

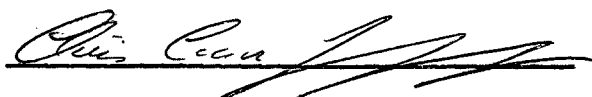
ESTUDO DE ALGUNS PROBLEMAS DE TRANSPORTE

EM REDES COM FLUXO DINÂMICO

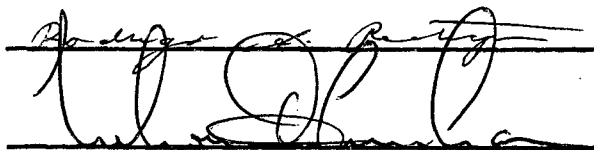
Ronaldo Cesar Marinho Persiano

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M. Sc.)

Aprovada por:



Presidente



RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

ABRIL DE 1971

Quero exprimir meu reconhecimento ao Prof. Pravin Varaya por seu incentivo e orientação inicial a êste trabalho, que foi elaborado sob sua inspiração.

Devo ao Clóvis a orientação constante e indispensável e a leitura criteriosa do manuscrito, trabalho que não respeitou fins-de-semana ou feriados.

A Celia devo, mais que o trabalho de datilografia, a amizade e dedicação durante a realização dêste estudo.

RESUMO

Definimos problemas dinâmicos de transporte como problemas de transporte em rêsdes com fluxo dinâmico. O modelo de rêsdes com fluxo dinâmico formulado neste trabalho trata de rêsdes que admitem em cada ramo, um fluxo entrante e um fluxo saliente não necessariamente iguais. Uma equação diferencial relaciona a diferença entre os fluxos entrante e saliente de um ramo, a um "acúmulo de material" no ramo.

Com êste tratamento, podemos estudar as rêsdes como sistemas dinâmicos cujos contrôles são dados pelos fluxos. Resultados de dualidade permitem-nos encontrar soluções para os problemas de contrôle ótimo resultantes com descentralização dos contrôles.

ABSTRACT

Dynamic transportation problems are defined as transportation problems in graphs with dynamic flow. The dynamic flow graph model presented in this work represents networks such that each branch admits as incoming flow and an outgoing flow, these flows not being necessarily equal. A differential equation relates the difference between incoming and outgoing flows to an "accumulation of material" in the branch.

This approach allows the study of graphs as dynamic systems the controls of which are given by the flows. Duality results lead to decentralized control solution for the optimal control problems formulated by the treatment above.

SUMÁRIO

<u>CAP. I</u>	Introdução	1
<u>CAP. II</u>	O problema estático de transporte	
SECÇÃO 1	- Principais conceitos e resultados da teoria de rêsdes com fluxo	7
SECÇÃO 2	- Formulação do problema estático de transporte	15
SECÇÃO 3	- Simulação analógica do (PT)	22
<u>CAP. III</u>	Rêsdes dinâmicas e problemas dinâmicos de transporte	
SECÇÃO 1	- Introdução	27
SECÇÃO 2	- Modelo de rêsdes com fluxo dinâmico	29
SECÇÃO 3	- Problemas dinâmicos de transporte	33
SECÇÃO 4	- Solução do primeiro problema dinâmico de transporte	47
SECÇÃO 5	- Conclusão	49

<u>CAP. IV</u>	Dualidade em problemas estáticos de transporte	
SECÇÃO 1 - Introdução	53
SECÇÃO 2 - Dualidade em problemas estáticos de transporte	55
SECÇÃO 3 - Conclusão	69
<u>CAP. V</u>	Solução do (PDT2) e (PDT3)	
SECÇÃO 1 - Introdução	71
SECÇÃO 2 - Solução de (PDT3)	72
SECÇÃO 3 - Solução de (PDT2)	82
SECÇÃO 4 - Conclusão	103
<u>CAP. VI</u>	Problemas dinâmicos de transporte e custos lineares	105
<u>CAP. VII</u>	Conclusão	111
<u>APÊNDICE A</u>	Dualidade em problemas convexos	113
<u>APÊNDICE B</u>	Um teorema de estabilidade para sistemas dinâmicos	124
<u>APÊNDICE C</u>	Um teorema de otimalidade para problemas de transporte com custo linear	126
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	128

C A P Í T U L O I

INTRODUÇÃO

Dentre os problemas em rêdes com fluxo, o problema de transporte é o que tem merecido maior destaque na literatura. Nêste problema de otimização, a função critério é a soma de funções custo, cada uma delas definida no intervalo de restrição do fluxo de um ramo da rêde. O problema de transporte resume-se em encontrar um fluxo, satisfazendo as restrições de cada ramo da rêde e minimizando a função critério. Êste problema engloba a maior parte dos problemas de otimização em rêdes com fluxo.

O problema de transporte em rêdes tem sido bastante estudado na literatura sob diversas formas. Ford [3] faz um estudo para êsse problema com função custo linear; apresenta um algoritmo para a resolução do problema, assumindo que o vetor custo possui componentes inteiras. Berge [1] estuda o problema de transporte, supondo as funções custo con

vexas; apresenta um teorema de otimalidade para êsse problema, que será bastante importante em nosso trabalho. Em Berge [1], Berge [10] e Wagner [9] são também estudados problemas particulares sob diversos nomes. Todos êles podem ser formulados a partir do problema de transporte com funções custo convexas, que será estudado no capítulo II, juntamente com uma rápida revisão de rêdes com fluxo.

O modelo de rêdes com fluxo é inadequado ao tratamento de alguns problemas. Estudaremos um modelo de rêdes no qual o fluxo entrante em um ramo pode ser diferente do fluxo saliente do ramo, mantendo, porém, a conservação do fluxo nos nós. A fluxos dêste tipo denominaremos fluxos dinâmicos. A diferença não nula entre os fluxos entrante e saliente de um dado ramo provocará um "acúmulo de material" no ramo, que está relacionado aos fluxos por uma equação diferencial. Êstes elementos caracterizam a rêde dinâmica.

Os problemas dinâmicos de transporte são problemas de transporte em rêdes dinâmicas. Esta classe de problemas nos permitirá fazer um estudo de descentralização de decisões de problemas clássicos de transporte. O problema clássico pode ser encarado como um problema de decisão centralizada, onde um único centro controla tôdas as variáveis e tem acesso a todos os parâmetros envolvidos. Os problemas dinâmicos de transporte, por envolverem fluxos dinâmicos, permitem-nos estudar uma par-

ticular descentralização do controle de decisões.

A descentralização do controle é realizada criando-se tantos centros de decisão quantos forem os nós da rede. Cada centro terá controle sobre os "fluxos emergentes e imergentes ao seu nó". Cada ramo da rede terá um fluxo entrante e um fluxo saliente, não necessariamente iguais, cada um deles controlado por um centro diferente.

Além da descentralização do controle, haverá uma descentralização da informação dos parâmetros envolvidos. Cada centro terá um conjunto de informações que conterà todos os parâmetros ou parte deles. Estudaremos três problemas dinâmicos que diferirão somente quanto aos conjuntos de informação dos centros. Nos dois últimos, a informação restringir-se-á aos parâmetros locais, i. é, dos ramos adjacentes ao nó do centro de decisão.

O objetivo do controle descentralizado será o mesmo do controle central: estabelecer, na rede, um fluxo que minimize a função custo. Nos problemas dinâmicos de transporte, o fluxo dinâmico deve tender, com o tempo, a um fluxo ótimo para a rede. Contudo, em nenhum instante de tempo, o controle descentralizado deve permitir que o "acúmulo de material" em cada ramo ultrapasse certo limite, ou que o fluxo viole as suas restrições de viabilidade. O modelo de redes com fluxo dinâmico e os enunciados dos problemas dinâmicos ocupa-

rão o capítulo III do trabalho.

A resolução dos dois últimos problemas dinâmicos será baseada em resultados de dualidade do problema de transporte com custo convexo. O estudo de dualidade é feito no capítulo IV e a resolução dos problemas é apresentada no capítulo V.

Para a resolução dos dois últimos problemas dinâmicos é feita a hipótese de que as funções custo são estritamente convexas. O capítulo VI ocupa-se de mostrar como problemas com custo linear poderão ser tratados, apesar da hipótese de convexidade estrita citada acima. Contorna-se a dificuldade, construindo-se uma função custo estritamente convexa que forneça, como solução do problema de transporte, uma solução do problema linear.

No último capítulo, concluiremos que o problema de transporte pode ser tratado com decisão descentralizada, nos moldes enunciados no trabalho. Apresentam-se aplicações do modelo e sugestões para pesquisas futuras em problemas dinâmicos de transporte.

Apresentamos, agora, algumas observações sobre a notação adotada.

Notação

Os conjuntos de reais e naturais (incluindo o 0)

serão denotados por \mathbb{R} e \mathbb{N} , respectivamente. Um vetor de \mathbb{R}^m será uma matriz coluna, $m \times 1$, de elementos reais. Se x é um vetor de \mathbb{R}^m , a i -ésima componente do vetor x é representada por x_i . Dados dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^m$, o produto escalar será denotado por:

$$x'y \triangleq \sum_{i=1}^m x_i y_i$$

Se M é uma matriz, M' é a transposta de M .

Dada uma matriz M , representaremos por M_{ji} o elemento da j -ésima linha e i -ésima coluna de M . Denotaremos por M_j a matriz linha formada pela j -ésima linha de M .

1 Se M é uma matriz $n \times m$, formada por elementos iguais a 0, 1 ou -1, denotaremos por M^+ e M^- as matrizes $n \times m$, definidas por:

$$2 \quad M_{ji}^+ = \begin{cases} 0 & \text{se } M_{ji} \neq 1 \\ 1 & \text{se } M_{ji} = 1 \end{cases}$$

$$3 \quad M_{ji}^- = \begin{cases} 0 & \text{se } M_{ji} \neq -1 \\ 1 & \text{se } M_{ji} = -1 \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

Dados dois vetores $b, d \in \mathbb{R}^m$ dizemos que $b \leq d$

se e só se

$$b_i \leq d_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

e dizemos que $b < d$ se e só se

$$b_i < d_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Se $b, d \in \mathbb{R}^m$ denotaremos por $[b, d]$ e (b, d) os conjuntos:

$$4 \quad [b, d] = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid b \leq x \leq d \right\}$$

$$5 \quad (b, d) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid b < x < d \right\}$$

Acrescentamos algumas notas quanto às referências. Os capítulos são numerados através de algarismos romanos; expressões e parágrafos, através de algarismos arábicos. No texto, um algarismo arábico entre parêntesis (por ex. (6)) indica a referência de uma expressão no mesmo capítulo. Referências a expressões em outros capítulos é feita através da numeração do capítulo, seguida da numeração da expressão (por ex. (I-1)). Referências bibliográficas são apresentadas entre chaves (por ex. Berge [1]).

C A P Í T U L O I I

O PROBLEMA ESTÁTICO DE TRANSPORTE.Introdução.

Iniciaremos êste capítulo com uma rápida revisão dos conceitos básicos de rêdes com fluxos e tensões. O enunciado do problema estático de transporte ocupa a secção 2, onde também é apresentado um teorema de otimalidade para êste tipo de problema. A última secção descreve as bases para uma simulação analógica do problema estático de transporte.

Os resultados dêste capítulo baseiam-se no trabalho de Berge [1] , onde as rêdes com fluxo e o problema estático de transporte são estudados de forma mais completa.

SECÇÃO 1 - PRINCIPAIS CONCEITOS E RESULTADOS DA TEORIA DE RÊDES COM FLUXOS.

Iniciamos esta secção com a definição de rêde a ser utilizada em nosso trabalho.

1 Definição: Uma rêde é um par ordenado (N, A) onde N é um conjunto finito e $A \subset N \times N$ um conjunto tal que

$$(\forall \gamma \in N) \quad (\gamma, \gamma) \notin A$$

Os elementos do conjunto N são os nós da rêde e os elementos de A , os ramos da rêde. Consideramos, portanto, rêdes com ramos orientados: se $(\gamma_1, \gamma_2) \in A$ e $(\gamma_2, \gamma_1) \in A$ então (γ_1, γ_2) e (γ_2, γ_1) são ramos distintos da rêde (N, A) .

Dado um ramo $\alpha = (\gamma_1, \gamma_2) \in A$ da rêde (N, A) , o nó γ_1 é dito extremidade inicial do ramo α e o nó γ_2 extremidade terminal de α .

Dada a rêde (N, A) chamaremos de ramo emergente do nó $\gamma \in N$ a todo ramo com extremidade inicial γ ; enquanto, ramo imergente ao nó $\gamma \in N$ será todo ramo com extremidade terminal γ . Dado $\gamma \in N$, denotaremos por $\omega^+(\gamma)$ o conjunto dos ramos emergentes de γ e por $\omega^-(\gamma)$ o conjunto dos ramos imergentes a γ . Assim, os conjuntos $\omega^+(\gamma)$ e $\omega^-(\gamma)$ podem ser descritos por:

$$2 \quad \omega^+(\gamma) = \left\{ \alpha \in A \mid \alpha = (\gamma, \delta), \delta \in N \right\}$$

$$3 \quad \omega^-(\gamma) = \left\{ \alpha \in A \mid \alpha = (\delta, \gamma), \delta \in N \right\}$$

Se $\gamma \in N$ denotamos: $\omega(\gamma) = \omega^+(\gamma) \cup \omega^-(\gamma)$

Em geral, dado um subconjunto P de N denotamos:

$$4 \quad \omega^+(P) = \{ (\gamma_1, \gamma_2) \in A \mid \gamma_1 \in P \text{ e } \gamma_2 \notin P \}$$

$$5 \quad \omega^-(P) = \{ (\gamma_1, \gamma_2) \in A \mid \gamma_1 \notin P \text{ e } \gamma_2 \in P \}$$

$$6 \quad \omega(P) = \omega^+(P) \cup \omega^-(P)$$

Dois nós $\gamma, \delta \in N$ são nós adjacentes, se

$\omega(\gamma) \cap \omega(\delta) \neq \emptyset$; $\alpha, \beta \in A$ são ramos adjacentes se existe $\gamma \in N$ tal que $\alpha \in \omega(\gamma)$ e $\beta \in \omega(\gamma)$. O nó $\gamma \in N$ e o ramo $\alpha \in A$ são adjacentes se $\alpha \in \omega(\gamma)$.

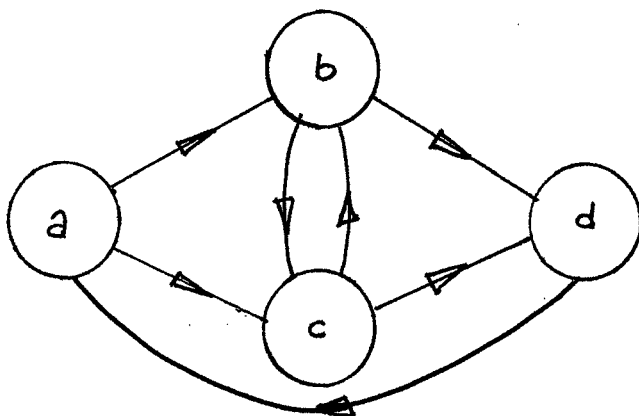
Uma representação gráfica de uma rede pode ser obtida simbolizando-se os nós por círculos e os ramos por segmentos orientados, unindo os nós aos quais são adjacentes.

Exemplo: A rede (N, A) onde

$$N = \{ a, b, c, d \}$$

$$A = \{ (a, b), (a, c), (b, c), (c, b), (b, d), (c, d), (d, a) \}$$

pode ser representada pela figura:



Nêste exemplo, obtemos:

$$\omega^+(b) = \{ (b,c), (b,d) \}$$

$$\omega^-(b) = \{ (a,b), (c,b) \}$$

Matriz de incidência.

De agora em diante, consideraremos uma rêde (N,A) com n nós e m ramos, e denotaremos:

$$7 \quad N = \{ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \}$$

$$8 \quad A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \}$$

Nêsse caso, a cada $\gamma_j \in N$ podemos associar um vetor $\omega \in \mathbb{R}^m$ da seguinte maneira:

$$9 \quad \omega_i = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_i \in \omega^+(\gamma_j) \\ -1 & \text{se } \alpha_i \in \omega^-(\gamma_j) \\ 0 & \text{se } \alpha_i \notin \omega(\gamma_j) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Com a associação definida por (9), passaremos a identificar os conjuntos $\omega(\gamma_j)$, $\gamma_j \in N$, com vetores de \mathbb{R}^m , utilizando, por vezes, a mesma letra para representar, seja o vetor, seja o conjunto.

Observando-se (9) verifica-se que a topologia da rede (N,A) (relações de adjacências entre nós e ramos) fica determinada pelos vetores $\omega(\gamma_j) \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, 2, \dots, n$. A topologia de (N,A) pode ser expressa, também, por uma matriz M , $n \times m$, definida por

$$10 \quad M_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_i \in \omega^+(\gamma_j) \\ -1 & \text{se } \alpha_i \in \omega^-(\gamma_j) \\ 0 & \text{se } \alpha_i \notin \omega(\gamma_j) \end{cases}$$

A matriz M é designada matriz de incidência da rede (N,A) .

Comparando-se (9) e (10) vemos que a j -ésima linha da matriz M e o vetor $\omega(\gamma_j) \in \mathbb{R}^m$ são iguais, ou seja:

$$11 \quad M_j^i = \omega(\gamma_j)$$

A partir de M podemos determinar as matrizes M^+ e M^- designadas, respectivamente, matriz de emergências e matriz de imergências de (N,A) . As matrizes M , M^+ e M^- estão relacionadas por:

$$12 \quad M = M^+ - M^-$$

(ver notação em (I-1)).

Cadeias e Ciclos.

Consideremos dois nós $\gamma, \delta \in N$.

- 13 Definição: Uma família $(\beta_i)_{i=1,2,\dots,k}$, $k \in \mathbb{N}$, de ramos de A , é uma cadeia de γ a δ se e só se existir uma família $(\delta_i)_{i=1,2,\dots,k+1}$, de nós de N , tal que:

- a) $\delta_1 = \gamma$ e $\delta_{k+1} = \delta$
 b) β_i é adjacente a δ_i e δ_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, k$.

Na definição (13) os nós γ e δ são chamados extremidade inicial e extremidade terminal da cadeia, respectivamente. Uma rêde (N, A) é dita conexa se para cada par de nós $\gamma, \delta \in N$ existir uma cadeia de γ a δ . Em nosso trabalho, consideraremos somente rêdes conexas.

- 14 Definição: Um ciclo da rêde (N, A) é uma cadeia com extremidades inicial e terminal coincidentes, formada por ramos distintos de A .

- 15 Considerando-se a definição (14), vê-se que dado um ciclo $\mathcal{C} = (\beta_i)_{i=1,2,\dots,k}$ da rêde (N, A) temos que existe uma família $(\delta_i)_{i=1,2,\dots,k}$ de nós de N , tal que:

- a) $\beta_1 \in W(\delta_k)$ e $\beta_k \in W(\delta_1)$
 b) $\beta_i, \beta_{i+1} \in W(\delta_i)$ $i = 1, 2, \dots, k-1$

O conjunto $\{d_i \mid i=1, 2, \dots, k\}$ é o conjunto de todos os nós da rede (N, A) , pelos quais o ciclo \mathcal{C} passa, i.é, dos nós adjacentes a algum ramo do ciclo \mathcal{C} . Nesse caso, dizemos que um ramo $\beta_i \in \mathcal{B}$ é positivamente orientado se $\beta_i \in \omega^+(d_i)$ isto é, se β_i é emergente de d_i ; o ramo $\beta_i \in \mathcal{B}$ é negativamente orientado se $\beta_i \in \omega^-(d_i)$

16 Seja \mathcal{B}^+ o conjunto dos ramos positivamente orientados de \mathcal{B} , e \mathcal{B}^- o conjunto dos ramos negativamente orientados de \mathcal{B} . Consideremos o vetor $\mu \in \mathbb{R}^m$ definido por:

$$17 \quad \mu_i = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_i \in \mathcal{B}^+ \\ -1 & \text{se } \alpha_i \in \mathcal{B}^- \\ 0 & \text{se } \alpha_i \notin \mathcal{B} \end{cases}$$

Então, o ciclo \mathcal{C} fica bem definido pelo vetor $\mu \in \mathbb{R}^m$ definido em (17). Em vista disso, passaremos a identificar um ciclo com um vetor de \mathbb{R}^m ; essa identificação será realizada segundo (17) e, em geral, usando-se a mesma letra, μ , para designar seja a família, seja o vetor ciclo.

Fluxos e Tensões.

18 Definição: Um vetor $\varphi \in \mathbb{R}^m$ é um fluxo de (N, A) se e só se

$$19 \quad M \varphi = 0$$

onde M é a matriz de incidência de (N, A) . O real φ_i é dito fluxo do ramo $\alpha_i \in A$.

Da definição (10) da matriz de incidência M e de (19), podemos concluir que

$$20 \quad \sum_{\alpha_i \in \omega^+(\gamma_j)} \varphi_i = \sum_{\alpha_k \in \omega^-(\gamma_j)} \varphi_k \quad j=1, 2, \dots, n$$

A equação (20) exprime que, para cada nó $\gamma_j \in N$, a soma dos fluxos dos ramos emergentes de γ_j é igual à soma dos fluxos nos ramos imergentes a γ_j . A equação (20) é a equação de conservação do fluxo φ no nó γ_j .

21 Definição: Um vetor $\theta \in \mathbb{R}^m$ é uma tensão de (N, A) se e só se

$$22 \quad \theta = -M'p$$

para algum $p \in \mathbb{R}^n$. O real θ_i é dito tensão do ramo $\alpha_i \in A$.

Se $\theta \in \mathbb{R}^m$ e $p \in \mathbb{R}^n$ satisfazem (22), o vetor p é dito vetor potencial. Em particular, o real p_j é dito potencial do nó $\gamma_j \in N$.

Da definição de matriz de incidência e de (22), pode-se verificar que se θ e p satisfazem (22) e

$\alpha_i = (j, k) \in A$ então:

$$23 \quad \theta_i = p_k - p_j$$

A tensão θ_i do ramo α_i é a diferença dos potenciais dos nós adjacentes ao ramo α_i .

Uma relação importante entre fluxos e tensões é obtida de (19) e (22). Se $\varphi \in \mathbb{R}^m$ é um fluxo e $\theta \in \mathbb{R}^m$ uma tensão, então,

$$24 \quad \theta' \varphi = - p' M \varphi = 0$$

SECÇÃO 2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA ESTÁTICO DE TRANSPORTE.

Existe uma grande quantidade de problemas de otimização em rêdes com fluxo, definidos na literatura técnica. Basicamente, êsses problemas de otimização resumem-se em encontrar um fluxo para uma dada rêde, que satisfaça certas restrições especificadas e que minimize o valor de uma função critério.

As restrições impostas aos fluxos viáveis são intervalos de viabilidade para o valor do fluxo nos diversos ramos da rêde. A função critério é do tipo separável, ou seja, é uma soma de funções reais, de variável real, cada uma delas definida no intervalo de viabilidade do fluxo de

um certo ramo.

Os diversos problemas de otimização, em rêdes, diferenciam-se pela estrutura particular da rêde, ou pela estrutura particular das restrições do fluxo, ou pela função critério usada. Resultam dessas estruturas particulares, problemas como: problema de "Hitchcock", problema de "assignment", de "transshipment", de "warehousing", de fluxo máximo, etc. (ver [3], [9], [10]).

Contudo, todos êsses problemas podem ser formulados de uma maneira única pelo problema de fluxo de custo mínimo, que designaremos aqui, de uma forma geral, por problema de transporte. Não nos ocuparemos de mostrar a inclusão daqueles problemas particulares nessa classe mais geral de problemas de transporte. Essa evidência pode ser esclarecida através de Ford [3], capítulo 3, ou mais generalizada em Berge [1], capítulo 4, segunda parte. Formulemos, agora, o problema estático de transporte.

25 Consideremos a rêde (N,A) , conexa, com n nós e m ramos, definida em (7) e (8), e caracterizada pela matriz de incidência M . Sejam $b, d \in \mathbb{R}^m$ vetores, satisfazendo

$$0 \leq b \leq d.$$

Sejam f_i , $i = 1, 2, \dots, m$, funções convexas definidas em $[b_i, d_i]$, $i = 1, 2, \dots, m$, respectivamente, e com valores reais.

O problema clássico de transporte é o seguinte:

26. (PT) Encontrar, se existir, um vetor $\bar{\varphi} \in \Phi(b, d)$ tal que

$$27 \quad \sum_{i=1}^m f_i(\bar{\varphi}_i) = \text{Min}_{\varphi \in \Phi(b, d)} \sum_{i=1}^m f_i(\varphi_i)$$

onde

$$28 \quad \Phi(b, d) = \left\{ \varphi \in \mathbb{R}^m \mid M\varphi = 0, \varphi \in [b, d] \right\}$$

O (PT) consiste em um problema convexo. As funções f_i são ditas funções custo e o conjunto $[b, d]$, intervalo de viabilidade do fluxo. Um fluxo $\varphi \in \mathbb{R}^m$ é dito viável para o (PT) se e só se $\varphi \in \Phi(b, d)$. O (PT) resume-se em encontrar um fluxo viável para (N, A) com custo total mínimo.

Como o (PT) é um problema convexo, o seu conjunto de soluções é convexo; se as funções custo f_i são estritamente convexas, a solução de (PT), se existir, é única.

O teorema que se segue, devido a Hoffman, [11], fornece condições necessárias e suficientes para a existência de um fluxo viável para o (PT).

29. Teorema: Dados $b, d \in \mathbb{R}^m$, $0 \leq b \leq d$, o conjunto $\Phi(b, d)$, definido em (28), é não vazio se e só se para todo conjunto $P \subset N$ tivermos:

$$30 \quad \sum_{\alpha_i \in \omega^+(P)} d_i \geq \sum_{\alpha_k \in \omega^-(P)} b_k$$

e

$$31 \quad \sum_{\alpha_i \in \omega^-(P)} d_i \geq \sum_{\alpha_k \in \omega^+(P)} b_k$$

onde $\omega(P)$ foi definido em (4) - (6).

Prova: Ver Berge [1], pág. 159.

A interpretação do teorema é imediata. Dado $P \in N$, $\omega(P)$ é o conjunto dos ramos unindo P a $N - P$. A inequação (30) exprime que "a máxima quantidade de fluxo que pode sair de P é maior ou igual à mínima quantidade de fluxo que pode entrar em P ". A inequação (31) tem o mesmo significado se substituirmos P por $N - P$.

Um corolário imediato do teorema (29) é o seguinte:

32 Corolário: Dados $b, d \in \mathbb{R}^m$ tais que $0 \leq b \leq d$, se $\Phi(b, d)$ é não vazio, então:

$$33 \quad \sum_{\alpha_i \in \omega^+(\gamma_j)} d_i \geq \sum_{\alpha_k \in \omega^-(\gamma_j)} b_k \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$34 \quad \sum_{\alpha_i \in \omega^-(\gamma_j)} d_i \geq \sum_{\alpha_k \in \omega^+(\gamma_j)} b_k \quad j=1, 2, \dots, n$$

Prova: Basta fazer, no teorema (29), $P = \{Y_j\}$, $j = 1, 2, \dots, n$

Teorema de Otimalidade para (PT).

Como o (PT), enunciado em (26), é um problema convexo, muitas condições de otimalidade poderiam ser utilizadas para o seu conjunto de soluções. Contudo, devido à estrutura particular do conjunto de pontos viáveis de (PT) e da própria separabilidade da sua função objetivo, condições bastante simples podem ser encontradas.

Desenvolveremos aqui, uma condição de otimalidade apresentada em Berge [1], de uma maneira particular (para o (PT)); e em Rockafellar [8], para problemas convexos em geral. Essa condição nos permitirá estabelecer as soluções para os problemas dinâmicos de transporte.

Para a formulação do teorema de otimalidade para o (PT), usaremos as subdiferenciais ∂f_i , $i = 1, 2, \dots, m$, das funções custo (ver apêndice A, pág. A-2). Se $\bar{x}_i \in [b_i, d_i]$ e $\bar{w}_i \in \partial f_i(\bar{x}_i)$ então, por definição de ∂f_i , obtemos:

$$35 \quad (\forall x_i \in [b_i, d_i]) \quad f_i(x_i) \geq f_i(\bar{x}_i) + \bar{w}_i(x_i - \bar{x}_i)$$

O teorema que segue fornece uma caracterização para as subdiferenciais das funções custo de (PT) em um fluxo ótimo. No teorema assumimos que o (PT) é estável (ver apêndice A, pág. A-6)

36 Teorema: Suponhamos que o (PT) é estável. Um fluxo $\bar{\varphi} \in \Phi(b, d)$ é uma solução de (PT) se e só se existir uma tensão $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^m$ satisfazendo:

$$37 \quad \bar{\theta}_i \in \partial f_i(\bar{\varphi}_i) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Prova: Suponhamos que $\bar{\varphi} \in \Phi(b, d)$ e $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^m$ é uma tensão de (N, A) tal que

$$\bar{\theta}_i \in \partial f_i(\bar{\varphi}_i) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Então de (35) resulta: $(i = 1, 2, \dots, m)$

$$38 \quad (\forall \varphi_i \in [b_i, d_i]) \quad f_i(\varphi_i) \geq f_i(\bar{\varphi}_i) + \bar{\theta}_i(\varphi_i - \bar{\varphi}_i)$$

Somando membro a membro as inequações (38) obtemos:

$$39 \quad (\forall \varphi \in [b, d]) \quad \sum_{i=1}^m f_i(\varphi_i) \geq \sum_{i=1}^m f_i(\bar{\varphi}_i) + \bar{\theta}'(\varphi - \bar{\varphi})$$

Em particular, se $\varphi \in \Phi(b, d)$ a expressão (39) assume a forma:

$$\sum_{i=1}^m f_i(\varphi_i) \geq \sum_{i=1}^m f_i(\bar{\varphi}_i) + \bar{\theta}'(\varphi - \bar{\varphi}) = \sum_{i=1}^m f_i(\bar{\varphi}_i)$$

pois, como $\bar{\theta}$ é uma tensão e φ e $\bar{\varphi}$ são fluxos, temos, devida (24):

$$\bar{\theta}'(\varphi - \bar{\varphi}) = 0$$

Logo, $\bar{\varphi}$ é solução de (PT).

Suponhamos, agora, que $\bar{\varphi} \in \Phi(b, d)$ é solução de (PT). Como (PT) é, por hipótese, estável, resulta do teorema de dualidade de Geoffrion [2] (ver apêndice A, pág. A-7) que existe

um multiplicador ótimo $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ para (PT). Logo, por definição de multiplicador ótimo, obtemos:

$$(\forall \varphi \in [b, d])$$

$$40 \quad \sum_{i=1}^m f_i(\varphi_i) + \bar{p}' M \varphi \geq \sum_{i=1}^m f_i(\bar{\varphi}_i) + \bar{p}' M \bar{\varphi}$$

ou seja,

$$(\forall \varphi \in [b, d])$$

$$41 \quad \sum_{i=1}^m f_i(\varphi_i) \geq \sum_{i=1}^m f_i(\bar{\varphi}_i) - \bar{p}' M (\varphi - \bar{\varphi})$$

De (41), podemos concluir que $\bar{\theta} \triangleq -M'\bar{p}$ é subgradiente em $\bar{\varphi}$ de $\sum_{i=1}^m f_i(\cdot)$ e por isso satisfaz (ver apêndice A, pág.)::

$$42 \quad \bar{\theta}_i \in \partial f_i(\bar{\varphi}_i)$$

Como $\bar{\theta} = -M'\bar{p}$ é uma tensão de (N, A) (ver (21)) e satisfaz (42), a prova está concluída. \triangleleft

Como todos os vínculos do (PT) são lineares, a subdiferenciabilidade de todas as funções custo implica em estabilidade do (PT) (ver apêndice A, teorema (A-25)). A condição de subdiferenciabilidade das funções custo será utilizada em todo o restante do trabalho.

Ressaltamos que a condição de estabilidade do (PT), além de suficiente, é necessária à validade do teorema (36). Esta evidência fica clara através do seguinte contra-exem-

plo: suponhamos que o (PT) não é estável mas tenha solução; então, como os vínculos de (PT) são lineares, alguma função custo é não subdiferenciável no ponto de solução de (PT) e, portanto, não existe uma tensão que satisfaça as condições do teorema.

Apesar disso, Berge [1] apresenta o teorema (36) sem impor a estabilidade de (PT) ou qualquer outra condição suficiente para estabilidade. De fato, qualquer condição de qualificação de vínculos de (PT) implica em estabilidade. Rockafellar [8], em sua formulação mais geral do teorema, utiliza uma condição de qualificação semelhante à de Slater generalizada (ver pág. 336).

Baseado na condição do teorema (36), Berge [1] apresenta um algoritmo para a resolução do (PT) no caso de funções custo convexas seccionalmente lineares (pág. 211).

Além do algoritmo, Berge [1] sugere uma simulação analógica do problema estático de transporte. O estudo desta simulação é apresentado na próxima secção.

SECÇÃO 3 - SIMULAÇÃO ANALÓGICA DO (PT)

Dado um problema estático de transporte, podemos

construir um circuito elétrico resistivo conveniente que nos permita resolver o (PT). Se o vetor corrente solução do circuito elétrico fôr um vetor fluxo solução do (PT), dizemos que o circuito é uma simulação analógica do (PT).

A base da simulação analógica do (PT) é o critério de otimalidade do teorema (36). A simulação terá sentido somente se as hipóteses abaixo fôrem verificadas.

Hipóteses: As funções custo são estritamente convexas e o (PT) admite uma solução.

Se as funções custo f_i são estritamente convexas, então as subdiferenciais ∂f_i admitem uma função inversa h_i (ver apêndice A, pág. A-3). As funções h_i são funções bijetoras de \mathbb{R} em $[b_i, d_i]$, crescentes, e contínuas em \mathbb{R} .

44 Dada a função f_i , estritamente convexa, consideremos um dispositivo elétrico C_i , resistivo, controlado por tensão, que a cada diferença de potencial V_i entre suas extremidades define uma corrente I_i , no sentido positivo, dada por:

$$45 \quad I_i = h_i(V_i)$$

Cada dispositivo C_i é unívocamente determinado pela função f_i .

Construamos com os dispositivos C_i , $i = 1, 2, \dots, m$, um circuito elétrico \mathcal{C} , tendo a mesma topologia de (N, A) , da

seguinte forma:

1) o circuito elétrico terá n nós

$$N_1, N_2, \dots, N_n.$$

2) se $\alpha_i = (\gamma_j, \gamma_k) \in A$ então no circuito elétrico \mathcal{C} , o elemento C_i é ligado entre N_j e N_k sendo o sentido positivo da corrente de N_j a N_k .

O circuito elétrico \mathcal{C} assim construído é uma simulação analógica do (PT). De fato, as diferenças de potencial entre os nós de \mathcal{C} satisfazem as condições da definição de tensão em redes (lei das malhas de circuitos elétricos). As correntes nos elementos de \mathcal{C} satisfazem às condições da definição de fluxo em redes (lei dos nós de circuitos elétricos). Resta-nos provar que o fluxo de (N, A) , com as componentes numericamente iguais às do vetor corrente de \mathcal{C} , é um fluxo ótimo de (PT).

É evidente que a corrente $I \in \mathbb{R}^m$ do circuito é um fluxo viável para o (PT), pois devido a (45), e à definição das funções h_i , temos:

$$I \in [b, d]$$

O vetor $V \in \mathbb{R}^m$, de diferenças de potencial do circuito, é uma tensão da rede (N, A) . Mas, de (45) concluímos que a tensão V e o fluxo viável I satisfazem:

