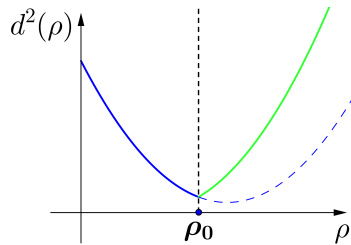


Figura 4.8: Parábolas para  $q = 12$  esferas.

Analisando os gráficos acima é possível observar que a cobertura do toro com  $q \leq 6$  é determinada apenas pela 4.5 e nos demais casos  $q \geq 6$  a solução é determinada pela parábola 4.6.

Esta análise resulta nos seguintes casos:

- (a) Para  $q < \frac{\pi}{\arctan \sqrt{\gamma}}$

$$\text{Se } r < R \tan^2 \theta_s \text{ então } \rho^* = (R + r) \cos \theta_s \text{ e } d^* = (R + r) \sin \theta_s \quad (4.7)$$

- (b) Para  $q \geq \frac{\pi}{\arctan \sqrt{\gamma}}$

$$\text{Se } r \geq R \tan^2 \theta_s \text{ então } \rho^* = \frac{R}{\cos \theta_s} \text{ e } d^* = \sqrt{r^2 + R^2 \tan^2 \theta_s} \quad (4.8)$$

O gráfico 4.9 ilustra as regiões (a) e (b) no plano  $\gamma \times q$ . A  $\tan^2 \pi/q$  está representada em vermelho.

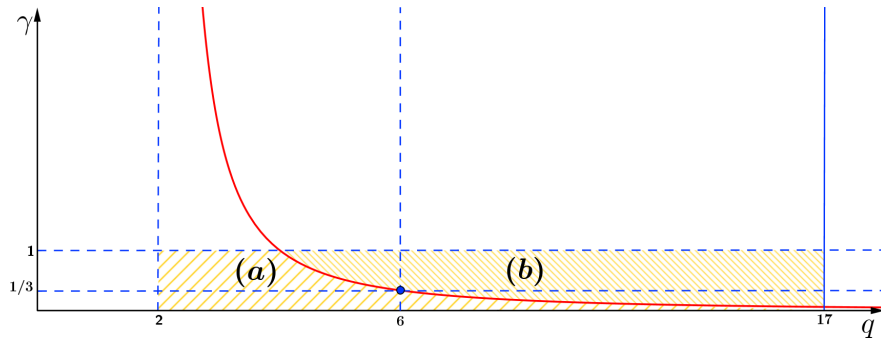


Figura 4.9: Representação gráfica das regiões (a) e (b) no plano  $\gamma \times q$ .

Em nossos testes com o Toro consideramos  $\gamma = 1/3$ . O gráfico 4.9 ilustra que se  $q \leq 6$  sempre teremos somente a região (a) válida. Se  $7 \leq q \leq 16$  sempre teremos apenas a região (b) válida. Para  $q \geq 17$  a restrição de simetria é violada e o desenvolvimento utilizado não pode ser mais aplicado.

É possível utilizar régua e compasso para determinar a solução do recobrimento ótimo do Toro ( $\gamma = 1/3$ ) quando o número de esferas for pequeno ( $q \leq 6$ ). Para encontrar a localização dos centros de 4 esferas que recobrem totalmente o Toro, por exemplo, siga os passos abaixo:

1 - Desenhe o Toro, utilizando o compasso, e divida-o em 4 setores iguais, conforme mostra a Figura 4.10:

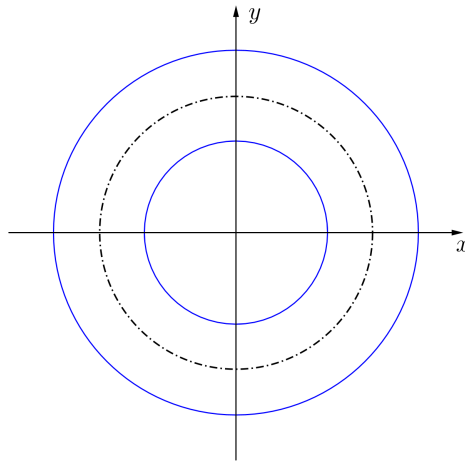


Figura 4.10: Toro dividido em 4 setores.

Os pontos destacados na Figura 4.11 são os pontos mais críticos a serem cobertos pelas 4 esferas.

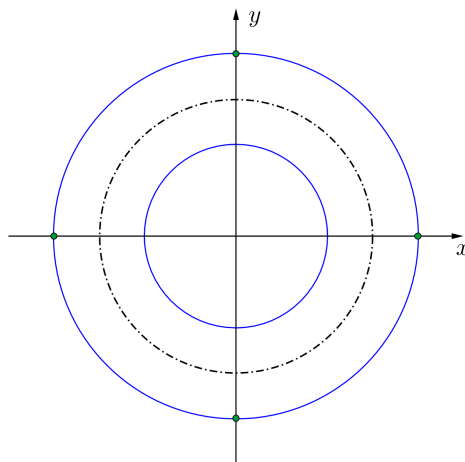


Figura 4.11: Os pontos em verdes representam os pontos mais críticos.

2 - Faça um segmento de reta, utilizando a régua, de forma que os pontos críticos sejam unidos conforme mostra a Figura 4.12.

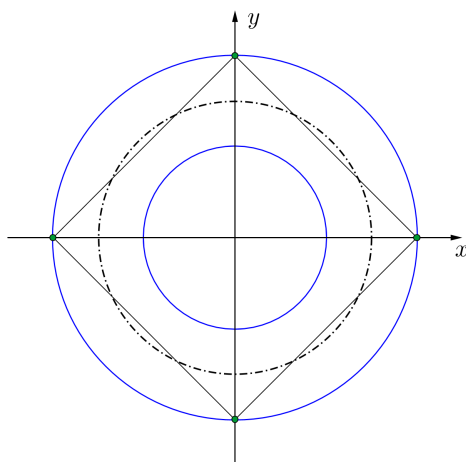


Figura 4.12: Ligando os pontos críticos

Estes segmentos que unem os pontos críticos são o diâmetro das esferas.

3 - Divida cada segmento de reta ao meio e encontre o centro das esferas conforme ilustrado na Figura 4.13.

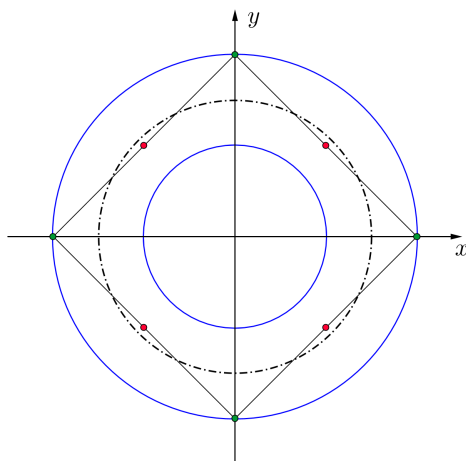


Figura 4.13: Os pontos em vermelho representam os centros das Esferas.

4 - Utilize o compasso para desenhar as 4 esferas conforme mostra a Figura 4.14.

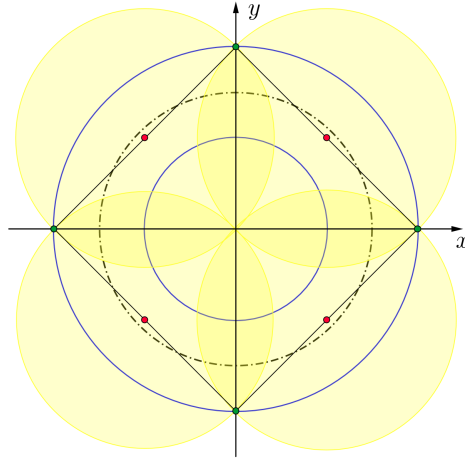


Figura 4.14: Solução geométrica para o Recobrimento do Toro com 4 Esferas.

Utilizando técnicas básicas de desenho geométrico desenhamos a solução do problema de Recobrimento do Toro com 4 esferas iguais.

Sempre que o número  $q$  de esferas cresce além de um certo limite, a restrição de simetria imposta não garante mais que a solução ótima seja encontrada. Isto ocorre pois alguns pontos do Toro começam a ser coberto por um grande número de esferas sobrepostas. Para recobrir o Toro, a dupla sobreposição é inevitável, mas na busca da solução ótima, deve-se evitar a sobreposição de três ou mais esferas.

Para calcular o limite no qual o número de esferas  $q$  começa a apresentar sobreposição tripla, basta usar a seguinte desigualdade:

$$\cos^2(k\pi/q) - (1 - \gamma^2) \cos^2(\pi/q) > 0 \quad (4.9)$$

Para  $\gamma = 1/3$ , a tripla sobreposição começa com  $q = 17$  ( $q > 16,12$ ). A partir deste ponto a restrição de simetria é violada e a solução ótima torna-se analiticamente mais rebuscada. Assim, foi possível verificar a melhor solução analiticamente para  $q$  variando de 2 a 16.

Durante os testes computacionais aplicados ao Toro variamos  $q$ , número de esferas, de 2 a 40.

### 4.1.2 Recobrimento do Toro

Nesta seção serão exibidos os resultados obtidos utilizando a Suavização Hiperbólica para recobrir o Toro.

A Figura 4.15 mostra representação gráfica do Toro coberto com  $q = 9$  esferas, observado de 3 ângulos diferentes, usando a técnica de Suavização Hiperbólica. A solução desse exemplo pode ser verificada utilizando 4.8, que representa o segundo caso da restrição de simetria:

$$\text{Se } r \geq R \tan^2 \theta_s \text{ então } \rho^* = \frac{R}{\cos \theta_s} \text{ e } d^* = \sqrt{r^2 + R^2 \tan \theta_s}$$

A Figura 4.16 mostra representações gráficas do Toro coberto com  $q = 36$  esferas usando a técnica de Suavização Hiperbólica. Este resultado não pode ser verificado analiticamente, mas a qualidade da solução é evidente, por inspeção visual desde que aparentemente não há qualquer excesso de volume na cobertura.

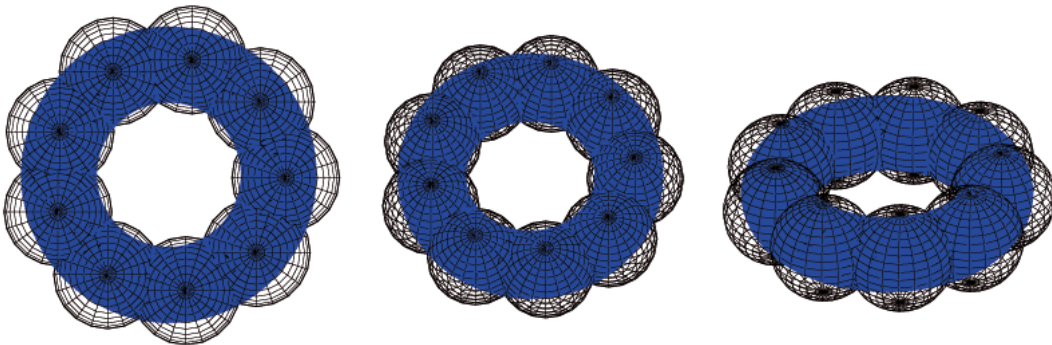


Figura 4.15: Toro coberto com 9 esferas.

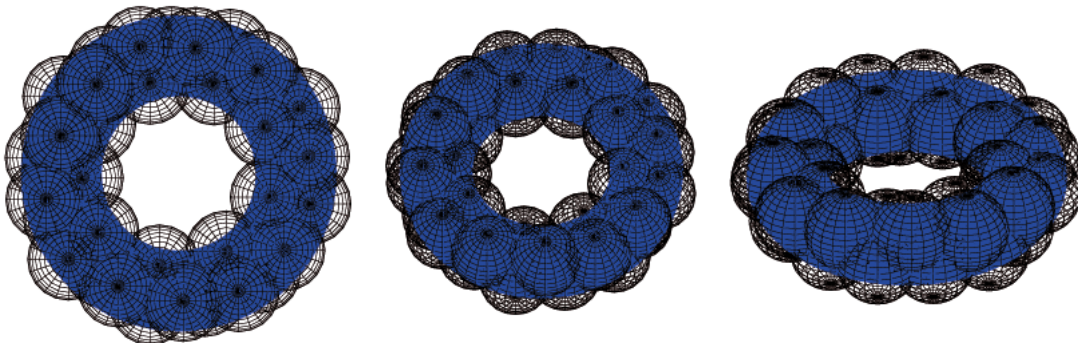


Figura 4.16: Toro coberto com 36 esferas.



Nas tabelas abaixo a coluna  $q$  especifica o número de esferas utilizadas para cobrir o corpo. A coluna  $f_{AHSC-L2}$  apresenta a melhor solução encontrada pela Suavização Hiperbólica para a função objetivo, o valor do menor raio,  $d^*$ . O número de ocorrências da melhor solução é apresentado na coluna Occur. As colunas  $E_{Mean}$  e  $T_{Mean}$  mostram o desvio percentual médio observado nas  $T$  diferentes tentativas e o tempo médio de CPU (em segundos) respectivamente. Em nossos experimentos adotamos  $T = 10$  para todos os casos. O desvio médio é calculado da seguinte forma:

$$E_{Mean} = \frac{\sum_{t=1}^T (f^t - f_{AHSC-L2})}{T \cdot f_{AHSC-L2}} \quad (4.10)$$

onde  $f^t$  é o valor da solução encontrada na tentativa  $t$  e  $T$  é o número de tentativas.

q	$f_{ot}$	$f_{AHSC-L2}$	Occur.	$E_{Mean}$	$T_{Mean}$
2	0.100000E01	0.100000E01	10	0.00	11.21
3	0.866025E00	0.865590E00	10	0.00	19.03
4	0.707107E00	0.706491E00	10	0.00	26.94
5	0.587785E00	0.587081E00	10	0.00	35.56
6	0.500000E00	0.499247E00	10	0.00	45.61
7	0.439263E00	0.439064E00	1	0.03	62.34
8	0.398760E00	0.398166E00	1	0.10	83.77
9	0.370158E00	0.369614E00	5	0.05	75.08
10	0.349120E00	0.348708E00	1	0.06	87.26
12	0.320758E00	0.320322E00	2	0.06	103.40
16	0.291129E00	0.290933E00	2	0.07	253.29
20	-	0.276674E00	2	0.49	303.08
24	-	0.269039E00	1	4.56	538.10
30	-	0.266424E00	1	4.24	683.48
36	-	0.260362E00	1	0.66	878.66
40	-	0.252293E00	1	0.51	979.58

Tabela 4.1: Toro discretizado por 244080 voxels

A Tabela 4.1 apresenta os resultados obtidos para o problema de recobrimento do Toro. É possível analisar o desempenho do algoritmo observando os resultados apresentados nesta Tabela.

A coluna  $f_{ot}$ , da Tabela 4.1, apresenta os raios calculados analiticamente para o recobrimento do Toro. As equações 4.7 ou 4.8 são a base para o cálculo de  $f_{ot}$ .

A coluna  $f_{AHSC-L2}$ , apresenta os raios calculados pela metodologia proposta para o Toro discretizado por 244080 voxels. Se a discretização for mais “fina” a solução encontrada durante o processo iterativo se aproxima da solução analítica.

A Figura 4.17 ilustra a cobertura de uma região discretizada. O local hachurado pertence a região real e não é contemplado com a cobertura. Porém quando se aumenta o número de pontos da discretização, as regiões entre esses pontos ficam gradualmente menores.

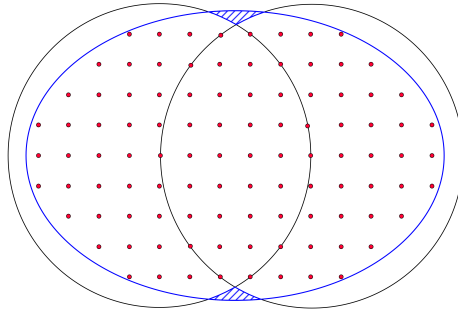


Figura 4.17: Região hachurada não contemplada pela cobertura.

O algoritmo encontra a solução em todas as tentativas apresentado na coluna  $f_{AHSC-L2}$ . Deve ser destacado que esses valores são menores que os valores da solução analítica  $f_{ot}$ .

Nos casos pequenos  $q \leq 6$  esferas, o desvio médio é nulo. Nos demais casos também é possível observar que o desvio médio  $E_{Mean}$  é muito pequeno.

A coluna  $f_{ot}$  apresenta o valor ótimo calculado analiticamente  $d^*$ , enquanto a coluna  $f_{AHSC-L2}$  apresenta o valor ótimo encontrado pela Suavização Hiperbólica, em todos os casos a solução encontrada pelo algoritmo é menor que a solução analítica o que corrobora a robustez do método.

A análise dos resultados da Tabela 4.1 será separada em três grupos distintos:

- Grupo I - casos pequenos,  $q \leq 6$
- Grupo II - casos médios,  $7 \leq q \leq 16$
- Grupo III - casos grandes,  $20 \leq q \leq 40$

O Grupo I contempla os casos onde o Toro é recoberto por um número de esferas pequeno (até 6 esferas). Neste grupo os valores calculados pelo algoritmo (coluna  $f_{AHSC-L2}$ ) apresentam melhores resultados que os da  $f_{ot}$ , solução calculada analiticamente. A coluna  $f_{ot}$  neste grupo é calculada utilizando Equação 4.7.

Comparando as colunas  $f_{ot}$  e  $f_{AHSC-L2}$  para os casos pertencentes ao Grupo I, é possível observar que os valores  $f_{AHSC-L2} < f_{ot}$ , isso ocorre pois o método avalia apenas os voxels utilizados na discretização do corpo. Este resultado mostra claramente a acurácia (precisão) do método de Suavização Hiperbólica.

No Grupo II o cálculo da  $f_{ot}$  é realizado apenas com a Equação 4.8. Este grupo engloba os casos médios onde o número de esferas é maior ou igual a 7 e menor ou igual a 16. Neste grupo a coluna  $f_{AHSC-L2}$  apresenta valores menores que os da coluna  $f_{ot}$ . Na coluna  $E_{Mean}$  os valores dos desvios médios não são mais nulos como no Grupo I, mas apresentam valores baixos.

O Grupo III não apresenta valores para a coluna  $f_{ot}$  pois não é possível calcular a solução analítica para o recobrimento do Toro com  $20 \leq q \leq 40$ . Na coluna  $E_{Mean}$  os desvios médios são baixos. O  $T_{Mean}$  gasto durante o cálculo do algoritmo para o caso no qual o Toro é recoberto por 40 esferas, Figura 4.20, é  $T_{Mean} = 979.58$ . Este valor não é elevado se for considerada a complexidade do problema.

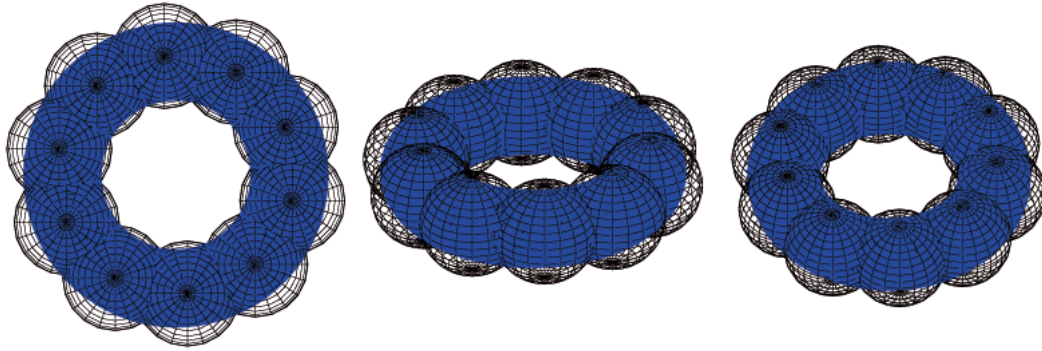


Figura 4.18: Toro coberto com 10 esferas.

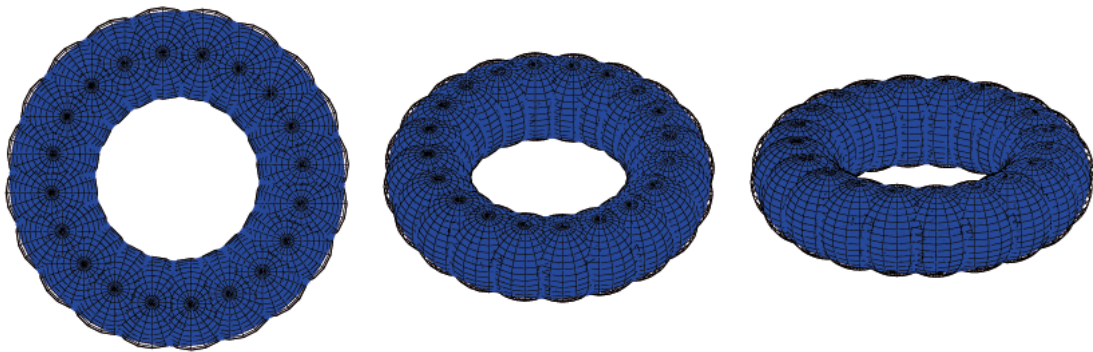


Figura 4.19: Toro coberto com 20 esferas.

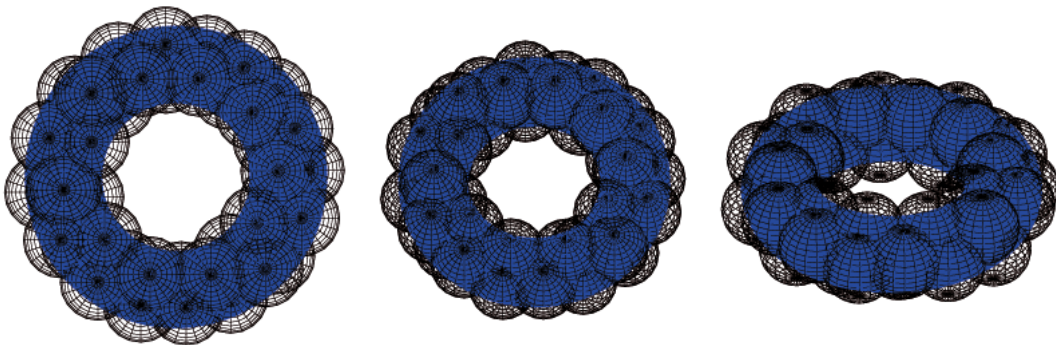


Figura 4.20: Toro coberto com 40 esferas.

As Figuras 4.18, 4.19 e 4.20 ilustram os resultados obtidos durante o recobrimento do Toro com 10, 20 e 40 esferas respectivamente. Estas imagens exemplificam os resultados apresentados na Tabela 4.1.

A sobreposição tripla das esferas torna-se inevitável quando  $q > 17$ , conforme calculado anteriormente 4.9. Por inspeção visual é possível observar a sobreposição

tripla das esferas nas Figuras 4.16, 4.19 e 4.20.

O problema de recobrimento (*min-max-min*) é um problema de minimização global, ou seja, apresenta grande quantidade de pontos de mínimo. A robustez apresentada no Método de Suavização Hiperbólica nos permite encontrar na pior das hipóteses um ponto de mínimo local.

## 4.2 Aplicação em corpos genéricos

Após a validação do método utilizando o Toro, os testes a seguir foram realizados com a aplicação da mesma metodologia. Os corpos Oito e Feijão foram criados com o objetivo de testar a proposta metodológica na resolução de problemas de recobrimento de grande porte.

Tomamos a decisão de gerar problemas teste com grande número de voxels para verificar a consistência do método na resolução de problemas mais difíceis.

### 4.2.1 Mecanismo de discretização - Gerando os voxels do Feijão.

Os corpos Feijão e Oito foram gerados a partir de uma mesma técnica de discretização. Nesta seção vamos explicar como o corpo Feijão foi gerado.

Utilizamos papel milimetrado para desenhar um polígono semelhante a um feijão. Utilizamos o quadriculado do papel juntamente com uma régua para auxiliar na determinação dos pontos que formam a figura. Digitamos cada ponto  $(x, y)$  em um arquivo *feijao.txt*, este será utilizado no MatLab como entrada para gerar o polígono que dará origem ao corpo.

A Figura 4.21 mostra os 71 pontos que ao serem ligados formam o polígono denominado Feijão.

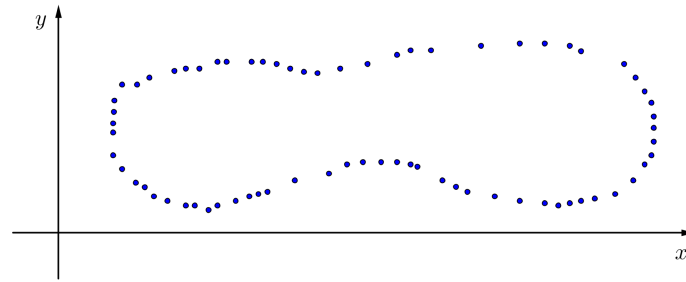


Figura 4.21: Feijão 71 pontos.

A Figura 4.22 ilustra os 71 pontos de entrada ligados formando o polígono.

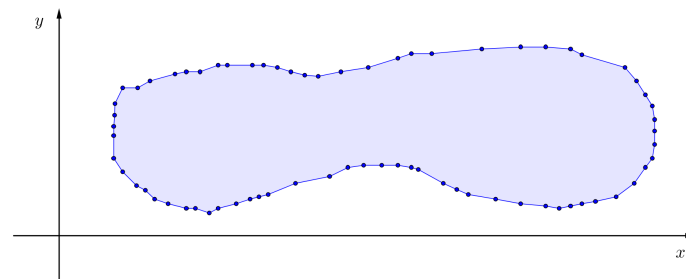


Figura 4.22: Polígono composto de 71 pontos.

A regra para gerar a linha central ou de simetria é realizar uma varredura nos pontos internos ao polígono e encontrar para cada ponto  $\bar{x}$  um correspondente  $\bar{y}$  como mostra a Figura 4.23.

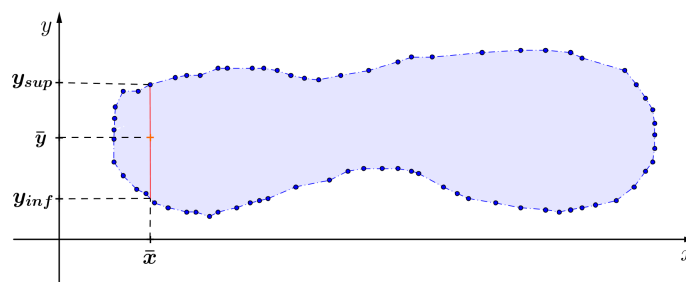


Figura 4.23: Geração da linha central do polígono.

Os pontos  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são as duas primeiras coordenadas que formarão os voxels. Para finalizar a formação dos voxels devemos determinar os pontos  $\bar{z}$ .

A linha laranja mostrada na Figura 4.24 representa o centro do polígono. Esta linha não é uma reta pois o polígono é irregular.

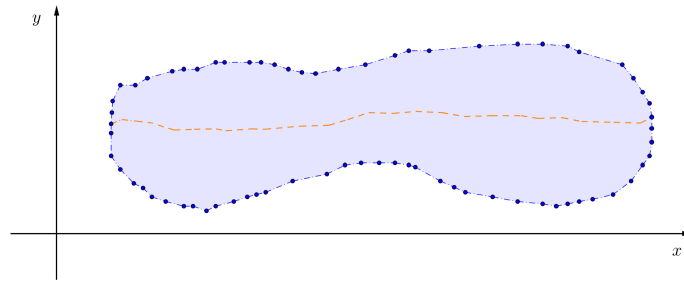


Figura 4.24: Centro do polígono.

Transladam-se no eixo  $z$  os pontos  $y_{sup}$  e  $y_{inf}$  construindo uma secção circular de diâmetro  $(y_{sup} - y_{inf})$  nos eixos  $z \times y$ .

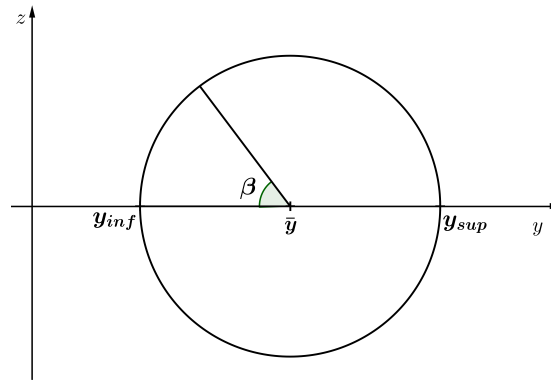


Figura 4.25: Seção circular utilizada para formar os voxels.

Durante a varredura no eixo  $z$  optamos por efetuar a varredura circular, mas outros tipos poderiam ter sido escolhidos como por exemplo: elíptica, hexagonal ou retangular.

Calculamos  $\bar{z}$ , neste ponto  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são fixos. Para calcular  $\bar{z}$  associamos para cada  $\bar{y}$  um  $z_{sup}$  e  $z_{inf}$ .

Os voxels são determinados pelos pontos encontrados durante as varreduras nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Portanto um voxels  $\bar{v} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

A mesma técnica foi utilizada para gerar o Oito.

## 4.2.2 Recobrimento do Oito

Nesta seção vamos mostrar os resultados obtidos para o recobrimento do corpo denominado Oito.

Na Tabela 4.2 a primeira coluna  $q$  especifica o número de esferas utilizadas para recobrir o corpo. A segunda coluna  $f_{AHSC-L2}$  apresenta a melhor solução encontrada pelo algoritmo para a função objetivo, o menor raio,  $d^*$ . O número de ocorrências da melhor solução é apresentado na coluna Occur; As colunas  $E_{Mean}$  e  $T_{Mean}$  mostram o desvio percentual médio e o tempo médio de CPU (em segundos) respectivamente.

$q$	$f_{AHSC-L2}$	Occur.	$E_{Mean}$	$T_{Mean}$
2	0.791891E00	10	0.00	2.76
3	0.589768E00	1	5.16	5.24
4	0.504155E00	1	1.92	8.14
5	0.459250E00	1	5.92	13.31
6	0.443767E00	1	8.67	19.50
7	0.433959E00	1	12.10	21.13
8	0.425405E00	1	1.64	22.81
9	0.419869E00	3	1.36	29.31
10	0.404259E00	1	1.48	36.45

Tabela 4.2: Oito discretizado por 33351 voxels.

O desvio médio  $E_{Mean}$  para os casos com um número par de esferas é sempre menor do que para os casos ímpares, com exceção do caso em que  $q = 9$ . Este evento ocorre por conta da anatomia deste corpo.

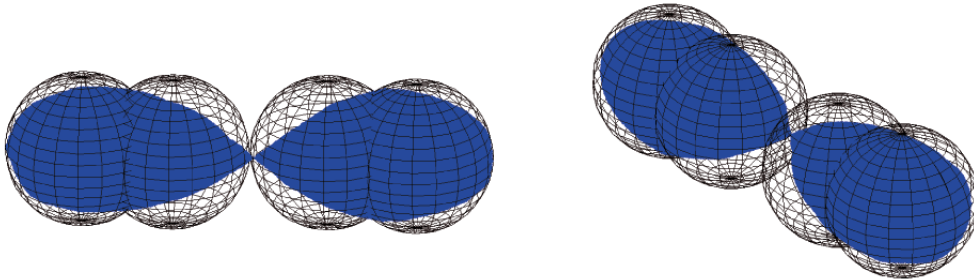


Figura 4.26: Oito (849095 voxels) 4 esferas.

A Figura 4.26 ilustra o corpo denominado Oito recoberto com 4 esferas. O raio das esferas é apresentado na Tabela 4.2 pela coluna  $f_{AHSC-L2}$ .



### 4.2.3 Recobrimento do Feijão

Esta seção apresenta os resultados da Suavização Hiperbólica obtidos para o recobrimento do corpo Feijão.

A Tabela 4.3 exibe os resultados obtidos durante o a cobertura do Feijão. Neste teste utilizamos uma malha composta por 361904 voxels.

q	$f_{AHSC-L2}$	Occur.	$E_{Mean}$	$T_{Mean}$
2	0.889279E00	4	1.29	30.05
3	0.657307E00	1	0.09	30.12
4	0.573442E00	2	0.76	69.39
5	0.529751E00	9	0.02	77.23
6	0.509748E00	1	2.21	135.52
7	0.506231E00	1	1.07	170.65
8	0.493059E00	1	1.01	216.02
9	0.478782E00	1	2.42	222.08
10	0.470143E00	1	0.90	302.65

Tabela 4.3: Feijão discretizado por 361904 voxels.

A Figura 4.27 ilustra os resultados apresentados na Tabela 4.3 onde o corpo Feijão é discretizado em 361904 voxels.

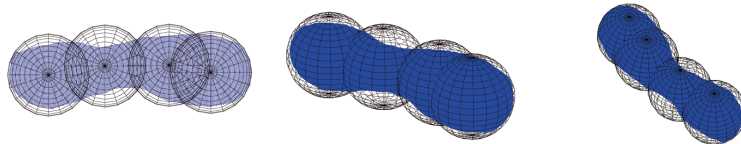


Figura 4.27: Feijão (361904 voxels) coberto com 4 esferas.

Na Tabela 4.4 são apresentados os resultados do Algoritmo de Suavização Hiperbólica utilizado para solucionar o problema de recobrimento do Feijão. Estes resultados tem como base uma malha composta por 1202211 voxels.

q	$f_{AHSC-L2}$	Occur.	$E_{Mean}$	$T_{Mean}$
2	0.888603E00	10	0.00	52.92
3	0.658032E00	7	0.01	66.36
4	0.573145E00	1	0.41	157.06
5	0.529819E00	2	0.08	210.99
6	0.511356E00	1	0.23	299.31
7	0.503727E00	1	0.22	346.22
8	0.506416E00	3	0.14	433.56
9	0.483362E00	1	2.27	569.30
10	0.470209E00	1	1.47	677.63

Tabela 4.4: Feijão discretizado por 1202211 voxels.

A coluna  $T_{Mean}$  apresenta valores elevados quando comparada aos outros resultados obtidos pelo método para os corpos genéricos (Tabelas: 4.2 e 4.3 ). Porém é importante ressaltar que o número de voxels utilizados neste teste, 1202211, é extremamente maior que os outros apresentados anteriormente.

As Figuras 4.28 e 4.29 ilustram a cobertura do Feijão formado por 1202211 voxels por 4 e 5 esferas, respectivamente.

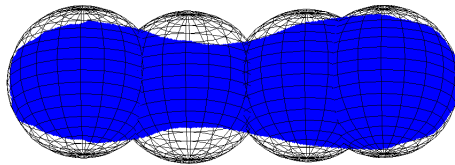


Figura 4.28: Feijão (1202211 voxels) coberto 4 esferas.

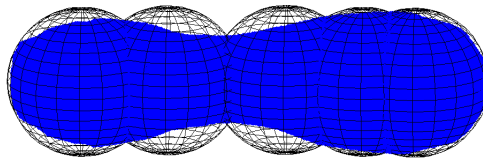


Figura 4.29: Feijão (1202211 voxels) coberto 5 esferas.

# Capítulo 5

## Conclusões

Este trabalho apresenta uma nova abordagem para o problema de recobrimento de corpos por esferas de raios iguais. Foi utilizado para tal fim o método de Suavização Hiperbólica.

Para validar a metodologia utilizada efetuamos um conjunto de testes computacionais. Primeiramente utilizamos como corpo sólido um toro, no qual podemos comparar a solução encontrada pelo algoritmo com a solução calculada analiticamente. Os resultados obtidos pela Suavização Hiperbólica comparados com os resultados analíticos mostram, de forma irretorquível, a robustez e precisão da metodologia proposta.

Foram também realizados testes em corpos não simétricos gerados artificialmente e compostos por um grande número de voxels, nos quais foram obtidos resultados consistentes. Em suma: os resultados computacionais obtidos indicam a boa performance do algoritmo segundo critérios de robustez, consistência e eficiência.

Adicionalmente as figuras geradas a partir das soluções encontradas pelo algoritmo permitem a perfeita visualização da adequação das mesmas uma vez que todos os pontos (voxels) descritores dos corpos estudados estão contidos em pelo menos uma esfera.

É importante ressaltar que o problema  $mim - max - mim$  é um problema de otimização global com um grande número de mínimos locais. Portanto o algoritmo de Suavização Hiperbólica não garante que a solução ótima global seja encontrada. De qualquer forma, a implementação proposta neste trabalho indica ser capaz de produzir soluções consistentes e encontrar mínimos locais profundos.

## 5.1 Trabalhos Futuros

Trabalhos futuros poderiam realizar melhorias adicionais sobre a implementação, tais como, incluir um procedimento de poda visando melhorar o desempenho do algoritmo, oferecendo a mesma propriedade para produzir soluções robustas mas com ganhos substantivos de performance em velocidade, conhecidos como speed-up.

Conjectura-se que, com as devidas modificações, as pesquisas envolvendo os problemas de recobrimento no  $\mathbb{R}^3$  possam ter alguma aplicação futura como instrumento subsidiário para o equacionamento de problemas de radioterapia intrínsecos a equipamentos como *Gamma Knife*.

O problema de localizar pontos de distribuição de rede sem fio em grandes prédios é um outro exemplo que poderia ser estudado aplicando o algoritmo e a técnica apresentada nesta dissertação. O centro das esferas representaria a posição onde os roteadores devem localizar-se.

# Referências Bibliográficas

- [1] CONWAY, J. H., SLOANE, N. J. A., 1999, *Sphere Packings, Lattices and Groups*. 3 ed. New York, Springer-Verlag.
- [2] DE PAULA JUNIOR, J. R., 2010, *Resolução do problema de empacotamento de círculos na superfície de uma esfera utilizando Suavização Hiperbólica*. Tese de M.Sc, Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [3] DO NASCIMENTO, R. Q., DOS SANTOS MACAMBIRA, A. F. U., DOS ANJOS FORMIGA CABRAL, L., et al., 2012, “The discrete ellipsoid covering problem: A discrete geometric programming approach”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 164, pp. 276–285. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X12003964>>.
- [4] ELEKTA, 2013. Disponível em: <[www.elekta.com](http://www.elekta.com)>. Acessado em: 30-09-2013.
- [5] ELEKTA, 2009/2010. “Elekta Annual Report 2009/10”. Disponível em: <[http://www.elekta.com/dms/elekta/elekta-assets/Investors/pdf/Elekta\\_annual\\_report\\_2009\\_2010.pdf](http://www.elekta.com/dms/elekta/elekta-assets/Investors/pdf/Elekta_annual_report_2009_2010.pdf)>. Acessado em: 30-09-2013.
- [6] GALIEV, S. I., 1995, “Computational Algorithms for the Optimum Covering Plane Domains by a Prescribed Number of Ellipses”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 35, n. 5, pp. 609–617.
- [7] GRAHAM, R., LUBACHEVSKY, B., 1995, “Dense packings of equal disks in an equilateral triangle: From 22 to 34 and beyond.” *The Electronic Journal of Combinatorics [electronic only]*, v. 2, pp. 1–1. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/118621>>.
- [8] GRAHAM, R., LUBACHEVSKY, B., NURMELA, K., et al., 1998, “Dense packings of congruent circles in a circle”, *Discrete Mathematics*, v. 181, n. 1–3, pp. 139 – 154. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X97000502>>.

- [9] HALES, T., 1992, “The Sphere Packing Problem”, *Computational Applied Math*, v. 44 (nov.), pp. 41–76.
- [10] JUNIOR, L. G., 2007, *Aprimoramentos na resolução de problemas de empacotamento utilizando Suavização Hiperbólica*. Tese de M.Sc, Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [11] KERSHNER, R., 1939, “The Number of Circles Covering a Set”, *American Journal of Mathematics*, v. 61, n. 3, pp. 665–671.
- [12] LEECH, J., 1956, “The problem of the thirteen spheres”, *Math. Gaz.*, v. 40, pp. 22–23.
- [13] MELISSEN, H., 1994, *Densest packing of six equal circles in a square*. *Elemente der Mathematik*, n.49, pp. 27-31.
- [14] MELISSEN, H., 1994, “Densest packings of eleven congruent circles in a circle”, *Geometriae Dedicata*, v. 50, n. 1, pp. 15–25. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01263647>>.
- [15] NETO, C. M. G., 2012, *Resolvendo problemas de localização de Hubs com alocação múltipla numa modelagem contínua tipo p-mediana através da abordagem de Suavização Hiperbólica*. Tese de M.Sc, Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [16] PARDALOS, P., MARANAS, C., FLOUDAS, C., 1995, “New results in the packing of equal circles in a square”, *Elem. Math.*, , n. 142, pp. 287–293.
- [17] PEIKERT, R., 1994, “Dichteste packungen von gleichen kreisen in einem quadrat”, *Elem. Math.*, , n. 49, pp. 16–26.
- [18] PILLO, G. D., GRIPPO, L., LUCIDI, S., 1993, “A Smooth Method for the Finite Minimax Problem”, *Mathematical Programming*, , n. 60, pp. 187–214.
- [19] PINTO, R. V., 2011, *Um Enfoque Para o Problema de Recobrimento de Sólidos por Esferas de Diâmetros Diferentes*. Tese de M.Sc, Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [20] POLYAK, R. A., 1988, “Smooth Optimization Methods for Minimax Problems”, *SIAM Journal on Control and Optimization*, , n. 26, pp. 1274–1286.
- [21] ROGERS, C. A., 1964, *Packing and Covering*. Cambridge, Cambridge University Press.

- [22] SANTOS, A., 1997, *Problemas de Programação Não- Diferenciável: Uma Metodologia de Suavização*. Tese de M.Sc, Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [23] SCOTT, J., 2012. “HSL Archive”. Disponível em: <<http://www.hsl.rl.ac.uk/archive/>>.
- [24] SOUZA, M., XAVIER, A., LAVOR, C., et al., 2011, “Hyperbolic smoothing and penalty techniques applied to molecular structure determination”, *Operational Research Letters*, v. 36, n. 6, pp. 461–465.
- [25] TAMMES, P. M. L., 1930, *On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollen grains*. Recueil des Travaux Botaniques Néerlandais, 27, 1-84.
- [26] TÓTH, G., 1964, *New Results in the Theory of Packing and Covering*. New York, Pergamon Press.
- [27] WEI, H., MURRAY, A., XIAO, N., 2006, “Solving the continuous space p-centre problem: planning application issues”, *IMA Journal of Management Mathematics*, , n. 17 (abr.), pp. 413–425.
- [28] XAVIER, A. E., 2001, “Hyperbolic Penalty: Method for Nonlinear Programming with Inequalities”, *International Transactions in Operational Research*, v. 8, n. 6 (nov.), pp. 659–672.
- [29] XAVIER, A. E., 1982, *Penalização Hiperbólica: Um Novo Método para Resolução de Problemas de Otimização*. Dissertação de M.Sc., Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [30] XAVIER, A. E., OLIVEIRA, A. A. F., 2005, “Optimum Covering of Plane Domains by Circles Via Hyperbolic Smoothing Method”, *Journal of Global Optimization*, v. 31, n. 3 (mar.), pp. 493–504.
- [31] XAVIER, A., 2010, “The hyperbolic smoothing clustering method”, *Pattern Recognition*, v. 43, n. 3, pp. 731–737.
- [32] XAVIER, A., XAVIER, V., 2011, “Solving the minimum sum-of-squares clustering problem by hyperbolic smoothing and partition into boundary and gravitational regions”, *Pattern Recognition*, v. 44, n. 1, pp. 70–77.