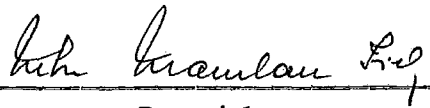


UM MODELO DINÂMICO DE OTIMIZAÇÃO DA
LOCALIZAÇÃO DE ESTAÇÕES TELEFÔNICAS

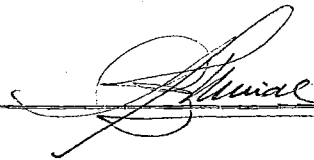
Patricia de Souza Ronchetti

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:



Presidente



RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 1981

RONCHETTI, PATRICIA DE SOUZA

Um Modelo Dinâmico de Otimização da Localização de Estações Telefônicas [Rio de Janeiro] 1981.

VIII, 57p. 29,7cm (COPPE-UFRJ, M.Sc. Engenharia de Sistemas, 1981)

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro, Fac. Engenharia

1. Otimização I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a cooperação dos técnicos da Divisão de Planos e Modelos do Departamento de Planejamento Empresarial da TELERJ, em particular dos engenheiros Ramiro de Araújo Almeida Sobrinho e Orlando Carlos Gómez de Souza, cujo apoio e incentivo foram de valor inestimável no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço também a Marcia Brito Magnan pela colaboração na confecção gráfica deste trabalho.

RESUMO

Um dos problemas associados à expansão de um sistema telefônico, em uma área bem definida, para um dado horizonte de planejamento, consiste em determinar, a cada etapa de planejamento, o número de estações a serem acrescentadas ao sistema, suas localizações, suas interligações bem como o esquema de filiação de assinantes a todas as estações sendo consideradas. O modelo matemático construído resultou em um problema de programação não linear com variáveis inteiras, para o qual não se aplica nenhum algoritmo clássico de otimização. Adotou-se um método iterativo de solução, baseado na decomposição do problema principal em três subproblemas: localização temporal das estações, localização espacial das estações e definição da área de influência das estações. O primeiro subproblema, resolvido por técnicas de programação linear inteira ("branch-and-bound") determina se e quando as novas estações entram em funcionamento e fornece uma solução inicial para a questão de filiação dos assinantes. Os outros dois, que participam do processo iterativo, são resolvidos por algoritmos desenvolvidos especialmente para o caso particular aqui tratado. Discute-se o critério de parada do processo iterativo e descreve-se uma aplicação com dados reais.

ABSTRACT

Inherent to the planned evolution of a multi-exchange telephone network is the problem of defining the number and location of new exchanges, the corresponding junction network and the assignment of subscribers to exchanges, for each stage in a given planning horizon. A Mixed-Integer Nonlinear Programming model associated to the overall problem is presented. An iterative solution procedure is proposed - as no available algorithm can be directly used - in which the problem is subdivided into three subproblems: that of defining the number of new exchanges at each stage, that of choosing their locations and, finally, that of assigning customers to exchanges. Being essentially a Mixed-Integer Linear Programming problem, the first one can be solved by a standard "branch-and-bound" method. The remaining subproblems are solved iteratively by computational routines specially developed. Convergence is discussed and computational experience presented.

ÍNDICE DE CAPÍTULOS

"Um Modelo Dinâmico de Otimização da Localização de Estações Telefônicas"

	Pg..
I - Introdução -----	1
II - Conceitos Básicos -----	3
II.1 - Partições da Área em Estudo	
II.1.1 - Quadriculado de Referência	
II.1.2 - Zonas de Terrenos	
II.1.3 - Zonas de Tráfego	
II.1.4 - Zonas de Rede	
II.2 - Distâncias	
II.3 - Equipamentos Considerados na Comunicação entre Dois Assinantes	
III - Estrutura de Dados -----	11
III.1 - Conjuntos	
III.2 - Parâmetros	
III.2.1 - Parâmetros Relativos às Restrições	
III.2.2 - Parâmetros Relativos à Função Objetivo	
III.3 - Consideração do Sistema Existente	
III.4 - Coalisão da Demanda	
IV - Modelo Matemático -----	19
IV.1 - Variáveis	
IV.1.1 - Variáveis Principais	
IV.1.2 - Variáveis Auxiliares	
IV.2 - Função Objetivo	
IV.3 - Restrições	
V - Método de Solução -----	24
V.1 - Subproblema 1	
V.1.1 - Formalização	
V.1.2 - Solução	
V.2 - Subproblema 2	
V.2.1 - Formalização	
V.2.2 - Solução	

V.3 - Subproblema 3	
V.3.1 - Formalização	
V.3.2 - Solução	
V.4 - Recuperação da Solução a Nível de Quadrícula	
VI - Experiência Computacional -----	36
VII - Conclusões e Comentários -----	
Apêndice I - Cálculo de Distâncias -----	
Apêndice II - Cálculo do Número de Troncos entre Pares de Estações -----	
Bibliografia -----	

I - INTRODUÇÃO

A demanda de serviços telefônicos aumenta continuamente sendo, em muitos casos, impossível responder imediatamente a estes acréscimos apenas com os equipamentos disponíveis.

O surgimento de "assinantes em potencial" ocorre em diferentes momentos e torna necessário que se promovam expansões para atendê-los, traduzidas pela instalação de novas estações e pela introdução de meios capazes de interconectá-las, de forma a garantir a qualidade dos serviços prestados.

Traçando-se o gráfico da demanda x tempo, obtem-se uma função do tipo mostrado na Fig. 1.

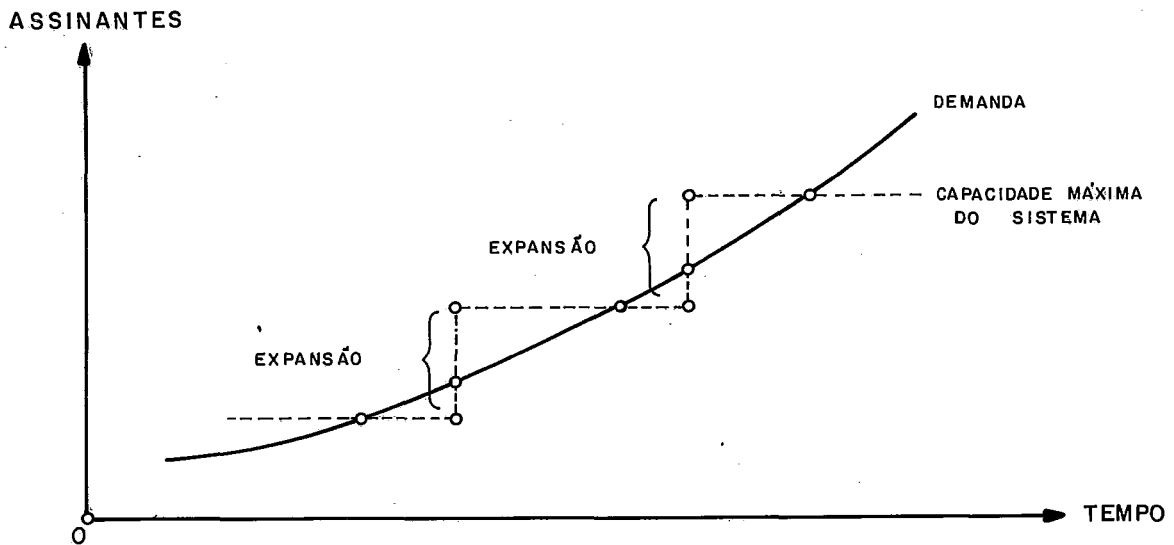


Fig. 1 - Atendimento da Demanda

O exame desta figura poderia sugerir um tratamento contínuo para o problema da expansão, já que o crescimento da demanda é ininterupto. Porém, a instalação de novos equipamentos só se justifica a partir de um limite mínimo da demanda reprimida, levando ao conceito de "etapas de expansão", isto é, etapas em que o sistema se mune de meios suficientes para atender a um determinado acréscimo de assinantes. Interessamos o estudo das expansões durante um certo período, denominado "horizonte de estudo".

Não é preocupação deste trabalho determinar as épocas em que se se rão realizadas as expansões "etapas de expansão", nem as capacida des máximas do sistema (em número de assinantes) em cada expansão mas sim, otimizar a "trajetória" do sistema, definindo como o mes mo deverá evoluir a cada etapa de expansão, observando capacida des e níveis de qualidade pré-estabelecidos, de modo a minimizar o custo total.

A realização de um estudo global, dinâmico, do problema leva a mo delos matemáticos dificilmente processáveis, devido ao grande nú mero de variáveis e às não-linearidades envolvidas. A fim de re duzir a complexidade do problema, adota-se a hipótese de que as estações se ligam diretamente, sem considerar a existência de "tandems". Rapp [1] reporta que esta simplificação não altera substancialmente a configuração final do sistema, no que diz res peito à localização de estações e determinação de áreas de influ ência, pois as diferenças de custo entre os vários circuitos de junção que integram as estações são pequenas em relação ao custo total da rede.

A consideração da área em estudo como um conjunto contínuo de pon tos gera modelos matemáticos de manipulação complexa e exige um detalhamento de dados difícil de se obter. Optou-se, então, por um modelo do tipo "feasible set", ou seja, os pontos de localização viáveis de estações são representados por um conjunto discreto de pontos. Para efetuar esta aproximação usa-se o artifício de inscrever a área em estudo em um reticulado uniforme, gerando o conceito de "quadrículas", que se transformam no elemento básico para o fornecimento de dados e explicitação da solução.

Partindo dessas considerações, o modelo apresentado a seguir visa a solucionar o problema relativo à localização, no tempo e no espaço, de novas estações, refiliação, quando necessária, de assinantes antigos, associação de cada assinante que surge a uma esta ção e determinação do número de meios, ao longo do tempo, que com põem cada feixe que interconecta as estações.

II - CONCEITOS BÁSICOS

II.1 - Partições da Área em Estudo

II.1.1 - Quadriculado de Referência

A natureza do problema sendo resolvido - localização espaço-tempo-ral de estações telefônicas - naturalmente impõe a necessidade do conhecimento de informações vinculadas a posições na área geográfica em estudo. A localização desses dados exige o estabelecimento de um sistema de referência, o qual permita, não só o equacionamento eficiente do problema, como também a obtenção, entrada e saída, dos dados necessários ao processamento do programa de computador desenvolvido.

A continuidade da área geográfica sugere a adoção do sistema cartesiano clássico de referência. Entretanto, tal sistema não possui as características acima apontadas e, então, optou-se pela discretização da área, conforme a seguir descrito.

A área de interesse é enquadrada num retângulo reticulado, cujos lados tangenciam o contorno limitante da região, conforme é exemplificado na Fig. 2.

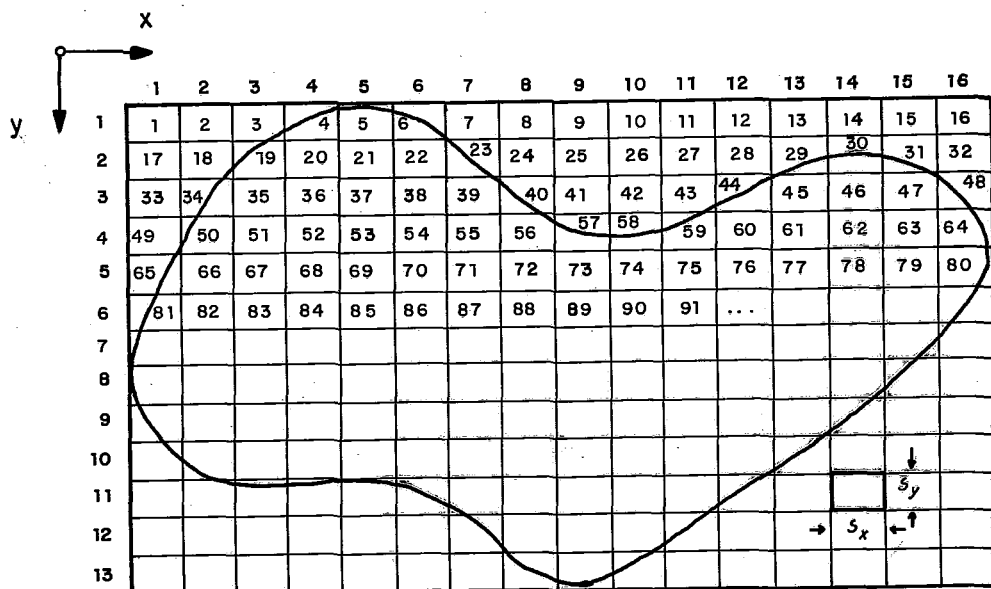


Fig. 2 - Reticulação da Área e Identificação das Quadriculas

Assim, a referência a uma quadrícula i pode ser feita de dois modos: através do par (linha x_i , coluna y_i) ou via o número sequencial a ela atribuído. Exemplificando: a quadrícula 51 está na linha 4 e na coluna 3.

As dimensões, δ_x e δ_y , das quadrículas são definidas tendo-se em mente o compromisso existente entre precisão e porte (em número de variáveis) do modelo, o aumento da primeira causando o aumento do segundo.

A precisão obtida contraindo-se as quadrículas, está limitada pela própria disponibilidade dos dados e, além disso, a partir de certo ponto, não melhora muito a qualidade dos resultados. Isto porque, nessa classe de problemas, não se pretende obter a posição das estações a nível pontual (ou quase) e sim a nível de aproximadamente um quarteirão urbano comum.

As quadrículas se constituem no elemento básico para o fornecimento de dados que dependem da posição a que se referem na área. Cada quadrícula é considerada homogênea, imposição que auxilia na determinação de suas dimensões.

Os modelos de localização de facilidades que, como o desenvolvido consideram um conjunto discreto de soluções viáveis são ditos do tipo "feasible set", os que operam com conjuntos contínuos sendo do tipo "infinite set".

II.1.2 - Zonas de terreno

Cada terreno que integra a área em estudo tem a ele associado um certo custo, dado de interesse do modelo, uma vez que interfere na decisão relativa à localização das estações telefônicas. O modelo, de fato, precisa conhecer, não exatamente os custos dos terrenos, mas o custo da unidade de área correspondente à região encerrada em cada quadrícula. Isto porque, o custo de uma estação depende da área que ela ocupa, a qual, por sua vez é função do porte da construção civil que abriga os equipamentos de comunicação.

Classificando-se as quadrículas segundo seus custos de áreas unitárias, obtem-se "zonas de terrenos", as quais correspondem às várias classes de quadrículas então definidas. Assim, cada zona de terreno compreende quadrículas cujos terrenos têm os mesmos custos de área unitária e toda quadrícula pertencerá a uma única zona, não necessariamente conexa.

II.1.3 - Zonas de Tráfego

O bom entendimento dos conceitos aqui tratados depende fundamentalmente da compreensão do significado do termo "tráfego" ou, mais especificamente, "intensidade de tráfego telefônico". Então, a seguir, é apresentado um breve resumo a respeito desse conceito.

Intensidade de Tráfego Telefônico

Sejam A e B dois assinantes que se comunicam telefonicamente através do uso de um conjunto F de facilidades tecnológicas, o qual serve, também, a outros usuários do sistema. O interesse de comunicação de A com B pode ser caracterizado pelo tempo médio da duração das conversações de A com B, T_s , e pelo intervalo médio de tempo entre solicitações sucessivas de comunicação, T_a , ou ainda, mais convenientemente, pela razão T_s/T_a . É essa razão adimensional, conhecida por "intensidade de tráfego de A para B" ou "interesse de tráfego do assinante A para o assinante B", expressa em erlangs, em homenagem ao engenheiro dinamarques A.K.Erlang, um pioneiro no estudo dos fenômenos de espera, no início do século.

Intuitivamente o conceito de intensidade de tráfego pode ser compreendido da seguinte forma: se durante um intervalo de tempo T, suficientemente grande, A solicita F para se comunicar com B, a uma taxa média constante de λ chamadas por unidade de tempo, pode-se esperar um total de λT chamadas durante T. Se as conversações então estabelecidas durarem em média T_s , então, F terá servido a A durante $\lambda T T_s$ unidades de tempo. Assim, a fração de tempo que F dedicará à comunicação de A para B será $\lambda T T_s / T = \lambda T_s$, ou, considerando-se que $\lambda = 1/T_a$, igual a T_s/T_a .

Com vistas à avaliação do tráfego, identificam-se as quadrículas que originam e recebem o mesmo tráfego por assinante. A área é então subdividida em "zonas de tráfego", de modo que dois assinantes da mesma zona originam e recebem o mesmo tráfego em relação a todos os outros assinantes.

Cada quadrícula pertencerá a uma zona de tráfego, como no caso de zonas de terrenos, e a cada par (z, z') de zonas de tráfego corresponderá um interesse de tráfego, definido como o tráfego gerado por um assinante de z e destinado a um assinante de z' .

II.1.4 - Zonas de Rede

A ligação de um assinante a uma central telefônica se faz através de um par de fios pertencentes a um determinado cabo que contém muitos outros pares. O custo do par/km do cabo necessário a esta conexão é função de dois parâmetros: distância do assinante à estação e densidade de ocupação da região onde se localiza o assinante. A dependência à distância se justifica pelos diferentes tipos de cabos empregados, de acordo com o comprimento da ligação: assinantes distantes precisam de cabos de calibre mais grosso, consequentemente mais caros. Por outro lado, o fato de um cabo ser melhor aproveitado, por um número maior de assinantes atendidos, causa um decréscimo no custo do par/km.

A fim de considerar diferentes densidades na área, subdivide-se esta em "zonas de rede", que se caracterizam por apresentarem uma densidade uniforme de assinantes.

Da mesma forma que as zonas de terreno e de tráfego, as zonas de rede não serão necessariamente conexas e cada quadrícula se associará a uma zona de rede.

II.2 - Distâncias

A topologia da área é definida usando-se a noção de "distância retangular", segundo a qual, a distância entre dois pontos de dada área é igual à soma dos catetos do triângulo retângulo, que tem

por hipotenusa o segmento de reta que une esses dois pontos ("distância euclidiana") e cujos outros lados são paralelos aos eixos de referência impostos à região. A escolha da métrica retangular para a definição de distâncias decorre da sua adequação à representatividade do caminho real a ser seguido por um cabo telefônico urbano.

A ligação retangular entre duas quadrículas i e i' da área assume duas formas: direta e indireta.

Na primeira situação, a distância, dita direta, é calculada simplesmente pela expressão

$$d(i, i') = \delta_x \cdot |x_i - x_{i'}| + \delta_y \cdot |y_i - y_{i'}|,$$

onde δ_x e δ_y são as dimensões das quadrículas, (x_i, y_i) e $(x_{i'}, y_{i'})$ são as suas coordenadas.

A Fig. 3 exemplifica o caso direto. Sendo 300m e 200m as dimensões das quadrículas, a distância da quadrícula 27 à 84 é

$$d(27, 84) = 300 \cdot |7 - 4| + 200 \cdot |3 - 9| = 2100\text{m}$$

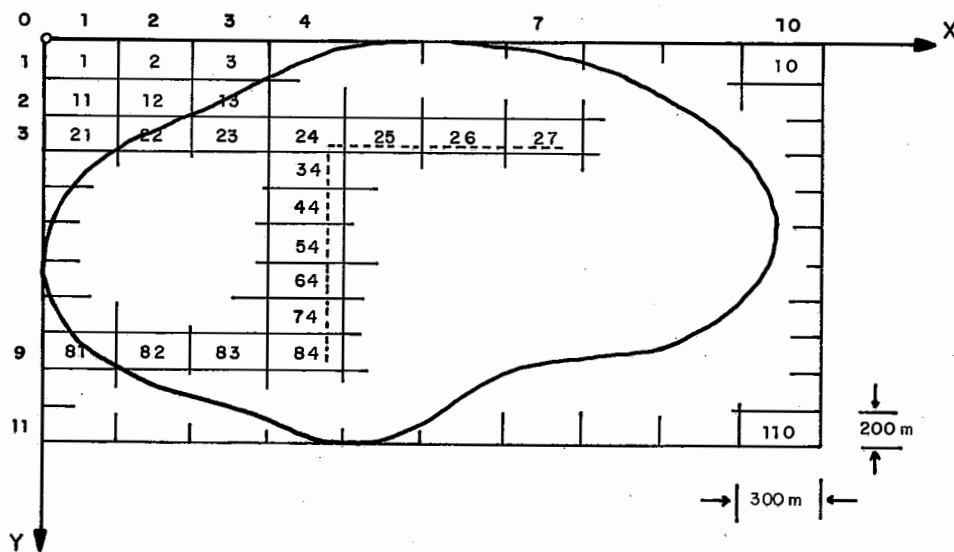


Fig. 3 - Distância da Quadrícula 27 à 84

A ligação indireta ocorre quando há obstáculos físicos (morros, lagos, rios, etc.) que impedem a passagem direta dos cabos. Esse fato gera a necessidade do modelo ser informado a respeito do posicionamento dos obstáculos existentes na área. Instituiu-se, então, o conceito de "matriz de obstáculos", na qual cada elemento corresponde a uma quadrícula, a linha identificando a sua primeira coordenada e a coluna a segunda. Cada elemento da matriz de obstáculos assume os valores 1 ou 0, conforme a correspondente quadrícula represente ou não obstáculo, respectivamente.

A distância entre quadrículas cuja ligação exija o contorno de obstáculos é calculada somando-se distâncias diretas a pontos intermediários, conforme é exemplificado na Fig. 4.

Na Fig. 4 as quadrículas 59 e 84 se ligam indiretamente e a distância entre elas é calculada usando-se a quadrícula intermediária número 27. Tem-se:

$$d(59,84) = d(59,27) + d(27,84) = 300 \cdot |7-9| + 200 \cdot |3-6| + 300 \cdot |4-7| + 200 \cdot |9-3| = 3300 \text{ m}$$

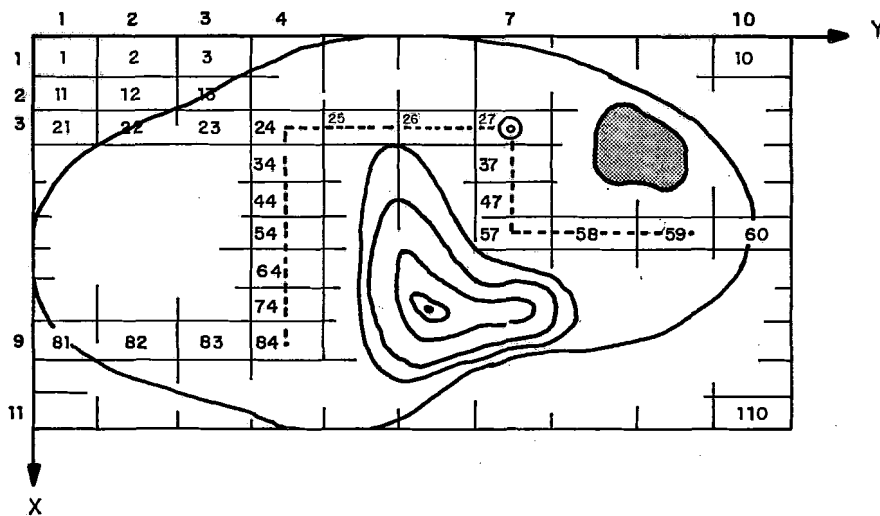


Fig. 4 - Exemplo de Determinação da Distância entre Quadrículas

O cálculo dessas distâncias é efetuado utilizando-se o algoritmo de Dijkstra, de busca de caminhos em grafos [2], exposto no Apêndice I. Dadas duas quadrículas obtém-se a menor distância retangular entre elas.

II.3 - Equipamentos Considerados na Comunicação entre Assinantes

O modelo supõe que a comunicação entre um assinante i , filiado à estação j , e um assinante i' , filiado à estação j' , faz uso dos seguintes meios de interligação e equipamentos:

- a) par de fios de um cabo de assinantes que conecta o assinante i ao distribuidor geral (DG) da estação j ;
- b) dispositivo de ligação do DG ao equipamento de comutação da estação j ;
- c) dispositivo de ligação do equipamento de comutação da estação j ao DG;
- d) juntor de saída da estação j ;
- e) par de fios de um cabo de junção da estação j à estação j' ;
- f) juntor de entrada da estação j' ;
- g) dispositivo de ligação do DG da estação j' ao equipamento de comutação;
- h) dispositivo de ligação do equipamento de comutação da estação j' ao DG;
- i) par de fios de um cabo de assinantes que conecta o assinante i' ao DG da estação j' ;

A figura 5 mostra esquematicamente a ligação telefônica do assinante i com o assinante i' .

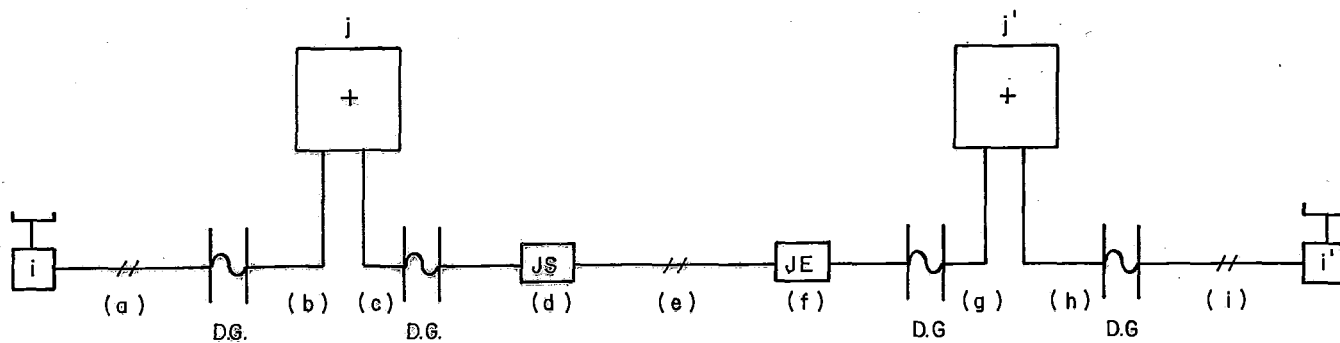


Fig. 5 - Ligação entre dois Assinantes Pertencentes a áreas de Estações Diferentes

Em caso de ligação de assinantes pertencentes à mesma área de estação, apenas os itens (a), (b), (h) e (i) serão considerados.

III - ESTRUTURA DE DADOS

A estrutura de dados no modelo "Plano Fundamental Dinâmico" está fundamentada na definição de vários conjuntos que visam à conceitualização e ao dimensionamento das matrizes e vetores que compõem os coeficientes das restrições e função objetivo e do domínio das variáveis.

Surge daí a classificação dos dados em conjuntos e parâmetros, conforme o esquema a seguir apresentado.

III.1 - Conjuntos

- T_0 - conjunto das etapas sendo consideradas
 $T_0 = \{0, 1, \dots, t, \dots, \hat{t}\}$
 $t=0$: etapa de referência
 $t=\hat{t}$: horizonte de planejamento
- T - conjunto das etapas de planejamento
 $T = T_0 - \{0\} = \{1, 2, \dots, t, \dots, \hat{t}\}$
- I - conjunto das quadrículas
 $I = \{1, 2, \dots, i, \dots, \hat{i}\}$
- J_0 - conjunto das estações sendo consideradas
 $J = \{1, 2, \dots, j, \dots, \hat{j}\}$
- $J(t)$ - conjunto das estações oferecidas ao modelo para uso na etapa t ; $t \in T_0$
 $J(t-1) \subseteq J(t) \subseteq J_0$; $t \in T$
- $L(j)$ - conjunto das quadrículas onde é viável localizar a estação j ; $j \in J_0$
 $L(j) \subseteq I$
- $R_{10}(t)$ - conjunto das zonas de terreno, na etapa t ; $t \in T$
 $R_{10}(t) = \{1, 2, \dots, r_{10}, \dots, \hat{r}_{10}(t)\}$
- $R_{20}(t)$ - conjunto das zonas de tráfego, na etapa t ; $t \in T$
 $R_{20}(t) = \{1, 2, \dots, r_{20}, \dots, \hat{r}_{20}(t)\}$

$R_{30}(t)$ - conjunto das zonas de rede, na etapa t ; $t \in T$

$$R_{30}(t) = \{1, 2, \dots, r_{30}, \dots, \hat{r}_{30}(t)\}$$

III.2 - Parâmetros

Como já foi observado, os parâmetros integram os coeficientes da função objetivo e das restrições. Assim, foram naturalmente subdivididos em parâmetros relativos às restrições e parâmetros relativos à função objetivo.

III.2.1 - Parâmetros Relativos às Restrições

$n(i, t)$ = número de assinantes da quadrícula i , na etapa t ;
 $i \in I, t \in T$

$k_1(j, t)$ = capacidade inferior da estação j , na etapa t ;
 $j \in J(t), t \in T$

$k_2(j, t)$ = capacidade superior da estação j , na etapa t ;
 $j \in J(t), t \in T$

$r_2(i, t)$ = zona de tráfego à qual pertence a quadrícula i , na etapa t ; $i \in I, t \in T$

$\xi(r_{20}, r'_{20}, t)$ = interesse de tráfego da zona de tráfego r_{20} para a zona de tráfego r'_{20} na etapa t , ou seja, tráfego originado por um assinante de r_{20} e destinado a um assinante de r'_{20} , na etapa t ; $r_{20}, r'_{20} \in R_{20}(t), t \in T$.

G = grau de serviço, definido como a probabilidade máxima admissível de que uma ligação telefônica se perca por exclusiva falta de troncos.

III.2.2 - Parâmetros Relativos à Função Objetivo

$\beta(t)$ = fator de atualização dos custos para a etapa t ; $t \in T$

$d(i, i')$ = distância entre as quadrículas i e i' ; $i, i' \in I$

- $s_0(j)$ = área fixa de terreno necessária à construção da estação j ; $j \in J_0 - J(0)$
- $s_1(j)$ = área de terreno relativa à filiação de um assinante à estação j ; $j \in J_0$
- $r_1(i, t)$ = zona de terreno à qual pertence a quadrícula i , na etapa t ; $i \in I, t \in T$
- $r_3(i, t)$ = zona de rede à qual pertence a quadrícula i , na etapa t ; $i \in I, t \in T$
- $c_1(r_{10}, t)$ = custo da unidade de área situada em uma quadrícula pertencente à zona de terreno r_{10} , na etapa t , $r_{10} \in R_{10}(t), t \in T$
- $c_2(j, t)$ = custo fixo de edificação, energia e comutação da estação j , na etapa t ; $j \in J(t), t \in T$
- $c_3(j, t)$ = custo de edificação, energia e comutação relativos a um assinante da estação j , na etapa t ; $j \in J(t), t \in T$
- $c_4(j, j', t)$ = custo unitário de comutação da estação j , para a estação j' , na etapa t ; $j, j' \in J(t), t \in T$
- $c_5(d, r_{30}, t)$ = custo de 1 km do par de fios que liga um assinante distante d da estação e pertencente à zona de rede r_{30} , na etapa t ; $r_{30} \in R_{30}(t), t \in T$

O custo do par/km para ligação de um assinante a uma estação, em uma etapa, dado que este assinante pertence a uma zona de rede determinada, em função da distância à estação, pode ser representado por uma função degrau, onde cada patamar está associado a um tipo de cabo.

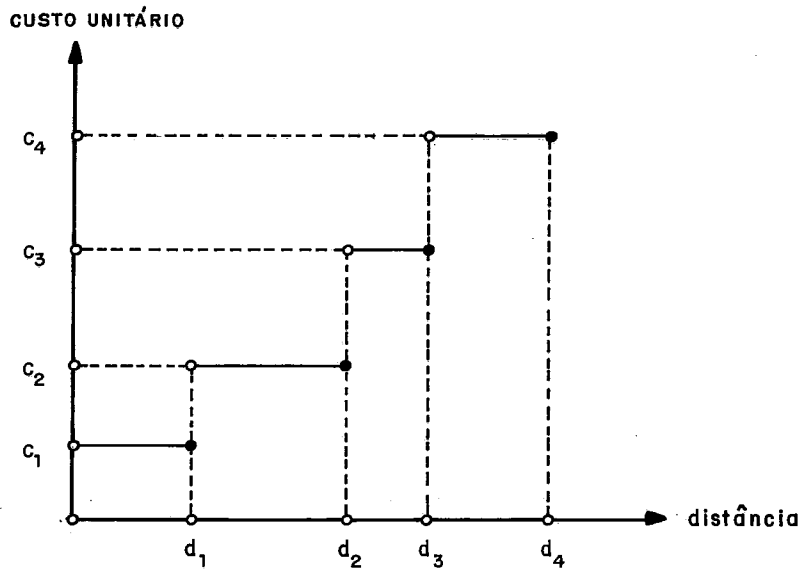


Fig. 6 - Custo Unitário da Ligação de um Assinante a uma Central

Cada tipo de cabo atende a distâncias dentro de um certo intervalo, como ilustra a figura 6.

$c_6(d, t)$ = custo de 1 km do par para ligação de um meio de transmissão entre duas estações distantes d uma da outra, na etapa t ; $t \in T$.

Semelhante ao caso de ligação de assinantes a estações, o custo do par/km de um cabo que conecta duas estações, em função da distância, pode ser descrito por uma função degrau do tipo apresentada na figura 6.

III.3 - Consideração do Sistema Existente

O planejamento da expansão do sistema telefônico em uma determinada área deve partir da estrutura já instalada e definir as novas configurações do sistema, a cada etapa do planejamento.

O Modelo Plano Fundamental Dinâmico é informado sobre os equipamentos disponíveis na área, na etapa de referência, através dos seguintes conjuntos e parâmetros:

$J(0)$ = conjunto das estações existentes na etapa de referência

$e(j,t)=1; j \in J(0), t \in T_0$

$e(j,0)=0; j \in J_0 - J(0)$

$b(i,j,0)$ = número de assinantes da quadrícula i , filiados à estação j , na etapa de referência, $i \in I, j \in J(0)$

$b(i,j,0)=0; i \in I, j \in J_0 - J(0)$

$u(j,0)$ = capacidade, em número de assinantes, da estação j , na etapa de referência; $j \in J(0)$

$u(j,0)=0; j \in J_0 - J(0)$

$h(j,j',0)$ = número de meios de transmissão entre as estações j e j' , na etapa de referência; $j, j' \in J(0)$

$h(j,j',0)=0; j \in J_0 - J(0), j' \in J_0 - J(0)$

$g(j)$ = quadrícula onde se localiza a estação j ; $j \in J(0)$

$L(j)=\{g(j)\}; j \in J(0)$.

III.4 - Coalisão da Demanda

O método de partição da área em quadrículas gera um número de variáveis, proporcional ao refinamento das estimativas de demanda, que pode inviabilizar a busca da solução por um algoritmo eficiente. Daí a necessidade de um procedimento que controle o número de variáveis de forma a mantê-lo sempre dentro de um nível que permita a manipulação computacional do modelo.

Este procedimento, aqui denominado "coalisão de quadrículas", consiste em reduzir o número de variáveis através do grupamento da demanda de várias quadrículas em uma única, chamada "representante", que assume integralmente a demanda do grupo que lidera.

Naturalmente, a compactação da área deve respeitar certas limitações, de forma a não comprometer a solução obtida através desta simplificação, em relação ao enquadramento original do problema,

isto é, de modo a não ocorrerem distorções que invalidem o resultado esperado.

A primeira restrição, que se impõe intuitivamente, refere-se à distância física entre as quadrículas de um mesmo grupo, a qual não poderá ultrapassar um determinado valor previamente estabelecido. Por outro lado, para que o cálculo do tráfego entre estações e do custo de rede não seja significativamente prejudicado, só se permite a duas quadrículas pertencerem ao mesmo grupo caso se situem na mesma zona de tráfego e na mesma zona de rede, isso em todas as etapas. Já as zonas de terreno não oferecem restrições, pois servem apenas à avaliação do custo do terreno das estações novas, cujas localizações permanecem associadas ao quadrículo de referência.

A descrição do algoritmo utilizado neste processo exige o esclarecimento dos conceitos de "quadrícula habitada" e "quadrícula sucessora", definidos para o problema específico e a seguir apresentados.

Uma quadrícula é dita "habitada" quando sua demanda, em alguma das etapas de planejamento é diferente de zero.

A quadrícula habitada B é dita "sucessora" da quadrícula A, também habitada, se e somente se :

(i) A e B têm distância direta, isto é, a menor distância entre A e B é obtida sem contornar obstáculos

$$(d(A,B) = |x_A - x_B| \cdot \delta_x + |y_A - y_B| \cdot \delta_y);$$

(ii) não existe uma quadrícula habitada C, tal que

$$d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$$

A figura 7 ilustra o conceito de quadrícula sucessora.

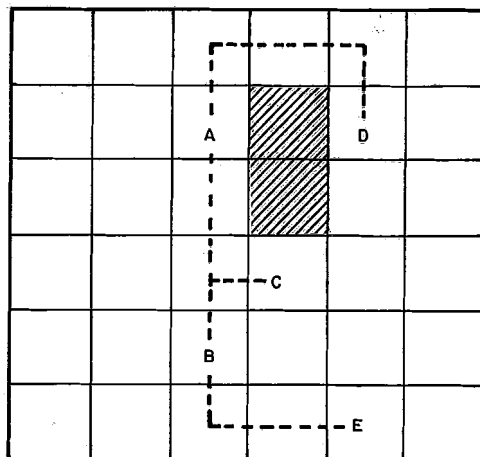


Fig. 7 - O Conceito de *Quadrícula Sucessora* (A,B,C,D e E são *Quadrículas Habitadas*; as *Quadrículas* que contêm *Obstáculos* estão *Hachuradas*)

B e C são sucessoras de A

D não é sucessora de A porque a ligação entre elas contorna obstáculos.

E não é sucessora de A pois existe uma quadrícula habitada B, tal que:

$$d(A,E) = d(A,B) + d(B,E)$$

Obviamente, se B é sucessora de A, então A é sucessora de B.

Algoritmo para Coalisção de Quadrículas

O algoritmo se compõe de duas fases: a Fase I cuida da formação dos grupos e a Fase II define a quadrícula representante de cada grupo.

FASE I

Sejam:

I_0 = conjunto das quadrículas habitadas

I_1 = conjunto das quadrículas habitadas não agrupadas

\bar{d} = distância máxima permitida entre quadrículas de mesmo grupo

G_m = conjunto das quadrículas pertencentes ao m-ésimo grupo

S_i = conjunto das quadrículas sucessoras da quadrícula i

Passo 0: Faça $I_1 = I_0$ e $m=0$.

Passo 1: Se $I_1 = \phi$, então vá para a Fase II.

Passo 2: Escolha $i \in I$, e faça $I_1 = I_1 - \{i\}$, $m=m+1$, $G_m = \{i\}$.

Passo 3: Determine S_i e faça $S = S_i$.

Passo 4: Se $S = \phi$, então vá para o Passo 1.

Passo 5: Escolha $s \in S$ e faça $S = S - \{s\}$.

Passo 6: Se $s \in \bigcup_{k=1}^m G_k$ ou

$\exists t \in T$ tal que $r_2(s, t) \neq r_2(i, t)$ ou

$\exists t \in T$ tal que $r_3(s, t) \neq r_3(i, t)$ ou

$\exists i' \in G_m$ tal que $d(s, i') > \bar{d}$, então vá para o Passo 4.

Passo 7: Faça $G_m = G_m \cup \{s\}$; $I_1 = I_1 - \{s\}$, determine S_s , faça $S = S \cup S_s$ e vá para o Passo 4.

FASE II

A Fase II define a quadrícula representante de cada grupo, tomando para suas coordenadas as do centro de massa do grupo, em relação à soma das demandas em todas as etapas, ou seja, $\forall k \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$x_k = \left\lfloor \frac{\sum_{i \in G_k} |x_i \cdot \sum_{t \in T} n(i, t)|}{\sum_{i \in G_k} \sum_{t \in T} n(i, t)} + 0.5 \right\rfloor \quad e \quad y_k = \left\lfloor \frac{\sum_{i \in G_k} |y_i \cdot \sum_{t \in T} n(i, t)|}{\sum_{i \in G_k} \sum_{t \in T} n(i, t)} + 0.5 \right\rfloor$$

onde,

$\lfloor x \rfloor$ = maior inteiro menor ou igual a x .

Se a quadrícula representante constituir-se em um obstáculo, tenta-se substituí-la pela quadrícula vizinha, habitada, de maior demanda, também pertencente ao grupo. Caso nenhuma quadrícula atenda às restrições, ocorrência de probabilidade rara, examina-se uma vizinhança mais abrangente, e assim por diante, até que esta inclua uma quadrícula habitada, pertencente ao grupo sendo considerado e do qual passa a ser representante. O conjunto das quadrículas representantes será, de agora em diante, denominado I^* .

IV - MODELO MATEMÁTICO

A estruturação do modelo matemático foi organizado em três itens: variáveis, função objetivo e restrições.

IV.1 - Variáveis

As variáveis do modelo estão subdivididas em principais e auxiliares.

IV.1.1 - Variáveis Principais

As variáveis principais se referem às questões básicas do problema: localização, no espaço e no tempo, das novas estações telefônicas e esquema de filiação de assinantes em cada etapa.

$e(j,t)$ = utilização da estação j , na etapa t ; $j \in J(t) - J(0)$, $t \in T$
 $e(j,t) = \begin{cases} 1, & \text{se o modelo opta pelo uso da estação } j, \text{ na etapa } t. \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$

$e(j,t) = 0$, $j \in J_0 - J(t)$, $t \in T$

$g(j)$ = quadrícula onde se localiza a estação j ; $j \in J_0 - J(0)$.

$p(i,j,t)$ = número de assinantes da quadrícula i , filiados à estação j , na etapa t ; $i \in I^*$, $j \in J(t)$, $t \in T$.

$p(i,j,t) = 0$; $i \in I^*$, $j \in J_0 - J(t)$, $t \in T$

sendo I^* o conjunto das quadrículas representantes de grupo.

IV.1.2 - Variáveis Auxiliares

As variáveis auxiliares dão forma às restrições e à função objetivo e, também, fornecem subsídios úteis para a análise da solução.

$b(i,j,t)$ = capacidade máxima de rede, isto é, número máximo de pares instalados, entre a quadrícula i e a estação j , até a etapa t (inclusive); $i \in I^*$, $j \in J(t)$, $t \in T$.

$b(i,j,t) = \max\{b(i,j,t-1), p(i,j,t)\}$

$$b(i,j,t) = 0; i \in I^*, j \in J_0 - J(t), t \in T$$

$y(i,j,t)$ = aumento (em número de pares) da capacidade de rede, em relação ao máximo até então ocorrido, da quadrícula i à estação j , na etapa t ; $i \in I^*, j \in J(t), t \in T$

$$y(i,j,t) = b(i,j,t) - b(i,j,t-1)$$

$q(j,t)$ = número de assinantes filiados à estação j , na etapa t ;
 $j \in J(t), t \in T$

$$q(j,t) = \sum_{i \in I^*} p(i,j,t)$$

$u(j,t)$ = capacidade instalada (em número de assinantes) da estação j , na etapa t ; $j \in J(t), t \in T$.

$$u(j,t) = \max\{u(j,t-1), q(j,t)\}$$

$$u(j,t) = 0; j \in J_0 - J(t), t \in T$$

$v(j,t)$ = aumento da capacidade instalada (em número de assinantes), da estação j , na etapa t ; $j \in J(t), t \in T$

$$v(j,t) = u(j,t) - u(j,t-1)$$

$a(j,j',t)$ = tráfego originado na estação j e destinado à estação j' na etapa t ; $j, j' \in J(t), t \in T$.

$$a(j,j',t) = \sum_{i \in I^*} p(i,j,t) \cdot \sum_{i' \in I^*} \xi(r_2(i,t) \cdot r_2(i',t), t) \cdot p(i',j',t)$$

$m(j,j',t)$ = número de meios de transmissão necessários à ligação da estação j , à estação j' , na etapa t , atendendo ao grau de serviço pré-estabelecido; $j, j' \in J(t), t \in T$

$$m(j,j',t) = E^{-1}(a(j,j',t), G), \text{ onde}$$

E^{-1} representa a função inversa da fórmula B de perda de Erlang

$h(j,j',t)$ = capacidade instalada (em número de troncos), ligando a estação j à estação j' , na etapa t ; $j, j' \in J(t), t \in T$

$$h(j,j',t) = \max\{h(j,j',t-1), m(j,j',t)\}$$

$$h(j,j',t) = 0, j \in J_0 - J(t), j' \in J_0 - J(t), t \in T$$

$w(j,j',t)$ = aumento do número de meios de transmissão ligando a estação j à estação j' , na etapa t ; $j, j' \in J(t), t \in T$

$$w(j,j',t) = h(j,j',t) - h(j,j',t-1)$$

IV.2 - Função Objetivo

A função objetivo pretende representar o custo total da expansão, a ser minimizado. Exprime-se em termos de custo fixo de construção das novas estações, custos de estações relativos ao número de assinantes a elas filiados, custo da rede de assinantes e custo de ligação entre estações.

Sejam:

$c_I(j,t)$ = valor presente do custo fixo de construção da estação j , na etapa t ; $j \in J(t) - J(0)$, $t \in T$

$$c_I(j,t) = \beta(t) \cdot [c_1(r_1(g(j),t),t) \cdot s_0(j) + c_2(j,t)]$$

$c_{II}(j,t)$ = valor presente do custo de filiação de um assinante à estação j , na etapa t ; $j \in J(t)$, $t \in T$

$$c_{II}(j,t) = \beta(t) \cdot [c_1(r_1(g(j),t),t) \cdot s_1(j) + c_3(j,t)]$$

$c_{III}(i,j,t)$ = valor presente do custo de rede relativo à filiação de um assinante da quadrícula i à estação j , na etapa t ; $i \in I^*$, $j \in J(t)$, $t \in T$

$$c_{III}(i,j,t) = \beta(t) \cdot c_5(d(i,g(j)), r_3(i,t), t) \cdot d(i,g(j))$$

$c_{IV}(j,j',t)$ = valor presente do custo unitário de ligação (comutação e transmissão), da estação j , para a estação j' , na etapa t ; $j, j' \in J(t)$, $t \in T$

$$c_{IV}(j,j',t) = \beta(t) \cdot [c_4(j,j',t) + c_6(d(g(j),g(j')),t) \cdot d(g(j),g(j'))]$$

A função objetivo, z , pode ser escrita como a soma de quatro parcelas

$$z = z_1 + z_2 + z_3 + z_4,$$

sendo:

z_1 = custo fixo de construção

$$z_1 = \sum_{t \in T} \sum_{j \in J(t) - J(0)} c_I(j,t) \cdot [e(j,t) - e(j,t-1)].$$

z_2 = custo de filiação de assinantes

$$z_2 = \sum_{t \in T} \sum_{j \in J(t)} c_{II}(j,t) \cdot v(j,t).$$

z_3 = custo da rede de assinantes

$$z_3 = \sum_{t \in T} \sum_{j \in J(t)} \sum_{i \in I^*} c_{III}(i,j,t) \cdot y(i,j,t)$$

z_4 = custo de ligação entre as estações

$$z_4 = \sum_{t \in T} \sum_{j \in J(t)} \sum_{j' \in J(t)} c_{IV}(j, j', t) \cdot w(j, j', t)$$

IV.3 - Restrições

Restrições Relativas à Natureza das Variáveis

- (1) $e(j, t) \in \{0, 1\}$; $j \in J(t) - J(0)$, $t \in T$
- (2) $p(i, j, t) \geq 0$; $i \in I^*$, $j \in J(t)$, $t \in T$
- (3) $q(j, t) = \sum_{i \in I^*} p(i, j, t)$; $j \in J(t)$, $t \in T$
- (4) $u(j, t) \geq q(j, t)$; $j \in J(t)$, $t \in T$
- (5) $u(j, t) \geq u(j, t-1)$; $j \in J(t)$, $t \in T$
- (6) $v(j, t) = u(j, t) - u(j, t-1)$; $j \in J(t)$, $t \in T$
- (7) $b(i, j, t) \geq p(i, j, t)$; $i \in I^*$, $j \in J(t)$, $t \in T$
- (8) $b(i, j, t) \geq b(i, j, t-1)$; $i \in I^*$, $j \in J(t)$, $t \in T$
- (9) $y(i, j, t) = b(i, j, t) - b(i, j, t-1)$; $i \in I^*$, $j \in J(t)$, $t \in T$
- (10) $a(j, j', t) = \sum_{i \in I^*} p(i, j, t) \cdot \sum_{i' \in I^*} \xi(r_2(i, t), r_2(i', t), t) \cdot p(i', j', t)$;
 $j, j' \in J(t)$, $t \in T$
- (11) $m(j, j', t) = E^{-1}(a(j, j', t), G)$; $j, j' \in J(t)$, $t \in T$
- (12) $h(j, j', t) \geq m(j, j', t)$; $j, j' \in J(t)$, $t \in T$
- (13) $h(j, j', t) \geq h(j, j', t-1)$; $j, j' \in J(t)$, $t \in T$
- (14) $w(j, j', t) = h(j, j', t) - h(j, j', t-1)$; $j, j' \in J(t)$, $t \in T$

Restrição Relativa à Continuidade de Existência de Estações

- (15) $e(j, t) \geq e(j, t-1)$; $j \in J(t)$, $t \in T$

Restrição Relativa ao Atendimento à Demanda

- (16) $\sum_{j \in J(t)} p(i, j, t) = n(i, t)$; $i \in I^*$, $t \in T$

Restrições Relativas à Capacidade das Estações

$$(17) \quad q(j,t) \geq k_1(j,t) \cdot e(j,t); \quad j \in J(t), \quad t \in T$$

$$(18) \quad q(j,t) \leq k_2(j,t) \cdot e(j,t); \quad j \in J(t), \quad t \in T$$

Restrições Relativas à Localização das Novas Estações

$$(19) \quad g(j) \in L(j); \quad j \in J - J(0)$$

V - MÉTODO DE SOLUÇÃO

O modelo apresentado contém, apesar das hipóteses simplificadoras adotadas, algumas não-linearidades que dificultam a aplicação de um algoritmo eficiente na busca das respostas desejadas. Além disso, o processo de compactação da demanda deve ser levado a termo cuidadosamente, de forma a não desfigurar a área, o que pode gerar, como consequência, um número de variáveis ainda elevado com respeito ao processamento computacional.

As razões acima declinadas impõem a necessidade do emprego de um método alternativo de solução. A compreensão do método adotado exige um exame do problema real abstraindo-se, inicialmente, de sua formulação matemática.

Trata-se fundamentalmente de decidir sobre três tipos de questões: localização temporal das estações telefônicas, localização espacial das estações e esquema de filiação de assinantes. Esta visão sugere uma tentativa de decomposição do problema em três subproblemas, cada um relativo a uma das questões mencionadas.

Tomemos, primeiramente, o problema de localização temporal das estações. A menos que a área em estudo compreenda uma região muito pequena, caso em que não é eficiente a aplicação de um modelo de grande porte, o oferecimento de uma estação nova está diretamente associado a uma determinada subárea. No caso da área representar uma cidade ou parte dela, as subáreas se constituiriam, por exemplo, de bairros. Ora, a decisão de construir ou não uma estação, em uma determinada subárea, numa dada etapa, praticamente não será influenciada pela localização da estação dentro da subárea. Esta hipótese justifica a resolução do problema de localização temporal das estações, em uma primeira fase, supondo-se, para cada estação nova, uma localização inicial arbitrária dentro da subárea à qual está relacionada, independente da localização definitiva a ser fixada em uma fase posterior. Além disso, como já foi comentado, o custo do entroncamento entre estações é muito pouco significativo quando comparado ao custo da rede de assinantes, sendo este, basicamente, que decide sobre a construção ou não de uma estação nova.

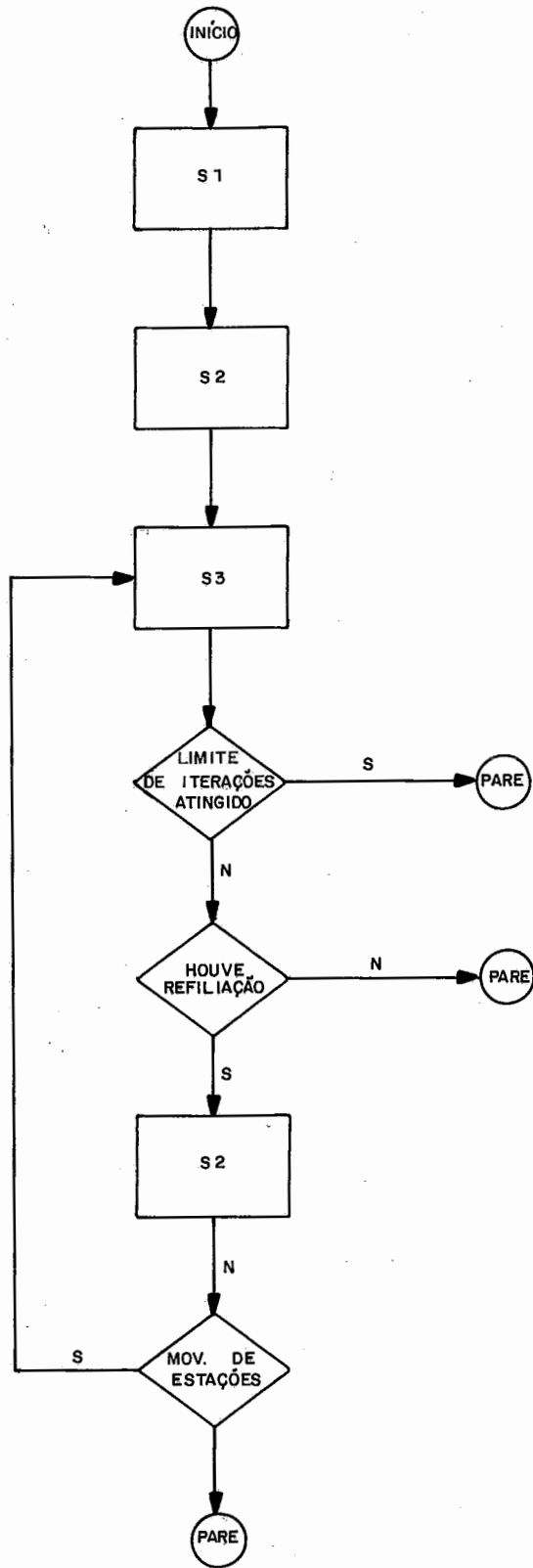


Fig. 8 - Fluxograma do Processo de Solução

Portanto, nesta primeira fase o custo de entroncamento não seria considerado.

Determinadas as localizações temporais das estações novas, restam ainda pendentes os problemas de localização espacial das mesmas e redefinição das áreas de influência de todas as estações que integram a área.

Seguindo então esta linha, o método de solução se apoia na resolução dos três subproblemas:

Subproblema 1: determinação da época de entrada em funcionamento das novas estações, supondo-se suas localizações fixas, e do esquema inicial de filiação.

Subproblema 2: determinação da melhor localização das novas estações, supondo-se fixo o esquema de filiação.

Subproblema 3: redefinição da área de influência das estações, a partir das novas localizações apontadas pelo subproblema 2.

O processo iterativo de solução do problema pode ser visualizado na Fig. 8.

A formalização e método de solução dos três subproblemas são apresentados a seguir.

V.1 - Subproblema 1

V.1.1 - Formalização

Sejam

$g^*(j)$ = localização da estação j , $j \in J(0)$

$g^*(j)$ = localização arbitrária da estação j dentro da subárea à qual está associada; $j \in J_0 - J(0)$

$c_I^*(j, t) = \beta(t) \cdot [c_1(r_1(g^*(j), t), t) \cdot s_0(j) + c_2(j, t)]$; $j \in J(t) - J(0)$, $t \in T$

$c_{II}^*(j, t) = \beta(t) [c_1(r_1(g^*(j), t), t) \cdot s_1(j) + c_3(j, t)]$; $j \in J(t)$, $t \in T$

$c_{III}^*(i, j, t) = \beta(t) \cdot c_5(d(i, g^*(j))) \cdot r_3(i, t, t) \cdot d(i, g^*(j))$; $i \in I^*$, $j \in J(t)$, $t \in T$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \min z = & \sum_{t \in T} \sum_{j \in J(t) - J(0)} c_I^*(j, t) \cdot [e(j, t) - e(j, t-1)] + \\ & + \sum_{t \in T} \sum_{j \in J(t)} c_{II}^*(j, t) \cdot v(j, t) + \\ & + \sum_{t \in T} \sum_{j \in J(t)} \sum_{i \in I^*} c_{III}^*(i, j, t) \cdot y(i, j, t) \end{aligned}$$

sujeita a

$$\begin{aligned} e(j, t) & \in \{0, 1\}; j \in J(t) - J(0), t \in T \\ p(i, j, t) & \geq 0; i \in I^*, j \in J(t), t \in T \\ q(j, t) & = \sum_{i \in I^*} p(i, j, t), j \in J(t), t \in T \\ u(j, t) & \geq q(j, t); j \in J(t), t \in T \\ u(j, t) & \geq u(j, t-1); j \in J(t), t \in T \\ v(j, t) & = u(j, t) - u(j, t-1); j \in J(t), t \in T \\ b(i, j, t) & \geq p(i, j, t); i \in I^*, j \in J(t), t \in T \\ b(i, j, t) & \geq b(i, j, t-1); i \in I^*, j \in J(t), t \in T \\ y(i, j, t) & = b(i, j, t) - b(i, j, t-1); i \in I^*, j \in J(t), t \in T \\ e(j, t) & \geq e(j, t-1); j \in J(t), t \in T \\ \sum_{j \in J(t)} p(i, j, t) & = n(i, t); i \in I^*, t \in T \\ q(j, t) & \geq k_1(j, t) \cdot e(j, t); j \in J(t), t \in T \\ q(j, t) & \leq k_2(j, t) \cdot e(j, t); j \in J(t), t \in T \end{aligned}$$

V.1.2 - Solução

O subproblema 1, de Programação Linear Inteira, é resolvido através do programa-produto da IBM, MPSX-MIP.

V.2 - Subproblema 2

V.2.1 - Formalização

Sejam

$$J^*(t) = \{j/e(j, t) = 1 \text{ pela resolução do subproblema 1}\}; t \in T_0$$

$v^*(j,t)=v(j,t)$ definido pela resolução do subproblema 1 ou redefinido pela resolução do subproblema 3; $j \in J^*(t)$, $t \in T$

$y^*(i,j,t)=y(i,j,t)$ definido pela resolução do subproblema 1 ou redefinido pela resolução do subproblema 3; $i \in I^*$, $j \in J^*(t)$, $t \in T$

$a^*(j,j',t) = \sum_{i \in I^*} p(i,j,t) \cdot \sum_{i' \in I^*} \xi(r_2(i,t), r_2(i',t), t) \cdot p(i',j',t)$,
 $p(i,j,t)$ definido pela resolução do subproblema 1 ou redefinido pela resolução do subproblema 3; $j, j' \in J^*(t)$, $t \in T$

$m^*(j,j',t) = E^{-1}(a^*(j,j',t), G)$; $j, j' \in J^*(t)$, $t \in T$

$h^*(j,j',t) = \max\{m^*(j,j',t), h^*(j,j',t-1)\}$; $j, j' \in J^*(t)$, $t \in T$

$w^*(j,j',t) = h^*(j,j',t) - h^*(j,j',t-1)$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \min z = & \sum_{t \in T} \sum_{j \in J^*(t) - J^*(t-1)} \beta(t) \cdot s_0(j) \cdot c_1(r_1(g(j), t), t) + \\ & + \sum_{t \in T} \sum_{j \in J^*(t)} \beta(t) \cdot s_1(j) \cdot v^*(j, t) \cdot c_1(r_1(g(j), t), t) + \\ & + \sum_{t \in T} \sum_{j \in J^*(t)} \sum_{i \in I^*} \beta(t) \cdot y^*(i, j, t) \cdot c_5(d(i, g(j)), r_3(i, t), t) \cdot \\ & \quad \cdot d(i, g(j)) + \\ & + \sum_{t \in T} \sum_{j \in J^*(t)} \sum_{j' \in J^*(t)} \beta(t) \cdot w^*(j, j', t) \cdot c_6(d(g(j), g(j')), t) \cdot \\ & \quad \cdot d(g(j), g(j')) \end{aligned}$$

sujeita a

$$g(j) \in L(j); j \in J^*(\hat{t})$$

V.2.2 - Solução

A solução do subproblema 2 é obtida através de um algoritmo que "movimenta" as estações visando a minimizar a soma dos custos de terreno, de rede de assinantes e de rede de cabos tronco, mantendo o esquema de filiação pré-determinado.

Tal movimentação é feita dentro de uma região retangular definida por um máximo arbitrado de 5 quadrículas na direção horizontal e 5 quadrículas na direção vertical, tendo como centro a localização atual da estação. À medida que a estação se desloca, a região de movimentação também se desloca, na mesma direção.

O método de cálculo do número de meios entre duas estações, em função do tráfego e da perda máxima admissível, é descrito no apêndice II.

Algoritmo para Resolução do Subproblema 2.

Sejam:

J_a = conjunto das novas estações que ainda não foram movimentadas na iteração em curso.

M = variável que indica se houve ou não movimentação de estações na iteração corrente.

j = estação para a qual se está buscando uma melhor localização.

S_j = região de movimentação da estação j

$$S_j = \{q \in L(j) / |x_q - x_{g(j)}| \leq 2 \wedge |y_q - y_{g(j)}| \leq 2\}$$

S_a = quadrículas de S_j que ainda não foram examinadas

z^* = menor custo relativo à estação j obtido até a iteração em curso

q = quadrícula onde está sendo testada a localização da estação j

z = custo relativo à localização da estação j , na quadrícula q

q^* = melhor localização, obtida até a iteração em curso, para a estação j .

Passo 1: Faça $J_a = J^*(\hat{t}) - J(0)$ e $M=0$

Passo 2: Tome $j \in J_a$, determine S_j e faça $S_a = S_j$ e $z^* = \infty$

Passo 3: Tome $q \in S_a$ e calcule z por

$$z = \sum_{t \in T} \beta(t) \cdot [(s_0(j) + s_1(j) \cdot v^*(j, t)) \cdot c_1(r_1(q, t), t) + \\ + \sum_{i \in I^*} y^*(i, j, t) \cdot c_5(d(i, q), r_3(i, t), t) \cdot d(i, q) + \\ + \sum_{j' \in J^*(t)} w^*(j, j', t) \cdot c_6(d(q, g(j')), t) \cdot d(q, g(j'))]$$

Passo 4: Se $z < z^*$ então faça $q^* = q$ e $z^* = z$

Passo 5: Faça $S_a = S_a - \{q\}$. Se $S_a \neq \emptyset$ então vá para o passo 3

Passo 6: Se $q^* \neq g(j)$ então faça $g(j) = q^*$ e $M = 1$

Passo 7: Faça $J_a = J_a - \{j\}$. Se $J_a \neq \emptyset$ então vá para o passo 2

Passo 8: Se $M = 1$ então vá para o passo 1. Se não, pare.

V.3 - Subproblema 3

V.3.1 - Formalização

Sejam

$J^*(t) = \{j / e(j, t) = 1 \text{ pela resolução do subproblema 1}\}; t \in T_0$

$g^*(j) = \text{localização atual da estação } j \text{ após a resolução do subproblema 2}; j \in J^*(\hat{t})$

$C_{II}^*(j, t) = \beta(t) \cdot [c_1(r_1(g^*(j), t), t) \cdot s_1(j) + c_3(j, t)], j \in J^*(t), t \in T$

$C_{III}^*(i, j, t) = \beta(t) \cdot c_5(d(i, g^*(j)), r_3(i, t), t) \cdot d(i, g^*(j)); i \in I^*, j \in J^*(t)$
 $t \in T$

Tem-se:

$$\min z = \sum_{t \in T} \sum_{j \in J^*(t)} C_{II}^*(j, t) \cdot v(j, t) +$$

$$+ \sum_{t \in T} \sum_{j \in J^*(t)} \sum_{i \in I^*} C_{III}^*(i, j, t) \cdot y(i, j, t)$$

sujeita a

$p(i, j, t) \geq 0; i \in I^*, j \in J^*(t), t \in T$

$q(j, t) = \sum_{i \in I^*} p(i, j, t); j \in J^*(t), t \in T$

$u(j, t) \geq q(j, t); j \in J^*(t), t \in T$

$u(j, t) \geq u(j, t-1); j \in J^*(t), t \in T$

$v(j, t) = u(j, t) - u(j, t-1); j \in J^*(t), t \in T$

$b(i, j, t) \geq p(i, j, t); i \in I^*, j \in J^*(t), t \in T$

$b(i, j, t) \geq b(i, j, t-1); i \in I^*, j \in J^*(t), t \in T$

$y(i, j, t) = b(i, j, t) - b(i, j, t-1)$

$\sum_{j \in J^*(t)} p(i, j, t) = n(i, t); i \in I^*, t \in T$

$$q(j,t) \geq k_1(j,t); j \in J^*(t), t \in T$$
$$q(j,t) \leq k_2(j,t); j \in J^*(t), t \in T$$

V.3.2 - Solução

A solução exata do subproblema 3 pode gerar uma superposição das áreas de atendimento das estações e um número inviável de mudanças de filiação para um mesmo assinante, o que se torna indesejável do ponto de vista prático.

Foi então criado um algoritmo para resolução do subproblema 3, que tenta contornar este problema, partindo do esquema de filiação inicial fornecido pela solução do subproblema 1 e contemplando as novas localizações das estações determinadas pela solução do subproblema 2.

O algoritmo atua etapa a etapa, partindo da última, etapa em que todas as novas estações a serem incorporadas estão presentes. Tenta filiar os assinantes de cada grupo, tomado um a um, às estações, de forma que o processo se faça ao menor custo para a etapa sendo considerada, sem violentar as capacidades inferiores e superiores das estações. Ao mesmo tempo procura, na medida do possível, manter estas filiações nas etapas anteriores, a fim de minimizar o número de filiações a que um assinante é submetido.

Algoritmo para Resolução do Subproblema 3

Sejam

- I_1 = conjunto das quadrículas que ainda não foram examinadas na iteração corrente
- F = variável que indica se houve ou não refiliação de assinantes na iteração corrente
- i = quadrícula sendo examinada
- p'_{jt} = número de assinantes da quadrícula i , filiados à estação j na etapa t , até o momento
- q'_{jt} = número de assinantes da quadrícula i , filiados à estação j , na etapa f , até o momento

J_a = conjunto auxiliar
 a = variável auxiliar

Passo 1: Faça $I_1 = I^*$ e $F=0$

Passo 2: Tome $i \in I_1$

Passo 3: $\forall t \in T, \forall j \in J^*(t)$ faça

$$p'_{jt} = \max\{0, k_1(j, t) - \sum_{i_1 \in I^*, i_1 \neq i} p(i_1, j, t)\} \text{ e}$$

$$q'_{jt} = \max\{k_1(j, t), \sum_{i_1 \in I^*, i_1 \neq i} p(i_1, j, t)\}$$

Passo 4: Faça $t = \hat{t}$

Passo 5: Se $t=1$ então vá para o passo 9. Se não, faça

$$J_a = \{j / j \in J^*(t-1) \wedge p'_{jt} > 0\}$$

Passo 6: Se $J_a = \emptyset$ então vá para o passo 8. Se não, tome $j \in J_a$ tal

$$p'_{jt} = \min_{\ell \in J_a} \{p'_{\ell t}\}$$

Passo 7: Faça $a = \min\{p'_{jt}, n(i, t-1) - \sum_{\ell \in J^*(t-1)} p'_{\ell t-1}, k_2(j, t-1) - q'_{jt-1}\}$,

$p'_{jt-1} = p'_{jt-1} + a, q'_{jt-1} = q'_{jt-1} + a, J_a = J_a - \{j\}$ e vá para o passo 6.

Passo 8: Faça $t = t-1$ e vá para o passo 5

Passo 9: Faça $t = \hat{t}$

Passo 10: Se $\sum_{j \in J^*(t)} p'_{jt} = n(i, t)$ então vá para o passo 13. Se não

faça $J_a = \{j / j \in J^*(t) \wedge k_2(j, t) - q'_{jt} > 0\}$.

Passo 11: Determine j tal que

$$c_2(j, t) + s_1(j) \cdot c_1(r_1(g^*(j), t), t) + c_5(d(i, g^*(j)), r_3(i, t), t) \cdot d(i, g^*(j)) = \min_{\ell \in J_a} \{c_2(\ell, t) + s_1(\ell) \cdot c_1(r_1(g^*(\ell), t), t) + c_5(d(i, g^*(\ell)), r_3(i, t), t) \cdot d(i, g^*(\ell))\}.$$

Passo 12: Faça $a = \min\{n(i, t) - \sum_{\ell \in J^*(t)} p'_{\ell t}, k_2(j, t) - q'_{jt}\}, p'_{jt} = p'_{jt} + a,$

$q'_{jt} = q'_{jt} + a$ e vá para o passo 10.

Passo 13: Se $t=1$ então vá para o passo 17. Se não, faça
 $J_a = \{j/j \in J^*(t-1) \wedge p'_{jt} > 0\}$

Passo 14: Se $J_a = \emptyset$ então vá para o passo 16. Se não, tome $j \in J_a$
tal que $p'_{jt} = \min_{\ell \in J_a} \{p'_{\ell t}\}$

Passo 15: Faça $a = \min\{p'_{jt}, n(i, t-1) - \sum_{\ell \in J^*(t-1)} p'_{\ell t-1, k_2(j, t-1)} - q'_{jt-1}\}$,
 $p'_{jt-1} = p'_{jt-1} + a$, $q'_{jt-1} = q'_{jt-1} + a$, $J_a = J_a - \{j\}$ e vá para o passo 14

Passo 16: Faça $t=t-1$ e vá para o passo 10

Passo 17: Se $\exists (j, t)$, $j \in J^*(t)$, $t \in T$ tal que $p'_{jt} \neq p(i, j, t)$ então faça
 $F=1$

Passo 18: $\forall t \in T$, $\forall j \in J^*(t)$ faça $p(i, j, t) = p'_{jt}$

Passo 19: Faça $I_1 = I_1 - \{i\}$. Se $I_1 \neq \emptyset$ então vá para o passo 2.

Passo 20: Se $F=1$ então vá para o passo 1. Se não, pare.

V.4 - Recuperação da Solução a Nível de Quadrícula

Observa-se que o resultado obtido não responde ainda à formulação inicial do problema, pois o esquema de filiação está relacionado a agrupamentos de quadrículas e não detalhado por quadrícula, como os dados fornecidos ao modelo.

Resta então desmembrar o esquema de filiação dos grupos às estações, de forma a atender à demanda de cada quadrícula, particularmente, fornecendo a solução do problema em função do reticulado original.

O método de distribuição do atendimento da demanda associada a um grupo, entre as várias quadrículas que o compõem, consiste em um algoritmo semelhante ao utilizado no subproblema 3. Cada agrupamento de quadrículas é tomado separadamente, como uma subárea isolada. São consideradas apenas as estações às quais o grupo esteja filiado em alguma etapa, que assumem capacidades mínimas e máximas "fictícias", representadas respectivamente por 0 (zero) e

pelo número de assinantes do grupo a elas associado em cada etapa. Tal como no algoritmo de resolução do subproblema 3, as etapas de planejamento são percorridas em ordem decrescente. Determina-se a estação com menor capacidade superior fictícia, preenchendo-a com os assinantes das quadrículas mais próximas. O procedimento se repete até que todas as quadrículas integrantes do grupo tenham seu atendimento definido. Evita-se, tanto quanto possível, a refiliação excessiva de um mesmo assinante, procurando manter a mesma filiação das quadrículas nas etapas anteriores, de modo a respeitar sempre o número total de assinantes do grupo filiados à estação, em cada etapa.

Algoritmo para Recuperação da Solução a Nível de Quadrícula

Sejam

I = conjunto original de quadrículas

I^* = conjunto dos grupos

G_i = conjunto de quadrículas q , que compõem o grupo i , $q \in I$, $i \in I^*$

$n(q,t)$ = demanda da quadrícula q , na etapa t , $q \in I$, $t \in T$

$p^*(i,j,t)$ = número de assinantes do grupo i , filiados à estação j na etapa t , $i \in I^*$, $j \in J(t)$, $t \in T$

I_1 = conjunto dos grupos cuja filiação ainda não foi desmembrada em quadrículas

$n^*(q,j,t)$ = número de assinantes da quadrícula original q , filiados à estação j , na etapa t ; $q \in I$, $j \in J(t)$, $t \in T$

G^* , J_a = conjuntos auxiliares

a = variável auxiliar

Passo 0: Faça $I_1 = I^*$ e $n^*(q,j,t) = 0$, $\forall q \in I$, $\forall j \in J(t)$, $\forall t \in T$

Passo 1: Se $I_1 = \emptyset$, então pare. Se não, tome $i \in I_1$ e faça $I_1 = I_1 - \{i\}$ e $t = \hat{t}$

Passo 2: Faça $J_a = \{j \in J(t) / p^*(i,j,t) > 0\}$

Passo 3: Se $J_a = \emptyset$ então vá para o passo 7. Se não tome $j \in J_a$ tal que $p^*(i,j,t) = \min_{\ell \in J_a} \{p^*(i,\ell,t)\}$

Passo 4: Faça $G^* = \{q \in G_i / \sum_{\ell \in J(t)} n^*(q, \ell, t) < n(q, t)\}$

Passo 5: Tome $q \in G^*$ tal que $d(q, g^*(j)) = \min_{\ell \in G^*} \{d(\ell, g^*(j))\}$

Passo 6: Faça $a = \min\{p^*(i, j, t), n(i, t) - \sum_{\ell \in J(t)} n^*(i, \ell, t)\}$,

$n^*(q, j, t) = n^*(q, j, t) + a$, $p^*(i, j, t) = p^*(i, j, t) - a$ e vá para o passo 2.

Passo 7: Se $t=1$, então vá para o passo 1. Se não, faça $G^* = G_i$

Passo 8: Se $G^* = \emptyset$, então vá para o passo 12. Se não, tome $q \in G^*$ e faça $G^* = G^* - \{q\}$

Passo 9: Faça $J_a = \{j \in J(t-1) / n^*(q, j, t) > 0 \wedge p^*(i, j, t-1) > 0\}$

Passo 10: Se $J_a = \emptyset$, então vá para o passo 8. Se não, tome $j \in J_a$ tal que $n^*(i, j, t) = \min_{\ell \in J_a} \{n^*(i, \ell, t)\}$

Passo 11: Faça $a = \min\{p^*(i, j, t-1), n^*(q, j, t), n(q, t-1) - \sum_{\ell \in J(t-1)}$

$n^*(q, \ell, t-1)\}$, $n^*(q, j, t-1) = n^*(q, j, t-1) + a$, $p^*(i, j, t-1) = p^*(i, j, t-1) - a$, $J_a = J_a - \{j\}$ e vá para o passo 10.

Passo 12: Faça $t = t-1$ e vá para o passo 2.

VI - EXPERIÊNCIA COMPUTACIONAL

Os algoritmos descritos foram programados em linguagem de computador PL/1, com exceção do método de resolução do subproblema 1, que utiliza a linguagem específica do "software" MPSX-MIP.

Realizou-se um teste do modelo exposto para a área local de Pendo-tiba, Rio de Janeiro, com as características a seguir apresentadas.

Número de etapas de planejamento: 3 (anos 1985, 1990 e 2000)

Número de quadrículas

na direção horizontal: 50

na direção vertical: 56

total: 2800

Número de quadrículas com obstáculos: 2302

Número de quadrículas com assinantes

em 1985: 418

em 1990: 442

em 2000: 448

Número total de assinantes

em 1985: 2909

em 1990: 4722

em 2000: 11514

Número de zonas de terrenos: 3

Custos unitários de terrenos (Cr\$/m²)

zona 1: 1500,00

zona 2: 1200,00

zona 3: 1000,00

Número de zonas de tráfego: 1

Interesse de tráfego de um assinante para outro (erl), dado que só foi definida uma zona de tráfego

em 1985: 104×10^{-7}

em 1990: 63×10^{-7}

em 2000: 26×10^{-7}

Número de zonas de rede: 1

Custo unitário do par/km para rede de assinantes.

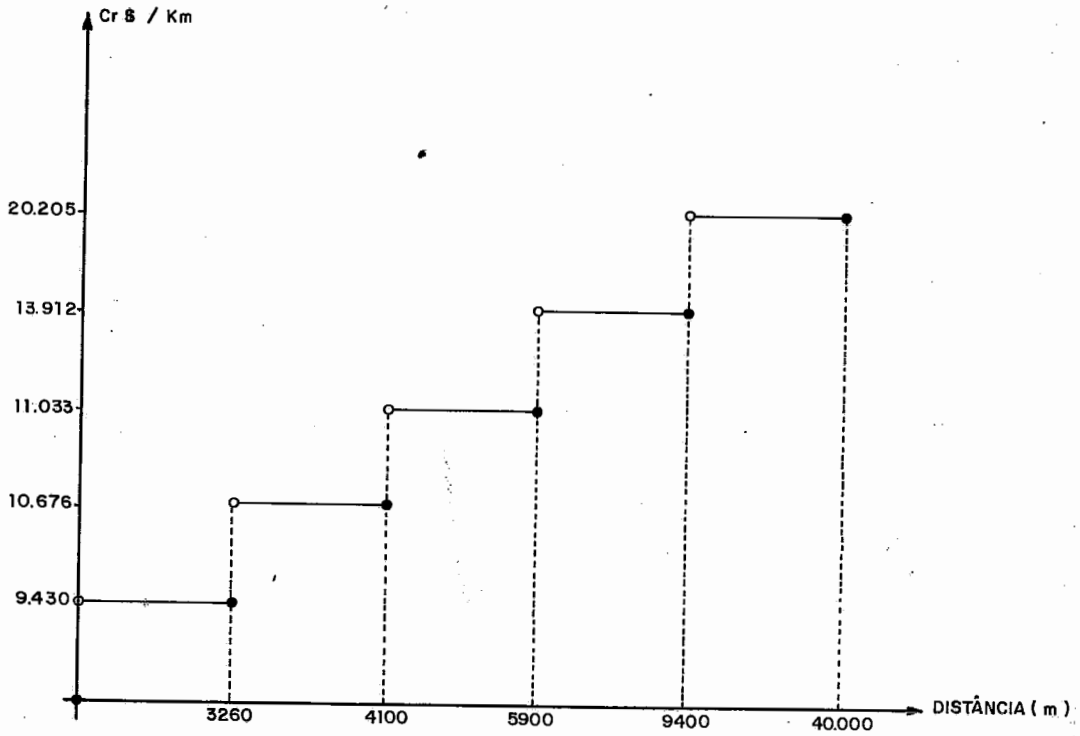


Fig. 9 - Custo Unitário do par/km para Rede de Assinantes

Custo Unitário do par/km para rede de troncos

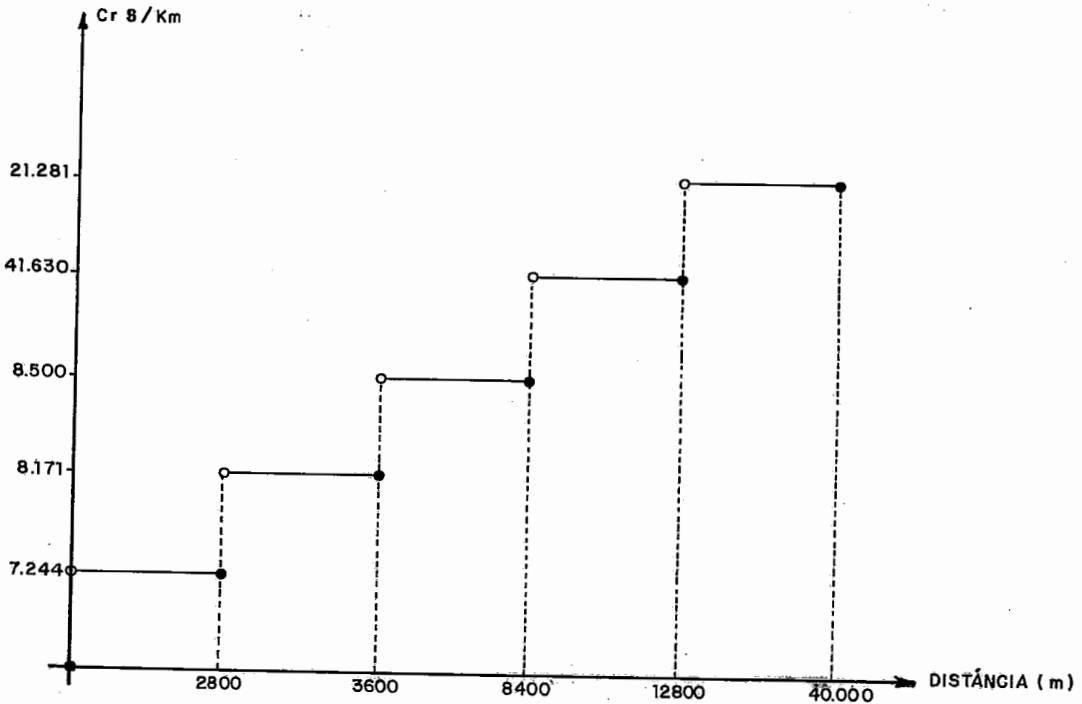


Fig. 10 - Custo Unitário do par/km para Rede de Troncos

Fator de atualização de custos

em 1985: 1.

em 1990: 0.5674

em 2000: 0.1827

Estações "oferecidas" a cada etapa

j \ t	0	1	2	3
1		X	X	X
2		X	X	X
3				X

↑
ETAPA DE REFERENCIA

↑
ETAPAS DE PLANEJAMENTO

Fig. 11 - "Oferecimento" de Estações

TELEFJ-VF-VPCS-VPCSC1 ... 25/03/81

MATRIZ DE G3TACULJS

0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	C

1234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

```

001 ++++++C0000+++++
002 ++++++U+000+++++
003 ++++++0+0+++++
004 ++++++000+++++
005 ++++++C00+00+++++
006 ++++++C0000+00+++++
007 ++++++JCC+C000000+++++
008 ++++++0+0000000+++++
009 ++++++00000+00000+++++
010 ++++++0000+00+00000+++++
011 ++++++0+000+00+00+++++
012 ++++++0+000+0+0+++++
013 ++++++00+00+00+++++
014 ++++++0+00+00+++++
015 ++++++0+0+C+0+++++
016 ++++++0+0+0+0+++++
017 ++++++0000+00+0+++++
018 ++++++0+++++
019 ++++++0+++++
020 ++++++000+00000+++++
021 ++++++00000+C+++++
022 ++++++0+0000+++++
023 ++++++0+0+C+0+++++
024 ++++++0+0+0+++++
025 ++++++C+++++0+++++
026 ++++++C+++++0+++++
027 ++++++0C+++++0+++++
028 ++++++C0C+++++0+++++
029 ++++++C000000+0+000+++++
030 ++++++C00000000+C+0+++++
031 ++++++0000C+0000000+C+0+++++
032 ++++++0000000+000+0+00+++++
033 ++++++00000000+00000000+++++
034 ++++++00000+00000000000+++++
035 ++++++0+0+00+000+0+++++
036 ++++++0+0000+00000+++++
037 ++++++00+00+00000+++++
038 ++++++00000000000+++++
039 ++++++000+00000+C+0+++++
040 ++++++00+0+00000000+++++
041 ++++++00+0+0C+000000+0000+++++
042 ++++++0+00000+00000+0+000+++++
043 ++++++0+00000+00+0+0000+++++
044 ++++++000+00000+00+0+++++
045 ++++++00000+0000+++++
046 ++++++00000+0000+++++
047 ++++++00000000+0+0+++++
048 ++++++000000000000+++++
049 ++++++0000000000000+++++
050 ++++++000000000+++++

```

TELEFJ-VF-VPCS-VPCSC1 ... 25/03/81

MATRIZ DE G3TACULUS

1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

1234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

```

051 ++++++000000000+++++
052 ++++++000+00000+++++
053 ++++++000+00+++++
054 ++++++00+++++
055 ++++++
056 ++++++

```


TELERJ-VF-VPCS-VPCSC1 ... 14/08/81

CARACTERISTICAS GERAIS DAS ESTAGGES NA ETAPA 1

NC	IDT	CAPACIDADE		AREA		CUSTOS		LCC	FIX
		INF	SUP	FIX	VAR	FIX	VAR		
1	A	404	3500	1500.000	0.000	8209225	26052	1416	LIVRE
2	B	1500	10000	1500.000	0.000	60059301	29121	2329	LIVRE

CARACTERISTICAS GERAIS DAS ESTAGGES NA ETAPA 2

NC	IDT	CAPACIDADE		AREA		CUSTOS		LCC	FIX
		INF	SUP	FIX	VAR	FIX	VAR		
1	A	404	3500	1500.000	0.000	8209225	26052	1416	LIVRE
2	B	2000	10000	1500.000	0.000	60059301	29121	2329	LIVRE

CARACTERISTICAS GERAIS DAS ESTAGGES NA ETAPA 3

NC	IDT	CAPACIDADE		AREA		CUSTOS		LCC	FIX
		INF	SUP	FIX	VAR	FIX	VAR		
1	A	404	4000	1500.000	0.000	8209225	26052	1416	LIVRE
2	B	2000	10000	1500.000	0.000	60059301	29121	2329	LIVRE
3	C	404	3500	1500.000	0.000	8209225	26052	379	LIVRE

CRPD-RJ

TELERJ-VP-VPCS-VPCSG1 ... 14/08/81

CRPD-RJ

CUSTOS DE COMUTACAO ENTRE PARES DE ESTACAS NA ETAPA 1

PARA
DE -----
1 2

CRPD-RJ

1 C 70000
2 70000 C

CRPD-RJ

CRPD-RJ

CUSTOS DE COMUTACAO ENTRE PARES DE ESTACAS NA ETAPA 2

PARA
DE -----
1 2

CRPD-RJ

1 C 70000
2 70000 C

CRPD-RJ

CRPD-RJ

CUSTOS DE COMUTACAO ENTRE PARES DE ESTACAS NA ETAPA 3

PARA
DE -----
1 2 3

CRPD-RJ

1 C 70000 70000
2 70000 C 70000
3 70000 70000 C

CRPD-RJ

CRPD-RJ

TELERJ-VP-VPCS-VPCSO1 ... 14/08/81 TRAFEGC/TRCNCCS ENTRE ESTACCES - ETAPA 1

PARA
DE

A B

A 20.647 21.980
C 31

B 21.980 23.400
31 C

TELERJ-VP-VPCS-VPCSO1 ... 14/08/81 TRAFEGC/TRCNCCS ENTRE ESTACCES - ETAPA 2

PARA
DE

A B

A 36.537 35.094
C 46

B 35.094 33.298
46 C

TELERJ-VP-VPCS-VPCSO1 ... 14/08/81 TRAFEGC/TRCNCCS ENTRE ESTACCES - ETAPA 3

PARA
DE

A B C

A 38.119 60.818 15.690
C 75 24

B 60.818 97.032 25.032
75 C 35

C 15.690 25.032 6.458
24 35 C

TELERJ-VP-VPCS-VPCSO1 ... 14/08/81 CUSTOS ATUALIZADOS POR PAR DE ESTAGOS (TRCNC/CCMUT/TCT) - ETAPA 1

PARA		
CE	A	B
A	C,CC 1633700000,CC C,CC 2170000,CC C,CC 1633870000,CC	
B	1633700000,CC 2170000,CC 1633870000,CC	C,00 C,CC C,00

TELERJ-VP-VPCS-VPCSO1 ... 14/08/81 CUSTOS ATUALIZADOS POR PAR DE ESTAGOS (TRCNC/CCMUT/TCT) - ETAPA 2

PARA		
CE	A	B
A	C,GO 448525700,CC C,CC 555770,CC C,CC 449125470,CC	
B	448525700,CC 555770,CC 449125470,CC	C,CC C,CC C,GO

TELERJ-VP-VPCS-VPCSO1 ... 14/08/81 CUSTOS ATUALIZADOS POR PAR DE ESTAGOS (TRCNC/CCMUT/TCT) - ETAPA 3

PARA			
CE	A	B	C
A	C,CC 279220410,CC C,CC 370881,CC C,CC 279591291,CC	279220410,CC 370881,CC 279591291,CC	250712240,CC 306936,CC 251019176,CC
B	279220410,CC 370881,CC 279591291,CC	C,CC C,CC C,CC	1122618420,CC 447615,CC 1123066035,CC
C	250712240,CC 306936,CC 251019176,CC	1122618420,CC 447615,CC 1123066035,CC	C,CC C,CC C,CC

1. LINHAS DE ASSINANTES

ETAPA 1 ...	66101312200,00
ETAPA 2 ...	274024642884,00
ETAPA 3 ...	171522449000,00

4. CUSTOS FIXOS

ETAPA 1 ...	72318526,00
ETAPA 2 ...	0,00
ETAPA 3 ...	1773875,00

TCTAL 110657021354,00

TCTAL 74092401,00

2. LINHAS TRUNKS

ETAPA 1 ...	3267400000,00
ETAPA 2 ...	697059400,00
ETAPA 3 ...	3385102140,00

5. CUSTOS COM ASSINANTES

ETAPA 1 ...	80388768,00
ETAPA 2 ...	28190933,00
ETAPA 3 ...	34464176,00

TCTAL 7549561540,00

TCTAL 143043877,00

3. CANCELACAO ENTRE ESTACAS

ETAPA 1 ...	4340000,00
ETAPA 2 ...	1151540,00
ETAPA 3 ...	2250864,00

6. TOTAL POR ETAPA

ETAPA 1 ...	65525759454,00
ETAPA 2 ...	28329506158,00
ETAPA 3 ...	20575835965,00

TCTAL 7782404,00

TCTAL 118431501616,00

VII - CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

O modelo exposto constitui-se num instrumento de avaliação e decisão para o planejamento, a médio e longo prazo, da expansão de sistemas telefônicos em áreas de porte médio, partindo, se for o caso, de uma configuração já existente e definindo as configurações futuras, a cada etapa de planejamento, com relação à localização temporal e espacial de novas estações e esquemas de filiação de assinantes.

A individualização dos custos relacionados às estações permite que dentro de um mesmo problema, se considerem diferentes tipos de estações, de acordo com a concentração de assinantes nas várias subáreas que integram a área em estudo.

A suposição de que os assinantes são ligados diretamente às estações, por um par que percorre o menor caminho entre ambos, apesar de não corresponder exatamente à realidade, é válida na determinação da estação à qual o assinante será filiado, escolha que depende fundamentalmente da distância do assinante às estações.

O método de solução adotado não pretende apontar a solução ótima para o modelo a nível de detalhes do planejamento e sim, fornecer as linhas gerais a serem seguidas na expansão do sistema telefônico sendo considerado. O fato do entroncamento não ser considerado na definição da localização temporal das estações pode acarretar um falso incentivo à criação de novas estações. Porém, é possível contornar esta fraqueza oferecendo-se, ao modelo, alternativas mais restritas em termos do número de estações, partindo de uma solução obtida anteriormente, pois, apesar do custo do entroncamento não participar da resolução do problema de localização temporal das estações, influencia na decisão referente à localização espacial das estações, sendo computado no custo global da solução.

Os principais limitantes quanto ao porte da área a ser submetida ao modelo consistem no número de variáveis inteiras (que depende da quantidade de estações novas oferecidas a cada etapa) e no número total de variáveis (que depende do número de grupos de qua -

drículas, do número total de estações e do número de etapas de planejamento) que podem inviabilizar a resolução computacional do subproblema 1 pela necessidade de um tempo muito grande de processamento.

O número de variáveis inteiras toleradas pelo programa pode ser aumentado desmembrando-se o método de solução do subproblema 1 em fases, de tal forma que, em cada uma delas, só é exigida a inteireza das variáveis $e(j, \bar{t})$ onde \bar{t} assume em cada fase, respectivamente, os valores $\bar{t}, \bar{t}-1, \dots, 2, 1$. As estações que o modelo optasse por não utilizar, em uma determinada etapa de planejamento, ficariam automaticamente excluídas das etapas anteriores.

Este procedimento possibilitaria uma utilização mais abrangente do modelo, permitindo o processamento de áreas com maior porte e, inclusive, diminuindo o tempo de computação necessário à solução do problema de planejamento da expansão de qualquer área que seja tratável pelo modelo apresentado.

APÊNDICE I - CÁLCULO DE DISTÂNCIAS

Este apêndice descreve a adaptação do Algoritmo de Dijkstra de "Busca do Menor Caminho em Grafos" para o cálculo das menores distâncias de uma quadrícula g_0 , a todas as quadrículas pertencentes ao conjunto I^* das representantes do grupo, conceito definido no item 3.4. O procedimento é repetido para todas as quadrículas g onde se deseje examinar a possibilidade de localização de uma estação nova.

A seguir apresenta-se o conceito de "quadrícula vizinha", explicitado para facilitar a compreensão do algoritmo.

A quadrícula i' é dita vizinha da quadrícula i , que não contem obstáculos, se e somente se:

- (i) i' não contem obstáculos
- (ii) i' está localizada imediatamente acima (norte), abaixo (sul), à esquerda (oeste) ou à direita (leste) da quadrícula i . Neste caso $d(i, i') = \delta_x$ ou $d(i, i') = \delta_y$

Algoritmo para o Cálculo das Distâncias de g_0 a todas as Quadrículas de I^*

Sejam

I_1 = conjunto das quadrículas para as quais a distância ainda não foi calculada

A = conjunto dos abertos

F = conjunto dos fechados

$N_i = \begin{cases} \text{vizinha da quadrícula } i, \text{ ao norte (acima), se a vizinha existir} \\ \text{tir} \\ 0, \text{ em caso contrário} \end{cases}$

$S_i = \begin{cases} \text{vizinha da quadrícula } i, \text{ ao sul (abaixo), se a vizinha existir} \\ \text{tir} \\ 0, \text{ em caso contrário} \end{cases}$

$L_i = \begin{cases} \text{vizinha da quadrícula } i, \text{ a leste (direita), se a vizinha existir} \\ \text{existir} \\ 0, \text{ em caso contrário} \end{cases}$

$\theta_i = \begin{cases} \text{vizinha da quadrícula } i, \text{ a oeste (esquerda), se a vizinha} \\ \text{existir} \\ 0, \text{ em caso contrário} \end{cases}$
 $c_i = \text{menor distância da quadrícula } g_0, \text{ à quadrícula } i, \text{ encontrada}$
 até o momento

Passo 0: Faça $I_1 = I^*$, $A = \{g_0\}$, $F = \phi$ e $c_{g_0} = 0$

Passo 1: Se $A = \phi$, então vá para o passo 13

Passo 2: Escolha $i \in A$, tal que $c_i = \min_{a \in A} \{c_a\}$ e faça $F = F \cup \{i\}$, $A = A - \{i\}$

Passo 3: Se $i \in I_1$, então faça $d(g_0, i) = c_i$, $I_1 = I_1 - \{i\}$

Passo 4: Determine N_i , S_i , L_i , θ_i

Passo 5: Se $N_i = 0$ ou $N_i \in F$, então vá para o passo 7

Passo 6: Se $N_i \in A$, então faça $c_{N_i} = \min\{c_{N_i}, c_i + \delta_y\}$. Se não, faça $A = A \cup \{N_i\}$, $c_{N_i} = c_i + \delta_y$

Passo 7: Se $S_i = 0$ ou $S_i \in F$, então vá para o passo 9

Passo 8: Se $S_i \in A$, então faça $c_{S_i} = \min\{c_{S_i}, c_i + \delta_y\}$. Se não, faça $A = A \cup \{S_i\}$, $c_{S_i} = c_i + \delta_y$

Passo 9: Se $L_i = 0$ ou $L_i \in F$, então vá para o passo 11

Passo 10: Se $L_i \in A$, então faça $c_{L_i} = \min\{c_{L_i}, c_i + \delta_x\}$. Se não, faça $A = A \cup \{L_i\}$, $c_{L_i} = c_i + \delta_x$

Passo 11: Se $\theta_i = 0$ ou $\theta_i \in F$, então vá para o passo 1

Passo 12: Se $\theta_i \in A$, então faça $c_{\theta_i} = \min\{c_{\theta_i}, c_i + \delta_x\}$. Se não, faça $A = A \cup \{\theta_i\}$, $c_{\theta_i} = c_i + \delta_x$. Vá para o passo 1.

Passo 13: Se $I_1 = \phi$, então todas as distâncias de interesse foram calculadas. Se não, as quadrículas que restaram em I_1 estão rodeadas de obstáculos, não sendo possível atingi-las através de cabos telefônicos. Neste caso, a matriz de obstáculos deve ser reavaliada. Pare.

APÊNDICE II - CÁLCULO DO NÚMERO DE TRONCOS ENTRE PARES DE ESTAÇÕES

A probabilidade de uma chamada telefônica ser rejeitada ao chegar a um grupo de n meios, segundo um processo de Poisson de parâmetro a , para um tempo unitário de retenção, se exprime, na teoria do tráfego telefônico, pela função de Erlang, ou seja

$$E(n, a) = \frac{a^n/n!}{\sum_{j=0}^n a^j/j!}$$

No presente caso, trata-se de calcular o número de meios entre pares de estações telefônicas, dados o tráfego entre elas e a probabilidade máxima admissível de que uma chamada se perca por falta de meios para ser escoada.

Os estudos de dimensionamento de rotas, fazem uso das derivadas da função de perda, com respeito ao número de meios e ao tráfego, tendo, conseqüentemente, estimulado a aplicação da função de perda em caso de número contínuo de meios.

Jagerman [3] generalizou este conceito para o caso de parâmetros da função de perda, z e α , complexos, obtendo uma função transcendente $E(z, \alpha)$ que permite a utilização de métodos de análise complexa na obtenção de representações exatas e aproximadas e expansões assintóticas da função.

A seguir, enuncia-se o teorema cujo resultado é empregado no algoritmo de resolução do subproblema 2.

$$\text{TEO: } E(z, z+c\sqrt{z})^{-1} \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(c) z^{-(j-1)/2}, z \rightarrow \infty, |\arg z| < \frac{\pi}{2}, c \in \mathbb{R}$$

onde

$$a_0(c) = e^{c^2/2} \int_c^{\infty} e^{-u^2/2} du$$

$$a_1(c) = 2/3 + c^2/3 - c^3/3 \cdot a_0(c)$$

$$a_2(c) = -c^5/18 - 7c^3/36 + c/12 + (c^6/18 + c^4/4 + 1/12) \cdot a_0(c)$$

Truncando a série no 4º termo, chega-se à seguinte aproximação

$$E(n, a)^{-1} \sim a_0(c) \sqrt{n + a_1(c) + a_2(c)} / \sqrt{u}$$

resolvida pelo método iterativo de Newton-Raphson.

BIBLIOGRAFIA

1. RAPP, Y., Planning of exchange locations and boundaries in multi-exchange networks, Ericsson Technics, nº2, 1962.
2. GONZAGA, C.C., Apostilas de Busca de Caminhos em Grafos, COPPE, 1978.
3. JAGERMAN, D.L., Some properties of the Erlang loss function, BSTJ, vol.53, nº3, março 74.
4. OLIVEIRA, G.C. de, Um problema de planejamento de redes telefônicas, Rio de Janeiro, COPPE, 1975, 84 p., Tese (M.Sc.) Universidade Federal do Rio de Janeiro.
5. MORENO, A. de O., Planejamento de redes telefônicas - determinação do circuito de junção, São José dos Campos, ITA, 1974, 97 p., Tese (M.Sc.) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica.
6. International Business Machines, Mathematical programming system - extended (MPSX) and generalized upper bounding (GUB) program description, v.1.4., Ed. White Plains, 1972, 344 p. (SH20-0968-1).
7. -----, Mathematical programming system extended (MPSX) mixed integer programming (MIP) program description, v.1.4., 2 ed., White Plains, 1972, 152 p. (SH20-0908-1).
8. DANTZIG, G.B., Linear programming and extensions, Princeton, Princeton Univ., 1963, 672 p.
9. LASDON, L.S., Optimization theory for large scale systems, London, Macmillan, 1972, 523 p.
10. HU, T.C., Integer programming and network flows, Reading, Addison-Wesley, 1970, 452 p.
11. EILON, S. et Alii, Distribution management. Mathematical modelling and practical analysis, London, Griffin, 1971, 240 p.
12. MACULAN, Fº, N., Programação Linear Inteira, Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 1978.