



RECOBRIMENTO ELIPSOIDAL UTILIZANDO ESFERAS DE DIFERENTES RAIOS

Ana Flavia Uzeda dos Santos Macambira

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Nelson Maculan Filho

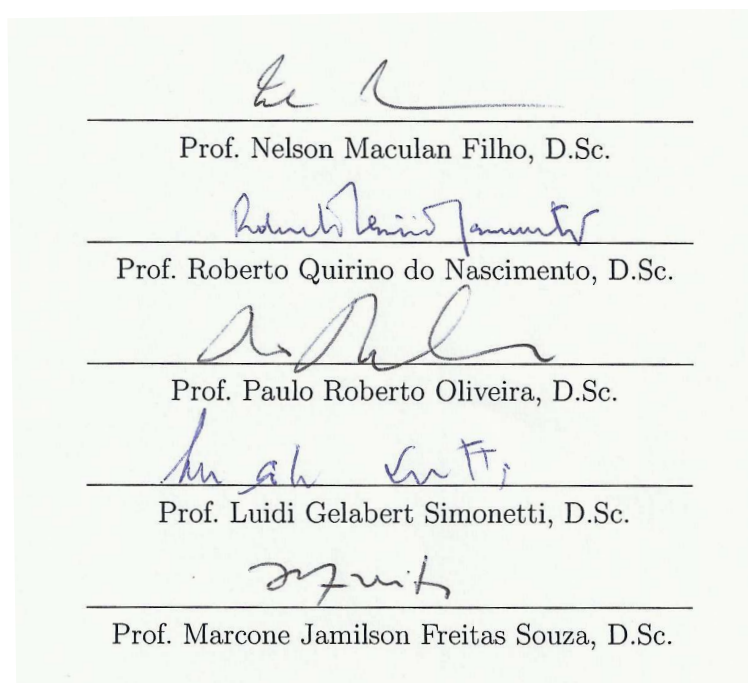
Rio de Janeiro
Outubro de 2012

RECOBRIMENTO ELIPSOIDAL UTILIZANDO ESFERAS DE DIFERENTES
RAIOS

Ana Flavia Uzeda dos Santos Macambira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:



Prof. Nelson Maculan Filho, D.Sc.

Prof. Roberto Quirino do Nascimento, D.Sc.

Prof. Paulo Roberto Oliveira, D.Sc.

Prof. Luidi Gelabert Simonetti, D.Sc.

Prof. Marcone Jamilson Freitas Souza, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
OUTUBRO DE 2012

Macambira, Ana Flavia Uzeda dos Santos

Recobrimento Elipsoidal Utilizando Esferas de Diferentes Raios/Ana Flavia Uzeda dos Santos Macambira.

– Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2012.

X, 57 p. 29, 7cm.

Orientador: Nelson Maculan Filho

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 55 – 57.

1. Programação Geométrica. 2. Métodos de Pontos Interiores. 3. Otimização Discreta. 4. Otimização Global. 5. Gamma Knife. 6. Problema de Localização de Facilidades. I. Maculan Filho, Nelson. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*Aos meus pais Eda e Francisco;
Ao meu irmão Flávio e à sua
família.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por tudo e a todo momento. Esse foi um passo que eu considerava impossível de realizar no início de 2008.

Aos meus pais, mais uma vez, por todo apoio e amor.

Ao Prof. Nelson Maculan Filho, por ter me incentivado, em julho de 2008, a ingressar no doutorado e também por todo apoio no decorrer do mesmo.

Ao Prof. Roberto Quirino do Nascimento, que aceitou ser meu orientador aqui em João Pessoa, pelo apoio e pela dedicação intensa a este trabalho.

Ao prof. Lucídio dos Anjos Formiga Cabral, que me incentivou muito a ir ao Rio conversar com o Prof. Maculan.

A minha amiga Rosa Maria Figueiredo Poss, pelo incentivo e pelas conversas em horas decisivas com opiniões valiosas.

A Viviane Khöler pela paciência e apoio.

A Renan Vicente Pinto pela empolgação ao estudar e descobrir novos aspectos do problema e pela companhia nas aulas de forró na hora do almoço no Bloco A.

A Laura Patuzzi e Virginia Costa que sempre me apoiaram.

A Jesus Ossian que sempre me ajudou quando eu precisei.

A Maria de Fátima Cruz Marques, que me ajudou muito mesmo e teve muita paciência comigo.

A Carolina Maria de Vilar Moreira Vieira, a Calóu, pelas caronas, paciência e por ter esse jeito acolhedor.

Aos meus amigos Clarissa Borges, Manoel Fernandes, Roberta Guedes e Leandro Figueiredo, que estiveram sempre ao meu lado neste período.

A Gilberto Farias que me ajudou na implementação do GRASP que acabou não fazendo parte deste trabalho.

A Kely e Felipe que contribuíram muito com as figuras e me ajudaram com o Latex.

A todos os professores do PESC/COPE-UFRJ.

A todos os Funcionários do PESC/COPPE-UFRJ: Adilson, Ari, Cláudia, Deda, Gutierrez, Itamar, Lourdes, Mercedes, Rosa, Sônia e Solange.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

RECOBRIMENTO ELIPSOIDAL UTILIZANDO ESFERAS DE DIFERENTES RAIOS

Ana Flavia Uzeda dos Santos Macambira

Outubro/2012

Orientador: Nelson Maculan Filho

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O problema do recobrimento elipsoidal consiste em cobrir um elipsóide com esferas cujos raios pertencem a um conjunto discreto. A natureza discreta dos raios das esferas é uma das dificuldades inerentes a este problema ao tentarmos resolvê-lo e outra dificuldade é a de garantirmos que todo ponto do elipsóide seja coberto por pelo menos uma esfera. Apesar das dificuldades, uma boa razão para o estudo deste problema é a sua provável aplicação na configuração de máquinas de raios Gama, utilizadas em tratamentos de tumores cerebrais. Este problema é semi-infinito não linear discreto. Neste trabalho apresentamos duas abordagens para resolvê-lo: em uma aplicamos a Programação Geométrica a um modelo não linear inteiro misto e na outra fazemos uma aproximação do problema original por um problema de programação linear binário com características de um problema de localização onde os facilitadores são os baricentros de um conjunto de pontos na fronteira do elipsóide. As duas abordagens utilizadas produziram resultados excelentes.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ELLIPSOIDAL COVERING USING SPHERES OF DIFFERENT RADII

Ana Flavia Uzeda dos Santos Macambira

October/2012

Advisor: Nelson Maculan Filho

Department: Systems Engineering and Computer Science

The ellipsoidal covering problem consists in covering an ellipsoid with spheres whose radii belong to a discrete set. The discrete nature of the radii of the spheres is one of the difficulties that are inherent to this problem when we try to solve it. Another difficulty is to ensure that every point of the ellipsoid is covered by at least one sphere. Despite these difficulties, a good reason to study this problem is its probable application in configuring gamma ray machines, used in brain tumors treatments. This problem is a semi infinite non linear discrete one and in order to solve it we present two approaches in this work: in one of them we apply Geometric Programming to a nonlinear mixed integer model and in the other one we make an approximation to the original problem using a binary linear programming one, which has characteristics of a location problem, where the facilities are the barycentres of a set of points at the border of the ellipsoid. Both of the approaches mentioned above produced excellent results.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Organização da tese	2
2	O problema de cobertura de um conjunto convexo com esferas de raios distintos: uma revisão bibliográfica	4
2.1	Uma abordagem de Otimização Global para o problema de empacotamento de esferas com raios distintos em \mathbb{R}^3	5
2.2	Configuração ótima de máquinas de raios gamma em unidades de radiocirurgia: um subproblema de recobrimento esférico	10
3	O problema do recobrimento elipsoidal discreto	16
3.1	O Problema de Recobrimento Elipsoidal Discreto (PRED)	16
3.1.1	Avaliação do nível de recobrimento em um recobrimento elipsoidal discreto fraco(REDF)	18
4	Abordagem utilizando a Programação Geométrica	21
4.1	Modelo	21
4.1.1	Quantidade de Esferas	23
4.2	Teoria para a solução do modelo	24
4.2.1	O problema primal de programação geométrica posinomial	25
4.2.2	O Problema de Programação Geométrica na forma convexa	26
4.2.3	O problema dual de programação geométrica posinomial	26
4.2.4	Programação Geométrica Generalizada	28
4.2.5	Programação Geométrica Signomial	28
4.2.6	O problema de Programação Geométrica Signomial Misto(PGSM)	29
4.2.7	Condensação em programação geométrica signomial	29
4.2.8	Métodos de Pontos Interiores para Programação Geométrica	30
4.2.9	Complexidade Polinomial em Programação Geométrica	31
4.2.10	Métodos Numéricos	32

4.2.11	Uma Estratégia Contínua para a Resolução de Problemas Signomiais Discretos	33
4.2.12	Modelo de Programação Geométrica Signomial	35
4.3	Um algoritmo para resolver o problema de recobrimento elipsoidal discreto fraco (<i>PREDF</i>)	35
5	Uma abordagem linear inteira	37
6	Resultados Computacionais	40
6.1	Abordagem de Programação Geométrica	40
6.1.1	Pós Otimização	41
6.2	Abordagem de Programação Linear	48
7	Considerações Finais	54
	Referências Bibliográficas	55

Notações

$c = (x_0, y_0, z_0)$ é o centro do elipsóide;

$C(w, r)$ é o cubo de centro w e inscrito na esfera de raio r ;

$D(w, r)$ é o dodecaedro de centro w e inscrito na esfera de raio r ;

$E(c, R)$ é o elipsóide de centro c e raio (R_x, R_y, R_z) , onde $R = \text{diag}(R_x, R_y, R_z)$;

γ é o nível de interseção entre duas esferas diferentes;

r_i é o raio da i -ésima esfera, $i = 1, \dots, n$;

R é a matriz cuja diagonal são os raios do elipsóide;

R_x, R_y, R_z são os raios do elipsóide;

$S(w, r)$ é a esfera de centro w e raio r ;

θ é a razão entre o volume de uma esfera e o volume do cubo inscrito
ou do dodecaedro inscrito;

$v^t w$ é o produto interno padrão entre os vetores v e w , $v^t w = \sum_{i=1}^n v_i w_i$;

$\|v\|$ é a norma euclideana; $\sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$;

$\|v\|_\infty$ é a norma do máximo $\|v\|_\infty = \max \{|v_1|, \dots, |v_n|\}$;

$\text{Vol}(S)$ é o volume do sólido S ;

$w_i = (w_i^x, w_i^y, w_i^z)$ é o centro da i -ésima esfera;

$\aleph_0(C)$ é a cardinalidade do conjunto C ;

$\bar{R} = \max \{R_x, R_y, R_z\}$.

Capítulo 1

Introdução

O problema de preenchimento elipsoidal a ser estudado neste trabalho consiste em preenchermos um elipsóide de raios dados, com esferas de raios distintos, porém conhecidos. Este problema tem como principal aplicação a configuração de máquinas de raios gamma, utilizadas para tratamento de tumores cancerígenos. O fato de tentarmos preencher um elipósoide com esferas surge da observação de que a menor região que abriga os tumores pode ser aproximada por este sólido e a radiação emitida alcança o tecido em uma forma semelhante a uma esfera.

Ao estudarmos este preenchimento e visando obtê-lo de forma satisfatória, devemos observar que as seguintes condições sejam satisfeitas: as esferas devem permanecer dentro do elipsóide, não pode haver uma interseção indesejável entre elas, os raios devem ter os tamanhos especificados e todo ponto dentro do elipsóide deve pertencer a alguma esfera. Cada uma destas restrições possui uma justificativa dentro da aplicação real do problema que já foi citada. A primeira surge do fato de que qualquer esfera que saia do elipsóide significa que a radiação está incidindo sobre um tecido saudável. As interseções indesejáveis são aquelas em que as esferas se superpõem quase totalmente ou totalmente. Na realidade, as interseções devem ser minimizadas tanto quanto possível, pois significam doses duplas de radiações. Os raios devem ter os tamanhos especificados porque na aplicação real, existem quatro tipos de radiações que atingem o tumor em forma de esferas de raios 2, 4, 7 e 9. A última restrição significa na realidade que todo ponto do tumor deve ser alcançado por pelo menos um tipo de radiação.

As restrições descritas no parágrafo acima contribuem para que qualquer tipo de problema de otimização que as inclua seja um problema com restrições quadráticas convexas, uma quantidade infinita de restrições quadráticas não convexas e restrições de discretização, caracterizando-o como um problema não linear não convexo semi-infinito com variáveis contínuas e discretas. As abordagens existentes na literatura para resolver problemas com essas características são técnicas de otimização global aplicadas após uma linearização das restrições não convexas juntamente com

técnicas de otimização discreta. Devido à estrutura das restrições envolvidas, ao investigarmos formas adequadas para solução deste problema observamos uma que possivelmente traria resultados satisfatórios: a programação geométrica. Como precisamos que algumas variáveis sejam inteiras, teríamos que aliar a programação geométrica a algum método que produzisse uma solução cujos raios das esferas tivessem os valores especificados e pudesse contemplar o caráter semi-infinito aqui exposto. Neste sentido, propomos neste trabalho e em [17] uma abordagem utilizando a programação geométrica para resolver o problema de recobrimento elipsoidal juntamente com técnicas adicionais para melhorar o desempenho numérico das implementações que se fizeram necessárias. Esta abordagem pode ser observada no trabalho [17]. Também apresentamos uma outra abordagem na qual utilizamos o Problema de Localização de Facilidades para identificar a posição dos centros das esferas, que fazem as vezes dos facilitadores e que atendem localidades (pontos localizados na fronteira) do elipsóide. Desta forma, nenhuma parte do elipsóide pode ficar sem ser atendida pelos facilitadores, o que em teoria é o um dos objetivos que desejamos para a solução do problema: que nenhuma parte do elipsóide fique sem ser alcançada por pelo menos uma esfera. Com esta abordagem obtivemos um modelo, que pode ser consultado também em [16] semelhante ao encontrado em [13], com a diferença de que o apresentado neste trabalho é totalmente binário e possui muito menos variáveis.

Com relação à literatura específica sobre recobrimento elipsoidal escolhemos os trabalhos [25] e [13] que julgamos essenciais para o início deste estudo. Ao fazermos uma análise dos mesmos nos inteiramos das dificuldades inerentes ao problema estudado para então propor a linha de ação que foi desenvolvida neste trabalho.

1.1 Organização da tese

Este trabalho está delineado da seguinte forma: no capítulo 2, que denomina-se “O problema de Preenchimento de um politopo com esferas de raios distintos: uma revisão bibliográfica” apresentamos as abordagens propostas nos trabalhos de [25] e de [13]. No capítulo 3 que denomina-se “O problema de Preenchimento elipsoidal Discreto” apresentamos o modelo que julgamos ser razoável para o problema de preenchimento elipsoidal, que é um problema de otimização não convexo semi infinito. Neste capítulo também encontram-se duas definições importantes para o trabalho: uma que apresenta o problema original e outra que apresenta um problema alternativo para o problema semi-infinito, o qual denominamos versão fraca, e a formulação das condições para que o problema fraco resolva o problema original. No capítulo 4, denominado “Programação Geométrica”, apresentamos fundamentos e conceitos básicos de programação geométrica signomial e alguns métodos de pontos

interiores utilizados na solução desta classe de problemas, e também uma técnica que chamamos de “Versão Contínua” ou “Formulação Contínua” que pretendemos utilizar para resolver problemas de programação geométrica mistos. No capítulo 5 há uma proposta de solução para o problema fraco desenvolvido no capítulo 4 utilizando a programação geométrica signomial. O capítulo 5 apresenta o modelo linear inteiro que foi desenvolvido utilizando a idéia do problema de Localização de Facilidades, onde as esferas representam as facilidades que atendem regiões do elipsóide. No capítulo 6 mostramos os resultados computacionais relativos aos dois modelos. Por fim, no capítulo 7, fazemos as considerações finais e apresentamos trabalhos que devem ser desenvolvidos futuramente.

Capítulo 2

O problema de cobertura de um conjunto convexo com esferas de raios distintos: uma revisão bibliográfica

A cobertura de um politopo com esferas de raios distintos é um problema de viabilidade, pois desejamos encontrar a localização dos centros e os tamanhos dos raios das esferas de forma que todas elas estejam contidas no politopo e que a sua união preencha completamente este recipiente. Logo, encontrando uma solução que satisfaça estas condições, resolvemos a questão. Porém, podemos também pensar em como alcançar estes objetivos utilizando o menor número de esferas possível. Esta abordagem nos conduz a um problema de otimização. Neste capítulo, apresentaremos dois trabalhos nos quais as diferentes abordagens utilizadas pelos autores para o tratamento deste problema de cobertura deram origem a diferentes modelos. No intuito de facilitar o entendimento dos trabalhos que serão expostos a seguir, ressaltamos que ambos são modelados como problemas de otimização e que possuem:

- um conjunto de restrições que exprimem a permanência de cada esfera dentro do recipiente;
- um conjunto de restrições que exprimem o relacionamento entre as esferas;
- um conjunto de restrições que exprimem o caráter discreto dos raios;

Este capítulo divide-se em duas seções: a primeira relativa a um trabalho sobre empacotamento, no qual o objetivo é maximizar o volume das esferas colocadas dentro de um paralelepípedo, sendo que a única interseção possível entre elas é dada por um ponto, o ponto onde se tocam. O modelo apresentado em [25] é muito semelhante

ao utilizado nesta tese. A segunda seção apresenta um trabalho sobre cobrimento, porém o recipiente a ser coberto é um paralelepípedo, enquanto que nesta tese o recipiente a ser coberto é um elipsóide. O primeiro modelo apresentado em [13] é não convexo não linear inteiro misto. Os autores propõem várias reformulações e chegam a um modelo linear inteiro misto.

2.1 Uma abordagem de Otimização Global para o problema de empacotamento de esferas com raios distintos em \mathbb{R}^3

No artigo intitulado Global Optimization Approach to Unequal Sphere Packing Problems in 3D [25], os autores produziram um modelo de otimização quadrática não convexo e apresentaram métodos de solução baseados na técnica Branch and Bound. O recipiente considerado aqui é um politopo convexo $P \subset \mathbb{R}^3$ dado por: $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a_mx + b_my + c_mz \geq d_m, m = 1, \dots, M\}$, onde $M > 0$ é a quantidade de inequações que definem P .

A seguir, apresentamos as variáveis e parâmetros utilizados no modelo:

- $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k \mid k = 1, \dots, K\}$ o conjunto contendo os valores dos raios admissíveis para as esferas;
- L a quantidade máxima de esferas a serem postas dentro do recipiente;
- $(x_i, y_i, z_i) \mid i = 1, \dots, L$ o centro da i -ésima esfera; e
- $t_{ik}, \mid i = 1, \dots, L, k = 1, \dots, K$ definida da seguinte forma: $t_{ik} = 1$ se a esfera i tem raio k e $t_{ik} = 0$ caso contrário.

Uma vez definidas as variáveis e parâmetros, o modelo proposto encontra-se a seguir.

$$(P1) \quad \max \left(\frac{4}{3} \right) \pi \sum_{i=1}^L \sum_{k=1}^K r_k^3 t_{ik}$$

Sujeito a:

$$\frac{|a_mx_i + b_my_i + c_mz_i - d_m|}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2 + c_m^2}} \geq \sum_{k=1}^K r_k t_{ik} \quad (2.1)$$

$$a_mx_i + b_my_i + c_mz_i - d_m \geq 0 \quad i = 1, \dots, L, \quad m = 1, \dots, M \quad (2.2)$$

$$(x_i - x_l)^2 + (y_i - y_l)^2 + (z_i - z_l)^2 \geq \left(\sum_{k=1}^K r_k t_{ik} + \sum_{k=1}^K r_k t_{lk} \right)^2, \quad (2.3)$$

$$i = 1, \dots, L - 1, \quad l = i + 1, \dots, L$$

$$\sum_{k=1}^K t_{ik} \leq 1 \quad i = 1, \dots, L \quad (2.4)$$

$$t_{ik} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, L, \quad m = 1, \dots, M \quad (2.5)$$

A função objetivo do modelo é maximizar o somatório dos volumes das esferas.

As inequações 2.1 e 2.2 garantem que cada esfera esteja totalmente contida no politopo. A restrição 2.3 afirma que duas esferas devem no máximo tocarem-se enquanto que as restrições 2.4 e 2.5 asseguram que cada esfera assume um único valor $r_k \in R$.

Neste modelo as restrições não são nem côncavas nem convexas, o que os impede de utilizarem de forma direta os métodos existentes para a solução de problemas lineares inteiros como o *Branch and Bound* por exemplo. Diante deste empecílio, os autores basearam-se nas técnicas de reformulação-linearização de [1] e de [20], que propuseram algoritmos *Branch and Bound* para resolver uma classe de problemas quadráticos com restrições e desenvolveram uma adaptação do algoritmo de Raber, [20], específico para o problema de empacotamento de esferas.

Fazendo algumas modificações, os autores chegam no modelo a seguir:

$$(P2) \quad \max \sum_{i=1}^L \sum_{k=1}^K r_k^3 t_{ik}$$

Sujeito a:

$$- (x_i - x_l)^2 - (y_i - y_l)^2 - (z_i - z_l)^2 + \left(\sum_{k=1}^K r_k t_{ik} + \sum_{k=1}^K r_k t_{lk} \right)^2 \leq 0,$$

$$i = 1, \dots, L - 1, \quad l = i + 1, \dots, L \quad (2.6)$$

$$- t_{ik}^2 + t_{ik} \leq 0, \quad i = 1, \dots, L, \quad k = 1, \dots, K \quad (2.7)$$

$$a_m x_i + b_m y_i + c_m z_i - d_m \geq e_m \sum_{k=1}^K r_k t_{ik} \quad i = 1, \dots, L, \quad m = 1, \dots, M \quad (2.8)$$

$$\sum_{k=1}^K t_{ik} \leq 1 \quad i = 1, \dots, L \quad (2.9)$$

$$t_{ik} \geq 0, \quad i = 1, \dots, L, \quad k = 1, \dots, K \quad (2.10)$$

Esta formulação é reescrita na forma matricial de modo que o problema relaxado é dividido em uma parte convexa e uma parte côncava. Sejam $n = 3L + KL$ e $v^t = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_L, y_L, z_L, t_{11}, \dots, t_{LK}) \in \mathbb{R}^n$, apresentamos o problema (P2'):

$$(P2') \quad \max c^t v$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} v^t Q_{il} v &\leq 0, \quad i = 1, \dots, L-1, \quad l = i+1, \dots, L \\ v^t \widehat{Q}_{ik} v + \widehat{d}_{ik}^t v &\leq 0, \quad i = 1, \dots, L, \quad k = 1, \dots, K \\ Av &\leq b, \end{aligned}$$

onde Q_{il} e $\widehat{Q}_{ik} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $d_{ik} \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}^n$ é o vetor dos coeficientes da função objetivo. As restrições

$$v^t Q_{il} v \leq 0 \text{ e } v^t \widehat{Q}_{ik} v + \widehat{d}_{ik}^t v \leq 0$$

correspondem às restrições 2.6 e 2.7 respectivamente. A desigualdade

$$Av \leq b$$

representa todas as restrições lineares 2.8, 2.9 e 2.10. Seja \tilde{m} o número de restrições lineares no problema $P2$ e seja

$$U = \{v \in \mathbb{R}^n : Av \leq b\}$$

o politopo definido por estas restrições, onde $A \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$. Dadas determinadas características que as matrizes Q_{il} e \widehat{Q}_{ik} possuem, elas podem ser representadas como a soma de uma matriz semidefinida positiva e uma matriz semidefinida negativa. Toma-se então o conjunto

$$S = \{v \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=0}^n \lambda_j v_j, \sum_{j=0}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 0, \dots, n\}$$

com $U \cap S \neq \emptyset$ e onde v_i , $i = 0, \dots, n$ são seus vértices.

O problema é novamente reformulado matricialmente em função dos vértices v que são soluções do problema e novamente relaxado.

A partir daí é proposto um *Branch and Bound*, baseado no algoritmo de [20], como já dito anteriormente, que se utiliza de duas heurísticas para a obtenção de soluções iniciais viáveis.

Sejam v_{i^*} e v_{j^*} dois vértices de S satisfazendo

$\|v_{i^*} - v_{j^*}\|_2 = \max \{\|v_k - v_{k'}\|_2 \mid v_k, v_{k'} \in S\}$, onde $\|a\|_2$ denota a norma 2 de um vetor a . Defina $v_m = (1/2)v_{i^*} + (1/2)v_{j^*}$. A operação de ramificação é feita dividindo-se o simplex S em:

$$S^1 = [v_0, v_1, \dots, v_{i^*-1}, v_m, v_{i^*+1}, \dots, v_n] \text{ e}$$

$$S^2 = [v_0, v_1, \dots, v_{j^*-1}, v_m, v_{j^*+1}, \dots, v_n].$$

Feita desta forma, a ramificação possui a propriedade de que, para cada sequência aninhada $\{S_q\}$ de subconjuntos $\delta^2(S_q) \rightarrow 0, q \rightarrow \infty$, onde

$$\delta^2(S_q) = \max \{\|v_i - v_j\|_2^2 \mid v_i, v_j \in S_q\}.$$

O algoritmo inicia com uma solução viável obtida através da Heurística 1 para calcular uma possível solução viável v_f e o valor da função objetivo $f(v_f)$. Caso

isto ocorra, o limite inferior LB é dado por $LB = f(v_f)$. Neste caso, o limite superior UB é dado pela solução do problema relaxado, de forma que se o problema relaxado não tiver solução, o problema original é inviável e por outro lado, se v_0 for a solução do problema relaxado e o seu valor ótimo $\mu(S_0)$, então $UB = \mu(S_0)$. Se v_0 for uma solução viável para o problema original, então pare. Senão inicie a Heurística 2 utilizando o v_0 para encontrar uma solução viável v_{0*} e o valor $f(v_{0*})$. Se $LB < f(v_{0*})$, então atualize os valores $LB = f(v_{0*})$ e $v_f = v_{0*}$. Faça $k = 0$. Teste se UB já está próximo o bastante de LB. Se estiver, pare.

Ramificando: faça a ramificação conforme mostrado anteriormente. Resolva o problema relaxado para cada uma das ramificações fazendo a poda dos que forem inviáveis. Se houver uma solução ótima, testar se é viável para o problema original. Se for, pare senão inicie novamente a Heurística 2 e faça tudo novamente.

Limitando: teste se o UB dos problemas em aberto é menor ou igual ao $LB + \epsilon\mu(S)$. Se não houver nenhum, pare. Senão selecione um simplex dentre eles tal que $\mu(S') = \max \mu(S)$. Faça $S_{k+1} = S'$, $k = k + 1$ e vá para o passo 2. O parâmetro ϵ dá a tolerância da solução obtida pelo algoritmo. Esta solução é denominada ϵ -ótima.

Heurística 1:

A idéia básica é inserir o maior número possível de esferas de maior raio no politopo. Considere que existe uma lista de todas as esferas candidatas ordenadas de forma decrescente. Considere também um triângulo 3D definido por quatro restrições escolhidas arbitrariamente dentre aquelas do politopo P . Sejam $P_i, i = 1, \dots, N$ e $N = \binom{\bar{m}}{4}$ os triângulos mencionados anteriormente. Fixando um P_i , o algoritmo inicia retirando a esfera do topo da lista e verifica se ela pode ser colocada em um dos quatro cantos do triângulo P_i . Este procedimento é adotado para o resto das esferas da lista até que quatro esferas estejam colocadas ou a busca por esferas na lista esteja esgotada. Todas as esferas colocadas tem que satisfazer as condições abaixo:

- (i) elas tocam exatamente três lados do triângulo;
- (ii) não ocorre nenhuma interseção entre cada par de esferas;
- (iii) elas satisfazem todas as outras restrições de P .

Depois de obter a configuração inicial, o algoritmo tenta inserir mais esferas entre cada par de esferas em P_i sem violar a condição de empacotamento.

Heurística 2:

Seja $(x_1^*, y_1^*, z_1^*, \dots, x_L^*, y_L^*, z_L^*, t_{11}^*, \dots, t_{1k}^*)$ a solução do subproblema relaxado. Suponha que esta solução não seja viável. Então ou t_{ik}^* não é inteiro ou algumas esferas irão se sobrepor se t_{ik}^* assumir valor 1 para cada i ; isto é, utilizar r_k como o

raio da esfera i . No algoritmo os centros destas esferas são fixados e os seus raios são determinados de forma que elas não se sobreponham.

Dividindo um simplex de forma diferente

É sabido que no paradigma do Branch and Bound simplicial tanto o tempo computacional quanto a utilização da memória crescem extremamente rápido à medida que a dimensão do politopo U aumenta.

Quando um simplex S é dividido em dois simplices, como foi feito anteriormente, o tamanho de $v_{i^*} - v_{j^*}$ é o maior dentre todos os outros pares de vértices do simplex S . Se o vértice v_0 não for substituído pelo vértice v_m , então a matriz W_{S^1} é igual a W_S , exceto pela coluna $v_{j^*} - v_0$, que é substituída por $v_m - v_0$. Se v_m, v_{i^*}, v_{j^*} tem os mesmos valores para as primeiras $3L$ coordenadas, então a primeira restrição do subproblema relaxado permanece inalterada com relação aos simplices $S^j, j = 1, 2$, e a qualidade da relaxação não terá uma melhora significativa. Esta divisão leva ao cálculo de subproblemas que não fornecem nem bons limites inferiores nem limites superiores úteis. Para evitar esta situação, escolhem-se v_{i^*}, v_{j^*} tais que $\sum_{k=1}^{3L} (v_{i^*,k} - v_{j^*,k})^2$ é o máximo entre todos os outros pares $i - j$. Consequentemente, as coordenadas correspondendo a $t_{ik}, i = 1, \dots, L$ e $k = 1, \dots, K$ não serão consideradas.

Uma dificuldade é que como o simplex é dividido para minimizar o maior valor de somatório $\sum_{k=1}^{3L} (v_{i^*,k} - v_{j^*,k})^2$ sobre todos os vértices, é possível que uma sequência aninhada $\{S_q\}$ de simplices com $\tilde{\delta}^2(S_q) \rightarrow 0, q \rightarrow \infty$ mas isto não ocorre para $\delta^2(S_q)$. Neste caso, não é garantido que o ponto de acumulação de uma sequência obtida pelo algoritmo será uma solução ótima.

Outra Forma de Relaxação

Uma outra forma de relaxar o problema é omitir as restrições quadráticas, que correspondem à condição 0-1 de t_{ik} . Além disso, a sobreposição de quaisquer duas esferas é permitida.

Desta forma, a envoltória convexa da função côncava pode ser determinada pelas primeiras $3L$ coordenadas dos vértices do simplex correspondente como dado acima. Isto implica que é suficiente construir simplices no espaço dimensional $3L$. Seja $S'_0 = [v'_0, \dots, v'_{3L}]$ o simplex inicial no espaço dimensional $3L$ que contem o politopo P .

A partir daí o problema é reescrito matricialmente em função dos vértices do politopo e ignorando-se também, como já dito, o conjunto de restrições quadráticas. Daí este subproblema é relaxado. Segundo os autores, a qualidade da relaxação pode ser inferior àquela anterior, no entanto, a dimensão dos simplices armazenados na memória é de apenas $3L$. Portanto, o total de memória utilizada pode ser bem

menor do que a exigida na relaxação anterior.

Ressaltamos que nesse trabalho os autores não dão ênfase ao preenchimento total do polítopo, podendo haver regiões do mesmo que não sejam cobertas por nenhuma esfera.

2.2 Configuração ótima de máquinas de raios gamma em unidades de radiocirurgia: um subproblema de recobrimento esférico

No artigo Optimal configuration of gamma ray machine radiosurgery units: the sphere covering subproblem [13], os autores consideram um elipsóide menor do que 3 cm em comprimento como a região a ser preenchida por esferas e para tal utilizam uma abordagem do ponto de vista da programação matemática. Portanto, são definidos modelos que posteriormente são resolvidos até a otimalidade ou quase otimalidade por resolvedores que visam classes específicas de problemas: programação linear inteira mista (PLIM), programação convexa não linear inteira mista (PCNLIM) e programação não convexa não linear inteira mista (PNCNLIM).

Devido à dificuldade do problema, de natureza não convexa, não linear inteira mista, os autores exibem uma sequência de reformulações que o transformam exatamente ou aproximadamente em PCNLIM e eventualmente em diferentes tipos de PLIMs. Os autores ainda enfatizam que neste artigo, a palavra formulação significa uma descrição matemática formal de um problema de otimização envolvendo parâmetros, variáveis de decisão, uma função objetivo e restrições. De forma geral, uma reformulação de um problema P é um problema Q tal que todos os pontos ótimos locais e globais de P podem ser calculados a partir dos de Q .

Neste artigo são utilizados:

- $\{r_T^x, r_T^y, r_T^z\}$ como os raios do elipsóide;
- p é um ponto no conjunto compacto $T \subset \mathbb{R}^n$;
- $r : U \rightarrow \mathbb{R}$ é o raio da esfera;
- $x : N \rightarrow \mathbb{R}^3$ é o centro de uma dada esfera;
- $y : N \rightarrow \{0, 1\}$ é igual a 1 se a dada esfera é utilizada e 0 caso contrário;
- $u : N \times T \rightarrow \{0, 1\}$ assume o valor 1 se a dada esfera cobre o ponto especificado e 0 caso contrário;
- $w : N \times U \rightarrow \{0, 1\}$ é igual a 1 se a esfera assume o raio especificado e 0 caso contrário;

- $N = \{1, \dots, n\}$ a quantidade máxima de esferas;
- $U = \{1, \dots, |R|\}$ o conjunto de índices para os tipos de raios;
- $M \geq \text{diam}(T)$ uma constante suficientemente grande;
- $\epsilon > 0$ uma constante pequena.

O problema (P1) é descrito da seguinte forma:

(P1) Dados um conjunto compacto $T \subset \mathbb{R}^3$, um conjunto finito $R \subset \mathbb{R}_+$ e um inteiro $n > 0$, encontre um conjunto $X \subset \mathbb{R}^3$ de no máximo n pontos e uma atribuição $w : X \rightarrow R$ tal que $T \subset \cup_{x \in X} B(x, w(x))$, onde $B(x, \rho) \subset \mathbb{R}^3$ é a esfera de centro x e raio ρ e abaixo apresentamos a sua modelagem.

$$\forall i \in N, p \in T \quad \|x_i - p\|^2 \leq u_i(p) \sum_{j \in U} w_{ij} r_j^2 + (1 - u_i(p)) M^2 \quad (2.11)$$

$$\forall i \in N \quad \sum_{j \in U} w_{ij} = 1 \quad (2.12)$$

$$\forall p \in T \quad \sum_{i \in N} u_i(p) \geq 1 \quad (2.13)$$

$$\forall i \in N \quad \int_{p \in T} u_i(p) dp \geq \epsilon y_i \quad (2.14)$$

$$\forall i \in N \quad \int_{p \in T} u_i(p) dp \leq \text{Vol}(T) y_i, \quad (2.15)$$

onde $R = \{r_j | 1 \leq j \leq |U|\}$ e $\text{Vol}(T)$ denota a medida de Lebesgue de T em \mathbb{R}^3 .

A restrição 2.11 estabelece que se a esfera i cobre o ponto p , então a distância Euclideana entre p e o centro da esfera deve ter o raio da esfera como tamanho máximo. A restrição 2.12 garante que exatamente um valor de raio é escolhido para cada esfera. A restrição 2.13 assegura que cada ponto em T é coberto por pelo menos uma esfera. O fato de que toda esfera cobre um volume de T diferente de zero é garantido pela restrição 2.14 e a restrição 2.15 força que u_i tenha valor zero se a esfera i não for selecionada.

Apesar de não haver uma função objetivo neste problema, podemos observar claramente através das restrições, que o objetivo aqui é preencher todo volume do polítopo, que neste caso é um elipsóide, com esferas, devendo todo ponto p pertencente ao conjunto compacto T ser coberto por pelo menos uma esfera. Logo, o objetivo é maximizar o somatório do volume das esferas.

Logo após esta formulação é proposta pelos autores uma reformulação aproximativa que consiste em substituir T por um conjunto finito de pontos em T . Com este objetivo, é considerada uma grade cúbica P com m^3 pontos em \mathbb{R}^3 tal que

$\text{conv}(P)$ seja um cubo cujo lado meça $(m - 1) \Delta$, sendo $\Delta > 0$ o tamanho do lado de cada elemento cúbico na grade, $T \subseteq \text{conv}(P)$ e para todo $P' \subset P$ ocorre que $T \not\subseteq \text{conv}(P')$. Logo, P é a menor grade 3D com m pontos por lado que determina uma região cubica contendo T . Considere um conjunto de índices $V \subseteq \{1, \dots, m^3\}$ tal que $P \cap T = \{p_v \mid v \in V\}$ como sendo parte dos dados de entrada do problema (ou seja, p_v são parâmetros do problema). A mudança foi feita na variável u :
(c') $u : N \times V \rightarrow \{0, 1\}$ tem valor 1 se a dada esfera cobre o ponto especificado.

Desta forma, o problema (P'_1) possui o seguinte conjunto de restrições:

$$\forall i \in N, v \in V \quad \|x_i - p_v\|^2 \leq u_{iv} \sum_{j \in U} w_{ij} r_j^2 + (1 - u_{iv}) M^2 \quad (2.16)$$

$$\forall i \in N \quad \sum_{j \in U} w_{ij} = 1 \quad (2.17)$$

$$\forall v \in V \quad \sum_{i \in N} u_{iv} \geq 1 \quad (2.18)$$

$$\forall i \in N \quad \sum_{v \in V} u_{iv} \geq y_i \quad (2.19)$$

$$\forall i \in N \quad \sum_{v \in V} u_{iv} \leq |V| y_i. \quad (2.20)$$

A grande diferença desta reformulação é a de utilizar um conjunto finito de pontos, desta forma evitando ser feito um cálculo computacionalmente custoso como é o cálculo de uma integral e realizando apenas o cálculo de um somatório, tarefa bem mais fácil. No entanto, este é um problema não convexo, de programação não linear inteira mista sem função objetivo. Embora existam alguns métodos de solução, esta classe de problemas está entre as mais difíceis de serem abordadas. Ainda há uma observação de que no caso de o número de variáveis binárias ser considerável, o problema ainda se torna mais difícil de ser resolvido na prática.

Como já foi dito acima, esta reformulação não é exata, até porque a grade contém finitos pontos e é utilizada para aproximar uma região que contém infinitos pontos e assim poder simplificar os cálculos a serem feitos. Logo, temos que o grau de aproximação depende de Δ , pois quando $\Delta \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 1$. O valor α de T que será coberto pelas esferas no problema P'_1 pode ser estimado calculando-se a densidade τ da configuração, ou seja, a média da região da rede fundamental coberta pelas esferas em toda a rede. A configuração de pior caso minimiza α enquanto cobre todos os pontos na grade cúbica. Isto leva a uma configuração onde todas as esferas têm raio \underline{r} para minimizar o volume e cobrir tantos pontos quanto possível. A partir deste ponto, os autores apresentam dois lemas sobre o limite superior da densidade

τ .

É feita uma nova reformulação, visto que P'_1 é um problema não convexo, não linear inteiro misto. Para esta classe de problemas ainda não há métodos que resolvam efetivamente ou confiavelmente instâncias de tamanho razoável. Os autores ressaltam que embora a não convexidade em P'_1 seja causada pelo conjunto de produtos binários $u_{iv}w_{ij}$, que podem ser linearizados exatamente de forma padrão, isto implicaria a adição de três $|N||V||U|$ restrições de desigualdade na formulação. Desta forma, os autores aplicam uma reformulação diferente: seja $N = \{1, \dots, n | R\}$ e insira um parâmetro $\rho : N \rightarrow \mathbb{R}_+$ que atribui a cada esfera um raio fixo em R . Como o conjunto de esferas agora é maior, nós minimizamos o número de esferas utilizadas no cobrimento. O problema é apresentado a seguir.

(P_2) Dado um conjunto finito de pontos $P \cap T \subset \mathbb{R}^3$, um conjunto finito $R \subset \mathbb{R}_+$ e os conjuntos de índices N e $\rho : N \rightarrow R$, encontre um conjunto de esferas $\{B(x(i), \rho(i)) | i \in N\}$ de cardinalidade mínima que cubra cada ponto em $P \cap T$.

A formulação matemática de (P_2) é a mesma de (P'_1) com a restrição (7) eliminada e a restrição (6) substituída por:

$$\forall i \in N, v \in V \quad \|x_i - p_v\|^2 \leq u_{iv}\rho_i^2 + (1 - u_{iv})M^2, \quad (2.21)$$

e

$$\min \sum_{i \in N} y_i \quad (2.22)$$

como função objetivo. Portanto, o problema (P_2) minimiza (2.22) sujeito a (2.18)-(2.21). Como (11) é uma restrição convexa, agora os autores têm um problema convexo não linear inteiro misto. Além disso, as variáveis binárias w de atribuição de raios.

Os autores provam que o problema (P_2) é uma *reformulação no sentido de Hansen*, que é uma reformulação ligada a uma modificação na definição do problema.

Logo após é apresentada a reformulação P'_2 que lineariza o termo $\|x_i - p_v\|^2$ em 2.21, fazendo

$\|x_i - p_v\|^2 = \sum_{k \leq 3} (x_{ik}^2 - 2x_{ik}p_{vk} + p_{vk}^2)$ em 2.21 de forma que o único termo não linear é x_{ik}^2 , que é substituído pela variável de linearização

(e) $s : N \rightarrow \mathbb{R}_+^3 : s_{ik}$ substitui x_{ik}^2 para $i \in N, k \leq 3$,

e modificando 2.21:

$$\forall i \in N, v \in V \quad \sum_{k \leq 3} (s_{ik} - 2x_{ik}p_{vk} + p_{vk}^2) \leq u_{iv}\rho_i^2 + (1 - u_{iv})M^2. \quad (2.23)$$

Para garantir que as variáveis s_{ik} assumam valores viáveis na restrição quadrática 2.21 é necessário que $s_{ik} \geq x_{ik}^2$ para $i \in N, k \leq 3$. Os autores também utilizaram a

aproximação interna usando um número finito de pontos uniformemente espaçados \bar{x}_{ikd} para d em algum conjunto adequado de índices D ($|D|$ é o número de pontos de aproximação interna) e formalmente temos:

$$\forall i \in N, k \leq 3 \quad s_{ik} = \max \{(\bar{x}_{ikd} + \bar{x}_{ik,d-1}) x_{ik} - \bar{x}_{ikd} \bar{x}_{ik,d-1} \mid d \in D \setminus \{1\}\}. \quad (2.24)$$

A equação (2.24) pode ser formulada como um conjunto de $|D| - 1$ restrições lineares

$$\forall i \in N, k \leq 3, d \in D \setminus \{1\} \quad s_{ik} \geq (\bar{x}_{ikd} + \bar{x}_{ik,d-1}) x_{ik} - \bar{x}_{ikd} \bar{x}_{ik,d-1}. \quad (2.25)$$

Tem-se que $s_{ik} \geq x_{ik}^2$ para todo $i \in N, k \leq 3$.

Assim, a formulação (P'_2) é parecida com P_2 com as variáveis s adicionadas, a restrição 2.25 incluída e 2.21 trocada pela 2.23. O problema é minimizar 2.22 sujeito a 2.18-2.20, 2.23, 2.25. É um problema linear inteiro misto que se transforma em uma reformulação semi-infinita para o problema convexo não linear inteiro misto (P_2) quando $x_{ikd} - x_{ik,d-1} \rightarrow 0$. Os autores ainda observam que este mesmo tipo de observação pode também ser aplicada a (P'_1) resultando no problema linear inteiro misto (P''_1) .

Agora que existe uma formulação convexa e linear, a idéia é conseguir uma reformulação que não utilize o "big M". Uma forma de se fazer isto é colocar todas as distâncias possíveis $\|x_i - p_v\|$ (para $i \in N, v \in V$) na instância do problema e fazer uma reformulação para um problema de recobrimento puro. Como há um número infinito de posições espaciais para x_i , a aproximação foi feita exigindo-se que os centros das esferas só poderiam ser posicionados nos pontos da grade. Para todo $i \in N, v \in V$ foram introduzidos conjuntos $\eta_{iv} \subset V$ descrevendo a extensão do cobrimento da i -ésima esfera para o ponto v da grade, isto é, $\eta_{iv} = \{t \in V \mid \|p_v - p_t\| \leq \rho_i\}$. Com os centros das esferas fixados, as variáveis x são substituídas por variáveis χ : (a') $\chi : N \times V \rightarrow \{0, 1\}$ vale 1 se o centro da dada esfera está no ponto especificado da grade, sujeito a restrições de atribuição:

$$\forall i \leq N \quad \sum_{v \in V} \chi_{iv} = y_i. \quad (2.26)$$

As restrições de recobrimento tornam-se:

$$\forall i \in N, v \in V, t \in \chi_{iv} \quad u_{iv} \geq \chi_{iv} \quad (2.27)$$

$$\forall i \in N, v \in V \quad \sum_{t \in V} \chi_{it} \geq u_{iv} \quad (2.28)$$

e descrevem o problema

(P_3) Dado um conjunto finito de pontos $P \cap T \subset \mathbb{R}^3$ que tem por índices elementos

do conjunto V , um conjunto de índices N e uma função $\eta : N \times V \rightarrow P(V)$, encontre uma função $\chi : N \times V \rightarrow \{0, 1\}$ tal que o conjunto $S = \{(i, v) | \chi_{iv} = 1\}$ tenha cardinalidade mínima e a propriedade de que para todo $t \in V$ existe $(i, v) \in S$ com $t \in \eta_{iv}$.

Após esta reformulação, há ainda uma seção sobre a minimização da radiação nos tecidos saudáveis. Neste sentido é considerada uma região em forma de banda com largura \bar{r} em torno de T e definido o conjunto $\tilde{T} = \{x \in \mathbb{R}^3 | \exists x' \in T (\|x - x'\| < \bar{r})\}$ que contém o tumor e uma região de tecido saudável em torno. São definidos um conjunto \tilde{P} composto por grade cúbica mais larga (a menor grade que contém \tilde{T}), um conjunto \tilde{V} de inteiros que indexam os pontos em $\tilde{P} \cap \tilde{T}$ e estenda a definição de u_{iv} para cada $i \in N$ e para cada $v \in \tilde{V}$.

Estas mudanças refletem de forma diferente em P'_2 e em P_3 . Para P'_2 , há a reformulação P''_2 como segue: a restrição 2.23 é quantificada e a soma dos quantificadores é modificada em (2.19)-(2.20) para \tilde{V} em vez de V e a função objetivo 2.22 é modificada para:

$$\min \sum_{i \in N} \left(y_i + \frac{1}{|\tilde{V}| - |V|} \sum_{v \in \tilde{V} \setminus V} u_{iv} \right). \quad (2.29)$$

Então o problema é minimizar 2.29 sujeito a 2.18-2.20, 2.23, 2.25 com V substituído por \tilde{V} . O problema (P_3) é reformulado para (P'_3) como segue: η é estendido para ser definido em \tilde{V} , a soma dos quantificadores em 2.26 é modificada para \tilde{V} ao invés de V e a restrição 2.28 é modificada para:

$$\forall i \in N, v \in \tilde{V} \sum_{\substack{t \in V \\ v \in \eta_{it}}} \chi_{it} \geq u_{iv} \quad (2.30)$$

e a função objetivo 2.29 é utilizada. Então o problema é: minimizar 2.29 sujeito a: 2.26 com V substituído por \tilde{V} , 2.27 e 2.30.

Capítulo 3

O problema do recobrimento elipsoidal discreto

Neste capítulo apresentamos o problema de recobrimento elipsoidal discreto e a base teórica que dá suporte à sua resolução. Para uma rápida descrição, podemos dizer que dado um elipsóide com (x_0, y_0, z_0) como suas coordenadas de centro e R_x, R_y, R_z como seus raios e um conjunto de raios de esferas $r_i \in \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_M\}, r_i < \min\{R_x, R_y, R_z\}$, o problema consiste em cobrir o elipsóide com as esferas. Existem dois fatores que tornam discreto este problema: os raios das esferas pertencem ao conjunto citado anteriormente e a quantidade de esferas que obrigatoriamente tem que ser um número inteiro.

3.1 O Problema de Recobrimento Elipsoidal Discreto (PRED)

O objetivo desta seção é detalhar o (PRED). Como afirmado anteriormente este problema consiste em cobrir um elipsóide com esferas, mais especificamente:

Dados $(R_x, R_y, R_z) \in \mathbb{R}_{++}^3, c \in \mathbb{R}^3, n \in N$, o elipsóide de centro c e raios (R_x, R_y, R_z) é definido pelo seguinte conjunto:

$$\mathbf{E}(c, R) = \{w \in \mathbb{R}^3; (w - c)^t R^{-2} (w - c) \leq 1\} \quad (3.1)$$

onde $R = \text{diag}(R_x, R_y, R_z)$.

Podemos definir o (PRED) como:

Definição 1. Dado um elipsóide $\mathbf{E}(c, R)$ um **recobrimento elipsoidal discreto** (RED) é uma estrutura da forma:

$$\text{Recell}(\mathbf{E}) = \{\mathbf{C}, \mathbf{r}\}$$

onde $\mathbf{C} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, $\mathbf{r} = \{r_i \in \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_M\} \mid i = 1, \dots, n\}$, w_i e r_i satisfazem as seguintes condições:

1. $w_i \in \mathbf{E}(c, R)$ para todo n ;
2. Se $w \in \mathbf{E}(c, R)$ então $\|w - w_i\| \leq r_i$ para algum $i = 1, \dots, n$;
3. O número de esferas n deve ser o menor possível.

Os conjuntos \mathbf{C} e \mathbf{r} têm como elementos os centros das esferas e os raios discretos respectivamente. Se $\mathbf{r} = \{r \in [a, b]\}$ o recobrimento é dito contínuo. O PRED consiste em determinar um par $P = \{\mathbf{C}, \mathbf{r}\}$.

A **Definição 1** sugere tratarmos o (PRED) como um problema de viabilidade com restrições semi infinitas; no entanto, para contornar esse caráter semi infinito estamos propondo uma formulação denominada recobrimento elipsoidal discreto fraco (REDF), apresentada a seguir.

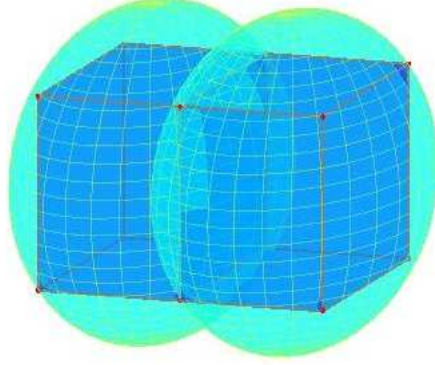
Definição 2. Dado um elipsóide $\mathbf{E}(c, R)$, um **recobrimento elipsoidal discreto fraco**(REDF) é uma estrutura da forma: $\text{Recell}(\mathbf{E}(c, R)) = (\mathbf{C}, \mathbf{r})$ onde $\mathbf{C} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ e $\mathbf{r} = \{r_i \in \{r_1, r_2, \dots, r_M\}, \mid i = 1, \dots, n\}$, w_i , r_i e r_j satisfazem as seguintes condições:

1. $w_i \in \mathbf{E}(c, R)$ para todo n ;
2. $\|w_i - w_j\| \geq \gamma(r_i + r_j)$ para todo $i = 1, \dots, n$, $j = i + 1, \dots, n$, $r_i, r_j \in \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_M\}$;
3. O número de esferas n deve ser o menor possível.

Nesta formulação, as restrições semi-infinitas do item 2 da **Definição 2** são substituídas por $\frac{n(n-1)}{2}$ restrições quadráticas. O número de esferas n será determinado pelo problema auxiliar que será visto mais adiante, em 4.1.1.

O parâmetro γ representa o nível de interseção entre as esferas. Quando $\gamma = 0$, as esferas terão o mesmo centro, gerando assim um tipo de interseção indesejada. Quando $\gamma = 1$, as esferas irão se tocar em um único ponto e esta interseção também é indesejada porque desta forma, o índice de cobertura dos pontos do elipsóide ficaria muito baixo. Neste trabalho, o parâmetro γ poderá assumir três valores: $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{5\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}$ ou $\frac{2}{3}$. O primeiro valor ocorrerá quando assumirmos que existe um cubo inscrito em cada uma das esferas que cobrem o elipsóide e o nível satisfatório de interseção entre duas delas ocorre quando uma das faces dos cubos inscritos nas mesmas se tocam. O segundo valor de γ ocorre quando utilizamos um dodecaedro inscrito em cada esfera que cobre o elipsóide, ao invés do cubo. Estas duas ocorrências de valores para γ estão na abordagem de Programação Geométrica. O

valor $\frac{2}{3}$ é utilizado na abordagem Linear Inteira. A seguir, temos uma figura que representa o nível de interseção desejável entre duas esferas quando usamos o cubo inscrito.



As duas estruturas acima diferem apenas com relação ao item 2. No (PREDF) relaxamos a condição de recobrimento total dada pelo item 2 na **Definição 1** por uma condição mais fraca que é dada pela condição 2 da **Definição 2** e com o objetivo de resolver o problema de viabilidade posto na **Definição 1** propomos resolver um problema de maximização cujas restrições satisfaçam as condições 1,2 e 3 na **Definição 2**, além de alguma restrição adicional que garanta o recobrimento total dada pela condição 2 da **Definição 1**. A condição 3 da **Definição 2**, ou seja, o número de esferas n deve ser o menor possível, será relaxada e determinada através da resolução de um problema auxiliar que será definido mais adiante em 4.1.1.

Nosso trabalho daqui em diante será encontrar recobrimento elipsoidal fraco para um elipsóide \mathbf{E}_{seg} tal que $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}_{seg}$ cujos raios das esferas sejam os maiores possíveis e impor a seguinte condição: Se $S(w_i, r_i)$ é a i -ésima esfera de centro w_i e raio r_i então $S(w_i, r_i) \subset \mathbf{E}_{seg}$. \mathbf{E}_{seg} será chamado **elipsóide de segurança**, sendo definido a seguir:

Definição 3. Dado um elipsóide $\mathbf{E}(c, R)$ e $\epsilon > 0$ definimos o elipsóide de segurança de $\mathbf{E}(c, R)$ como:

$$\mathbf{E}_{seg}(c, R) = \{w \in \mathbb{R}^3; (w - c)^t R_{seg}^{-2} (w - c) \leq 1\},$$

onde $R_{seg} = (1 + \epsilon)diag(R_x, R_y, R_z)$.

A **Condição 1** não é essencial, pois ela pode ser obtida de forma indireta como mostra a **Proposição 1**.

3.1.1 Avaliação do nível de recobrimento em um recobrimento elipsoidal discreto fraco(REDF)

Aqui nós tentamos avaliar se (PREDF) pode fornecer um bom recobrimento e dar uma condição simples para que $\underline{Recell}(\mathbf{E}(c, R)) = Recell(\mathbf{E}(c, R))$. Para isto, apre-

sentamos os resultados e definições abaixo:

Definição 4. Dado $d > 0$, um elipsóide $\mathbf{E}(c, R)$ e $\underline{Recell}(\mathbf{E}(c, R)) = (\mathbf{C}, \mathbf{r})$ e um (REDF) para $\mathbf{E}(c, R)$ nós definimos:

- Uma malha para $\mathbf{E}(c, R)$ é a interseção: $\mathbf{E}(c, R) \cap M(d)$ onde:

$$M(d) = \{w \in \mathbb{R}^3; w = c + (-R_x : d : R_x, -R_y : d : R_y, -R_z : d : R_z)\}$$

e $a = v_0 : inc : v_f = (v_0, v_0 + d, \dots, v_f)$. Podemos observar que neste caso, d é a distância existente entre os pontos da malha.

- O nível de recobrimento de um (PREDF) $\underline{Recell}(\mathbf{E}(c, R)) = (\mathbf{C}, \mathbf{r})$ é definido por:

$$IP(\underline{Recell}(\mathbf{E}(c, R))) = \frac{\aleph_0(\underline{Recell}(\mathbf{E}(c, R)) \cap M(d))}{\aleph_0(M(d))}.$$

onde: $\underline{Recell}(\mathbf{E}(c, R)) \cap M(d) = \{w \in M(d) \cap S(\tilde{w}, \tilde{r})\}$ para algum par $(\tilde{w}, \tilde{r}) \in (\mathbf{C}, \mathbf{r})$ e $\aleph_0(C)$ é a cardinalidade do conjunto C .

- Nós dizemos que um (REDF) $\underline{Recell}(\mathbf{E}(c, R)) = (\mathbf{C}, \mathbf{r})$ de $(\mathbf{E}(c, R))$ é total ou perfeito se $IP(\underline{Recell}(\mathbf{E}(c, R))) = 1$.

A proposição abaixo nos dá uma caracterização entre o recobrimento elipsoidal e o recobrimento elipsoidal fraco.

Proposição 1. Dado $d > 0$, uma malha $M(d)$ é um (REDF) $\underline{Recell}(\mathbf{E}(c, R)) = (\mathbf{C}, \mathbf{r})$ para $\mathbf{E}(c, R)$. Seja $\underline{Recell}_d(\mathbf{E}(c, R)) = (C, r_d)$ onde $r_d(i) = r(i) - d\sqrt{3}$, $i = 1, \dots, n$, então

$$\underline{Recell}_d(\mathbf{E}(c, R)) = \underline{Recell}_d(\mathbf{E}(c, R)) \text{ se e somente se } IP(\underline{Recell}_d(\mathbf{E}(c, R))) = 1.$$

Prova 1. Se $\underline{Recell}_d(\mathbf{E}(c, R)) = \underline{Recell}_d(\mathbf{E}(c, R))$ então para todo $v \in \mathbf{E}(c, R)$, $\exists S(w, r)$ tal que $\|v - w\| \leq r$. Se isto ocorre, particularmente, os pontos que pertencem à malha são cobertos por pelo menos uma esfera, portanto, temos:

$$\frac{\aleph_0(\underline{Recell}(\mathbf{E}(c, R)) \cap M(d))}{\aleph_0(M(d))} = \frac{\aleph_0(\underline{Recell}_d(\mathbf{E}(c, R)) \cap M(d))}{\aleph_0(\underline{Recell}_d(\mathbf{E}(c, R)) \cap M(d))} = 1$$

Reciprocamente, dado $v \in \mathbf{E}(c, R)$, $\exists w \in M(d)$ tal que $\|v - w\| \leq d\sqrt{3}$. Se $IP(\underline{Recell}_d(\mathbf{E}(c, R))) = 1$, $\exists w_i \in \underline{Recell}_d(\mathbf{E}(c, R))$ tal que $w - w_i \leq d(i) - d\sqrt{3}$. Então nós temos

$$\|v - w_i\| \leq \|v - w\| + \|w - w_i\| \leq d\sqrt{3} + r_i - d\sqrt{3}.$$

Portanto existem $w_i \in c$ e $r_i \in R$ tais que $\|v - w_i\| \leq r_i$.

Desta forma apresentamos o problema a ser trabalhado e toda a base teórica que será utilizada para a sua resolução.

Capítulo 4

Abordagem utilizando a Programação Geométrica

Este capítulo se divide em três partes, sendo que na primeira é feita a apresentação do modelo proposto, na segunda a teoria necessária para a resolução do mesmo e na última é apresentado o algoritmo.

4.1 Modelo

A proposição a seguir precede o modelo porque explica que, nesta abordagem, os centros das esferas estão localizados em um elipsóide dentro do elipsóide original. Este ajuste é uma tentativa de fazer com que os centros das esferas não fiquem localizados muito próximos da borda evitando desta forma que as mesmas ultrapassem o elipsóide de segurança, o que é um dos objetivos do problema.

Proposição 2. *Dado $\epsilon > 0, r > 0, c \in \mathbb{R}^3$ e $(R_x, R_y, R_z) \in \mathbb{R}_{++}^3$. Sejam $R_{min} = \min\{R_x, R_y, R_z\}$, $r_{max} = \max\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_M\}$, $\tilde{\epsilon} = (1 - \epsilon \frac{R_{min}}{r_{max}})$ e $R_{\tilde{\epsilon}} = \text{diag}(R_x - \tilde{\epsilon}r, R_y - \tilde{\epsilon}r, R_z - \tilde{\epsilon}r)$. Se $r \leq r_{max} \leq R_{min}$ e $w \in E(c, R_{\tilde{\epsilon}})$ então $S(w, r) \subset \mathbf{E}_{seg}(c, R)$.*

Prova 2. *Temos que provar que dados $p \in S(w, r)$ e $w \in E(c, R_{\tilde{\epsilon}})$, então $p \in \mathbf{E}_{seg}(c, R)$.*

$$(p - c)^t R_{seg}^{-2}(p - c) \leq \frac{\max\{R_x, R_y, R_z\} + (1 - \tilde{\epsilon})r}{\max\{R_x, R_y, R_z\}(1 + \epsilon)} = \frac{\max\{R_x, R_y, R_z\} + \epsilon r \frac{R_{min}}{r_{max}}}{\max\{R_x, R_y, R_z\}(1 + \epsilon)}.$$

Como $\frac{r}{r_{max}} \leq 1$ e $R_{min} \leq \max\{R_x, R_y, R_z\}$ então $r \frac{R_{min}}{r_{max}} \leq \max\{R_x, R_y, R_z\}$

Multiplicando por ϵ e somando $\max\{R_x, R_y, R_z\}$ dos dois lados, temos:
 $\max\{R_x, R_y, R_z\} + \epsilon r \frac{R_{min}}{r_{max}} \leq \max\{R_x, R_y, R_z\} + \epsilon \max\{R_x, R_y, R_z\}$

$$= \max\{R_x, R_y, R_z\} + \epsilon r \frac{R_{\min}}{r_{\max}} \leq \max\{R_x, R_y, R_z\}(1 + \epsilon) = \frac{\max\{R_x, R_y, R_z\} + \epsilon r \frac{R_{\min}}{r_{\max}}}{\max\{R_x, R_y, R_z\}(1 + \epsilon)} \leq 1.$$

■

Aqui apresentamos e detalhamos o primeiro modelo desenvolvido neste trabalho.

Definição 5. Dados $\epsilon > 0, c \in \mathbb{R}^3$ e $(R_x, R_y, R_z) \in \mathbb{R}_{++}^3$ e sejam $R_{\min} = \min\{R_x, R_y, R_z\}$, $r_{\max} = \max\{r_1, r_2, \dots, r_M\}$, $\tilde{\epsilon} = (1 - \epsilon \frac{R_{\min}}{r_{\max}})$, $R_{\tilde{\epsilon}} = \text{diag}(R_x - \tilde{\epsilon}r, R_y - \tilde{\epsilon}r, R_z - \tilde{\epsilon}r)$ e $r_{\max} \leq R_{\min}$, o problema de otimização associado ao Pell ($\mathbf{E}(c, R)$) é dado por:

$$(P1) \max \sum_{i=1}^n \text{Vol}(S(w_i, r_i))$$

Sujeito a:

$$(w_i - c)^t R_{\tilde{\epsilon}}^{-2} (w_i - c) \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

$$\|w_i - w_j\| \geq \gamma(r_i + r_j), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i < j, \quad 0 < \gamma < 1 \quad (4.2)$$

$$r_i \in \{r_1 < r_2 < \dots < r_M\} \quad (4.3)$$

A restrição 4.1 garante que a esfera estará dentro do elipsóide de segurança. A restrição (4.2) garante que as esferas não se superponham. O volume útil de cada esfera é dado por: $V_i = \frac{4}{3}\pi r_i^3$. Para obtermos o maior recobrimento do elipsóide de segurança, nós utilizamos como objetivo do problema a maximização da soma dos volumes das esferas, de forma que estamos resolvendo o PREDF, porém visando obter uma solução para o PRED, que ocorre quando temos $IP=1$, conforme vimos em 3.1.1. Também temos que, ao maximizar a soma dos volumes fazemos com que os raios das esferas utilizadas no recobrimento sejam os maiores possíveis e indiretamente diminuimos a quantidade de esferas na solução.

O parâmetro γ tem uma importância fundamental neste modelo porque ele nos permite calcular o volume da união de duas esferas quando elas se interceptam. Neste trabalho, consideramos dois valores para γ , que são: $\gamma_c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\gamma_d = \frac{\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{5\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}$. Com qualquer um destes valores de γ podemos encontrar um limite inferior para o volume da interseção de duas esferas. Assim, temos o seguinte resultado:

Proposição 3. Dados $i, j, i < j$, suponha que w_i, r_i e w_j, r_j satisfazem a restrição

$$(4.2) \text{ se } \gamma_c = \frac{1}{\sqrt{3}}, \gamma_d = \frac{\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{5\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}, W = \frac{20(15+7\sqrt{5})}{\sqrt{250+110\sqrt{5}(1+\sqrt{5})^2}} e$$

$$t_{ij} = \frac{(r_i + r_j)(1 - \min(1, \frac{\|w_i - w_j\|}{r_i + r_j}))}{r_i + r_j - \|w_i - w_j\|}$$

então

$$\text{Vol}(S(w_i, r_i) \cup S(w_j, r_j)) \geq \frac{4}{3}(r_i^3 + r_j^3)((1 - \frac{t_{ij}}{6})\pi + t_{ij}\gamma_c^3) \text{ se} \quad (4.4)$$

$$Vol(S(w_i, r_i) \cup S(w_j, r_j)) \geq \frac{4}{3}(r_i^3 + r_j^3)\left(\left(1 - \frac{t_{ij}}{12}\right)\pi + \frac{t_{ij}W\gamma_d^3}{12}\right). \quad (4.5)$$

Prova 3. Se $t_{ij} = 0$ as esferas $S(w_i, r_i)$ e $S(w_j, r_j)$ não se interceptam; nesse caso o volume da união é calculado como:

$$Vol(S(w_i, r_i) \cup S(w_j, r_j)) = \frac{4}{3}\pi(r_i^3 + r_j^3)$$

qualquer que seja γ .

Se $t_{ij} = 1$ a interseção existe e o volume é calculado da seguinte forma:

$$Vol(S(w_i, r_i) \cup S(w_j, r_j)) = Vol(S(w_i, r_i)) + Vol(S(w_j, r_j)) - Vol(S(w_i, r_i) \cap S(w_j, r_j))$$

Agora estamos interessados em calcular o volume desta interseção. Devido à construção do parâmetro γ , se a restrição (4.2) é ativa então duas faces do cubo ($\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$) ou do dodecaedro ($\gamma \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$) são paralelas. Para o caso $\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nós temos:

$$S(w_i, r_i) \cap S(w_j, r_j) \subseteq (S(w_i, r_i) - C(w_i, r_i)) \cup (S(w_j, r_j) - C(w_j, r_j)),$$

então

$$\begin{aligned} Vol(S(w_i, r_i) \cap S(w_j, r_j)) &\leq \frac{1}{6}(Vol(S(w_i, r_i)) - Vol(C(w_i, r_i))) \\ &+ Vol(S(w_j, r_j) - Vol(C(w_j, r_j))) \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\pi(r_i^3 + r_j^3) - 8\gamma^3 r_i^3 - 8\gamma^3 r_j^3\right) = \frac{4}{3}(r_i^3 + r_j^3)\left(\frac{\pi}{6} - \gamma^3\right). \end{aligned}$$

O caso do dodecaedro é análogo.

4.1.1 Quantidade de Esferas

De acordo com a **Definição 2**, presente no capítulo 3, vamos encontrar um recobrimento elipsoidal fraco para o elipsóide de segurança $\mathbf{E}_{seg}(c, R)$ cujas esferas possuam os maiores raios possíveis. Antes de apresentar o modelo matemático para determinar tal recobrimento, devemos ter em mãos um dado muito importante que é a quantidade de esferas. Para determinar esta quantidade resolvemos um problema de programação linear inteira semelhante a um problema da mochila, o qual denominamos problema auxiliar.

Dados $w \in \mathbb{R}^3$, $r > 0$ e $S(w, r)$, a esfera de centro w e raio r , se $C(w, r)$ e $D(w, r)$ são o cubo e o dodecaedro inscritos em $S(w, r)$ respectivamente, a razão entre o volume do cubo inscrito em $S(w, r)$ e $S(w, r)$ é $\theta_c = 0.367553$ e a razão entre o volume do dodecaedro inscrito em $S(w, r)$ e $S(w, r)$ é $\theta_d = 0.664909$. Se $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_M\}$ é o conjunto dos valores possíveis dos raios, $\{n_1, n_2, \dots, n_M\}$ é a quantidade de esferas de cada raio e P neste caso é uma penalidade, uma cota para o número de bolas é dada resolvendo-se o seguinte problema de programação inteira mista:

$$(P3) \quad \min \sum_{i=1}^M n_i + \eta - Pp$$

Sujeito a:

$$\theta \sum_{i=1}^M n_i \text{Vol}(S(\bullet, \mathbf{r}_i)) - \eta \text{Vol}(E_{seg}(\bullet, R)) \leq 0 \quad (4.6)$$

$$\theta \sum_{i=1}^M n_i \text{Vol}(S(\bullet, \mathbf{r}_i)) - p \text{Vol}(E_{seg}(\bullet, R)) \geq 0 \quad (4.7)$$

$$n_i \in Z, \quad p \leq 1, \quad \eta \geq 1.$$

A quantidade de esferas $n = \sum_{i=1}^M n_i$ e a proporção de recobrimento p dependem do valor de θ . Quando $\theta = \theta_c$ teremos um número maior de esferas, porém o volume de espaços não preenchidos por nenhuma esfera dentro do elipsoide é menor do que quando usamos $\theta = \theta_d$. Os valores de $\theta \in (\theta_c, \theta_d)$ proporcionaram resultados satisfatórios.

4.2 Teoria para a solução do modelo

Como já foi dito anteriormente, o recobrimento elipsoidal é um problema discreto e, por esta razão, a maior parte das abordagens utilizadas para a sua resolução são baseadas em técnicas de otimização discreta. Nós apresentamos um método de solução que consta de três fases. Primeiramente, modelamos o problema. Posteriormente construímos uma formulação contínua para os raios. Finalmente resolvemos o problema não convexo obtido nas fases anteriores. Para resolver a parte discreta nós utilizamos um novo modelo e uma metodologia que nós denominamos “Versão Contínua” ou “Formulação Contínua” para resolver uma classe de problemas de otimização discreta [15]. Nesta última fase, o problema não convexo obtido é um problema de programação geométrica signomial, que é resolvido utilizando a técnica de condensação. Esta técnica aproxima o problema original por um problema convexo de programação geométrica, veja [2] [3]).

Para darmos uma visão geral do método proposto para resolver o problema de recobrimento elipsoidal discreto, na fase dois a estratégia contínua para resolver uma classe de problemas de otimização discreta consiste basicamente em introduzir algumas restrições no modelo. Estas restrições obrigam as variáveis contínuas a assumirem valores discretos. Na próxima fase, a técnica de condensação utiliza um método de pontos interiores primal dual que resolve uma sequência de problemas de programação geométrica posinomial. O limite desta sequência é a solução para o problema original.

A Programação Geométrica foi desenvolvida no início da década de 60 no século passado por Clarence Melvin Zener (1905 – 1993), Richard J. Duffin (1909 – 1996) e Elmor L. Peterson(1938). Em 1961 Zener descobriu uma maneira simples de minimizar uma espécie de polinômio generalizado que aparecia nos modelos matemáticos

desenvolvidos por ele ao estudar alguns problemas existentes na Westinghouse Electric Corporation. Ao associar-se com Zener, Duffin e Peterson, formularam uma teoria que denominaram desigualdades geométricas para então desenvolver esta técnica que hoje é a Programação Geométrica [5]. É denominada desta forma devido ao relacionamento existente entre as médias geométricas e aritméticas, as quais são fundamentais na elaboração da teoria de dualidade para este tipo de problema. Num problema de Programação Geométrica as parcelas existentes na função objetivo são chamadas de posinômios e a função objetivo é chamada função posinomial.

Programação Geométrica Generalizada é uma extensão dos problemas de programação geométrica mas, em termos computacionais preservam as restrições do problema de programação geométrica. Podem ser: potências fracionárias de posinomiais, máximo de posinômios e produtos e somas de posinômios. Problemas caracterizados por funções objetivos e restrições que envolvem a diferença de dois posinômios são chamados de Problemas de Programação Signomial. Para esta classe de problemas em muitos casos sé é possível determinar um mínimo local. Para determinar a solução global é necessário utilizar técnicas de otimização global.

4.2.1 O problema primal de programação geométrica posinomial

O problema primal de programação geométrica posinomial é um problema da forma:

$$\min g_0(t)$$

Sujeito a:

$$g_k(t) \leq 1, \dots, p, t > 0 \quad (4.8)$$

onde

$$g_k(t) = \sum_{i \in J[k]} c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}} \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (4.9)$$

$$J[k] = \{m_k, m_{k+1}, \dots, n_k\}, \quad k = 0, 1, \dots, p$$

$$m_0 = 1, m_1 = n_0 + 1, m_2 = n_1 + 1, \dots, m_p = n_{p-1} + 1, n_p = n$$

as constantes c_{ij} são positivas e a_{ij} são números reais.

4.2.2 O Problema de Programação Geométrica na forma convexa

Posinômios em geral não são convexos, porém a função $f(t) = t^{1/2}$ é um contra-exemplo. No entanto, através de uma mudança de variáveis podemos escrever o problema de programação geométrico primal como um problema de programação convexa como será visto no problema abaixo:

$$\min f_0(z) \quad (4.10)$$

Sujeito a:

$$f_k(z) \leq 0, \quad k = 1, \dots, p, \quad z > 0 \quad (4.11)$$

onde

$$f_k(z) = \log \sum_{i \in J[k]} e^{\sum_{j=1}^m a_{ij} z_j + \tilde{c}_i}$$

$$J[k] = \{m_k, m_{k+1}, \dots, n_k\}, \quad k = 0, 1, \dots, p$$

$$m_0 = 1, \quad m_1 = n_0 + 1, \quad m_2 = n_1 + 1, \dots, \quad m_p = n_{p-1} + 1, \quad n_p = n$$

as constantes c_{ij} são positivas e a_{ij} são números reais.

Dado um problema de otimização, associado a ele existe um problema dual. Tal problema é obtido quando estudamos uma teoria chamada Teoria de Dualidade, dentre elas destaca-se: Dualidade Lagrangeana, Dualidade de Wolf, Dualidade Fenchel. Duffin, Zener e Peterson desenvolveram uma teoria de dualidade baseada em uma transformação denominada Transformada de Legendre resultando no problema a seguir.

4.2.3 O problema dual de programação geométrica posinomial

Associado ao problema primal de programação geométrica temos o seu dual, dado por:

$$\max v(\delta, \lambda) = \prod_{k=1}^p \left\{ \lambda_k^{\lambda_k} \prod_{i \in J[k]} \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \right\} \quad (4.12)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i \in J[k]} \delta_i = 1 \quad (4.13)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \delta_i = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.14)$$

$$\delta_i \geq 0 \quad (4.15)$$

A equação 4.13 é chamada condição de normalidade e a condição 4.14 é chamada de condição de ortogonalidade.

Um fato importante é que a função dual v , definida em 4.12, não é uma função côncava, no entanto a função

$$f(\delta) = \ln(v(\delta)) = \sum_{i=1}^n \{\delta_i \ln(c_i) - \delta_i \ln \delta_i\} + \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i \in J[k]} \delta_i \right) \ln \left(\sum_{i \in J[k]} \delta_i \right) \quad (4.16)$$

satisfaz esta propriedade, sendo a mesma duas vezes diferenciável com matriz Hessiana dada por:

$$\nabla^2 f(\delta) = \begin{bmatrix} H_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & H_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & H_p \end{bmatrix}$$

onde

$$H_0 = \begin{bmatrix} -\delta_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\delta_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\delta_{n_0}^{-1} \end{bmatrix}$$

e

$$H_k = \begin{bmatrix} (\lambda_k^{-1} - \delta_{m_k}^{-1}) & \lambda_k^{-1} & \lambda_k^{-1} & \dots & \lambda_k^{-1} \\ \lambda_k^{-1} & (\lambda_k^{-1} - \delta_{m_k}^{-1}) & \lambda_k^{-1} & \dots & \lambda_k^{-1} \\ \lambda_k^{-1} & \lambda_k^{-1} & (\lambda_k^{-1} - \delta_{m_k}^{-1}) & \dots & \lambda_k^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_k^{-1} & \lambda_k^{-1} & \lambda_k^{-1} & \dots & (\lambda_k^{-1} - \delta_{m_k}^{-1}) \end{bmatrix}$$

$k = 1, \dots, p$

O relacionamento entre as variáveis primais e duais de um problema de PG é dado por:

$$\delta_i g_k(t) = \lambda_k c_{ij} \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}}, \quad i \in J[k] \quad (4.17)$$

Definição 6. Um problema de programação geométrica primal (PPGP) é dito consistente, factível ou viável se existe $t \in \mathbb{R}^m$ que satisfaça as equações 4.8 e 4.9, se $g_k(t) < 1$, $k = 1, \dots, p$ então o problema (PPGP) é dito superconsistente ou estritamente viável.

Um problema de programação geométrica dual (PPGD) é dito consistente, factível ou viável se existe $\delta \in \mathbb{R}^n, \delta_i \geq 0$ que satisfaça 4.13, 4.14 e 4.15.

Definição 7. Um problema de programação geométrica é dito canônico se o seu problema dual possuir uma solução viável estritamente positiva, isto é, se existir $\delta \in \mathbb{R}^n, \delta_i > 0$ que satisfaça as equações (4.13) e (4.14).

Definição 8. Definimos o grau de dificuldade d de um problema de programação geométrica como: $d = n - (m + 1)$.

4.2.4 Programação Geométrica Generalizada

Um problema de programação geométrica generalizado é um problema de programação geométrica posinomial onde a função objetivo e as restrições são funções especiais de posinômios. Estas funções são: potências fracionárias positivas, máximos de posinômios, somas de posinômios, etc. Os posinômios são preservados por potências de inteiros positivos. Na função de potências fracionárias posinomiais algumas dessas potências podem ser manipuladas através de operações algébricas e esse novo problema ainda têm solução viável e continua sendo um problema de programação geométrica. O termo “programação geométrica generalizada” apresentado aqui difere daquele definido em [5], porque nesta referência o termo programação geométrica generalizada significa uma generalização de desigualdades geométricas.

4.2.5 Programação Geométrica Signomial

O problema primal de programação geométrica signomial

O problema primal de programação geométrica signomial é uma generalização do problema posinomial e pode ser escrito na seguinte forma:

$$\min g_0(t)$$

Sujeito a:

$$g_k(t) \leq 1, \quad k = 1, \dots, p, \quad t > 0 \quad (4.18)$$

onde

$$g_k(t) = \sum_{i \in J[k]} \sigma_i c_{ij} \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}} \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (4.19)$$

$$J[k] = \{m_k, m_{k+1}, \dots, n_k\} \quad k = 0, 1, \dots, p$$

$$m_0 = 1, \quad m_1 = n_0 + 1, m_2 = n_1 + 1, \dots, m_p = n_{p-1} + 1, \quad n_p = n$$

as constantes c_{ij} são positivas, a_{ij} são números reais e $\sigma_i = \pm 1$.

Devido ao fato da existência de termos negativos, o problema acima não pode ser convertido para um problema convexo usando-se transformações de variáveis. Desta forma os problemas signomiais são problemas não convexos e qualquer ponto estacionário ou que satisfaça as condições de Karush-Kuhn-Tucker pode ser apenas um mínimo local ou apenas um ponto de sela. Tal fato levou inicialmente os pesquisadores a tentarem resolver este tipo de problema usando programação geométrica sequencial, que consiste em resolver problemas signomiais através de uma sequência de problemas de programação geométrica posinomial. Esta metodologia denomina-se condensação. Atualmente as técnicas de otimização global têm sido exploradas, ver [23], [22], [24] e [21], por exemplo. Neste trabalho utilizamos a condensação, técnica mais tradicional para a resolução de problemas signomiais.

4.2.6 O problema de Programação Geométrica Signomial Misto(PGSM)

O problema de Programação Geométrica Signomial Misto (PGSM) é uma generalização do problema de Programação Geométrica Signomial e pode ser escrito da seguinte forma:

$$(PGSM) \quad \min \quad g_0(t, u)$$

Sujeito a:

$$g_k(t, u) \leq 1, \quad k = 1, \dots, p \quad (4.20)$$

$$t_j > 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.21)$$

$$u_l > 0, \quad u_l \in \{d_l^1, d_l^2, \dots, d_l^{q_l}\}, \quad l = 1, \dots, q \quad (4.22)$$

tal que

$$g_k(t, u) = \sum_{i \in J[k]} \sigma_i c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}} \prod_{l=1}^q u_j^{b_{il}} \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (4.23)$$

$J[k] = \{m_k, m_{k+1}, \dots, n_k\}$, $k = 0, 1, \dots, p$, $\sigma_i = \pm 1$, as constantes c_i são positivas, a_{ij} e b_{il} são números reais e $d_l^h > 0$, $h = 1, \dots, q_l$.

Neste problema a parte discreta é dada pelas variáveis u e a parte contínua pelas variáveis t . Para resolvermos a parte contínua do problema, utilizaremos a técnica apresentada a seguir.

4.2.7 Condensação em programação geométrica signomial

A abordagem mais comum para resolver problemas de programação geométrica signomial é a condensação, uma técnica que consiste em aproximar termos com vários posinômios, isto é, termos da forma: $\sum_{i \in J[k]} c_{ij} \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}}$ por um único termo posino-

mial da forma $c_{ij} \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}}$. Para tanto fazemos uso da seguinte desigualdade:

$$\sum_{i \in J[k]} c_{ij} \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}} \geq \prod_{i \in J[k]} \left(\frac{c_{ij} \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}}}{\omega_i} \right)^{\omega_i}, \quad \sum_{i \in J[k]} \omega_i = 1, \quad (4.24)$$

a qual é uma generalização da desigualdade existente entre a média aritmética e a média geométrica, valendo a igualdade se:

$$\omega_i = \frac{c_{ij} \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}}}{\sum_{i \in J[k]} c_{ij} \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}}}. \quad (4.25)$$

Desigualdades desse tipo são chamadas desigualdades geométricas e são a base de toda a teoria de programação geométrica. A partir delas, Duffin et al [5] construiu a teoria de dualidade para este tipo de problema.

Podemos escrever uma restrição signomial da seguinte forma:

$$g_k(t) = P_k(t) - Q_k(t) \quad (4.26)$$

onde P_k e Q_k são termos posinomiais e usando a desigualdade dada em (4.24) podemos reescrever a restrição $g_k(t) \leq 1$ como:

$$\frac{P_k(t)}{1 + Q_k(t)} \leq \frac{P_k(t)}{s_i} \quad (4.27)$$

onde $s_i = \prod_{i \in J[k]} \left(\frac{u_i(t)}{\omega_i} \right)^{\omega_i}$ e $\omega_i = \frac{u_i(t')}{1 + Q_k(t')}$

t' é chamado ponto de referência. Sendo s_i um único termo posinomial, temos que a restrição $g_k(t) \leq 1$ com g_k dada na equação 4.26 é agora uma restrição posinomial.

4.2.8 Métodos de Pontos Interiores para Programação Geométrica

Karmarkar, em 1984, ver [8], apresentou um método de pontos interiores projetivo com redução de potencial para Programação Linear contendo complexidade polinomial. Com isto, os métodos de Pontos Interiores passaram a ser uma área bastante explorada. Alguns pesquisadores tentaram melhorar os níveis de complexidade do algoritmo de Karmakar, assim como outros tentaram aplicar a metodologia dos métodos de pontos interiores em outros problemas de programação matemática. Mais tarde, mesmo com complexidade polinomial, constatou-se que o algoritmo de Karmakar não era muito eficiente computacionalmente, então pesquisadores começaram a investigar outros métodos de pontos interiores tais como: o método de barreira logarítmica desenvolvido inicialmente por Fiacco e McCormick [6], o método de centros e o método afim-escala desenvolvido inicialmente por Dikin

[4].

Kojima et al [9], em 1993, propôs a metodologia denominada Métodos de Pontos Interiores Primal-Dual Inviáveis para Programação Linear; que consiste em utilizar o método de Newton para resolver o sistema de equações não lineares dado pelas condições de otimalidade de Karush-Kunh- Tucker do problema de programação linear. O método não exige que os problemas primal ou dual sejam viáveis pois ele é capaz de determinar uma solução ótima ou afirmar que não existe solução viável para o par primal-dual em uma região suficientemente grande.

Apresentaremos alguns Métodos de Pontos Interiores que foram utilizados para resolver o problema de Programação Geométrica. Os métodos foram divididos em dois grupos: um que busca condições para se obter um algoritmo com complexidade polinomial, que são os trabalhos de Nesterov e Nemirovskii [18], Den Hertog [7], Kortanek e Zhu [11], e o grupo de métodos que tenta obter resultados computacionais eficientes apresentando resultados teóricos sobre convergência: são os trabalhos de Kortanek e No [12] e Kortanek, Xu e Ye [10], sendo o primeiro um método afim-escala e o último um método de pontos interiores inviáveis.

4.2.9 Complexidade Polinomial em Programação Geométrica

Nesterov e Nemirovskii [18] criaram uma classe de funções chamadas “Funções auto-concordantes” na tentativa de obter complexidade polinomial para problemas convexos. Tal classe de funções possui propriedades interessantes quando relacionadas com a direção de Newton.

Definição 9. Uma função $\varphi : F_0 \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada “ k auto-concordante” sobre F_0 , $k \geq 0$, se φ for três vezes continuamente diferenciável em F_0 e para todo $y_0 \in F_0$ e $h \in \mathbb{R}^m$, é válida a seguinte desigualdade:

$$|\nabla^3 \varphi(y)(h, h, h)| \leq 2k (h^t \nabla^2 \varphi(y) h)^{2/3} \quad (4.28)$$

Sejam f_0, f_1, \dots, f_m funções convexas duas vezes continuamente diferenciáveis e $X \subseteq \mathbb{R}^m$ um conjunto convexo. Consideremos o seguinte problema:

$$\min f_0(x)$$

(PC) Sujeito a:

$$f_i(x) \leq 0$$

$$i = 1, \dots, m, \quad x \in C$$

Podemos associar ao problema PC uma função $\varphi_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que denominamos

função barreira logarítmica dada por:

$$\varphi_{B(x)} = \frac{f_0}{\mu} - \sum_{i=1}^m \log(-f_i(x)) \quad \mu > 0 \quad (4.29)$$

Para o problema de Programação Geométrica, Nesterov e Nemirovski [18] fazem uma reformulação do problema primal dado na forma exponencial e provam que a função barreira logarítmica associada ao problema reformulado onde n é o número de termos posinomiais e p é o número de restrições do problema é $(4n + p + 3)$ -autoconcordante. Den Hertog [7] provou que a função barreira logarítmica associada ao problema dual dada por:

$$\varphi_{B(x)} = -\frac{\ln(v(x))}{\mu} - \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \quad (4.30)$$

é 2-autoconcordante.

Em 1993 Kortanek e Zhu [11] publicaram um algoritmo polinomial de barreira logarítmica para problemas convexos linearmente restritos, (LCCP), onde a condição essencial para a obtenção da convergência polinomial é que a função barreira satisfizesse a “Condição Escalada de Lipschitz” (SLC) dada a seguir:

Definição 10. Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \beta < 1$, dizemos que f satisfaz a “Condição Escalada de Lipschitz” (SLC) se existe $M > 0$ tal que

$$\|X[\nabla f(x + \Delta x) - \nabla f(x) - \nabla^2 f(x) \Delta x]\| \leq M \Delta^t x \nabla^2 f(x) \Delta x \quad (4.31)$$

sempre que $x > 0$ e $\|X^{-1} \Delta x\| \leq \beta$ com $X = \text{diag}(x)$.

Com relação ao problema dual de Programação Geométrica Kortanek e Zhu [11] provaram que se o problema primal possuir alguma restrição com mais de um termo posinomial então a função barreira dada em 4.30 não satisfaz a SLC.

O trabalho de Kortanek e No [12] apresenta resultados sobre a convergência do algoritmo afim-escala e resolve também um dos problemas congênitos de Programação Geométrica que é a conversão de uma solução ótima do problema dual para uma solução ótima do problema primal.

Suponha que ao invés da função objetivo dual utilizemos a função barreira logarítmica com $\mu > 0$ fixo. Então a sequência gerada pelo algoritmo afim-escala converge para a única solução do problema dual de Programação Geométrica.

4.2.10 Métodos Numéricos

Durante os anos 60 e 70 uma variedade de métodos numéricos foram propostos para Programação Geométrica, que vão desde o original por Duffin, Peterson e Zener para

métodos elipsóides. Alguns deles são baseados no primal enquanto outros no dual. Alguns começaram com a forma padrão, enquanto outros com a forma convexa. Existem pelo menos duas grandes abordagens pra resolver um PPG usando técnicas modernas de otimização convexa. Uma é o método de pontos interiores que ataca o problema primal usando os métodos desenvolvidos por Nesterov and Nemirovskii [18]. Esta abordagem é apresentada no trabalho de Boyd [3] e o outro é o método de pontos interiores primal-dual inviável desenvolvidos por Kortanek, Xu and Ye [10].

4.2.11 Uma Estratégia Contínua para a Resolução de Problemas Signomiais Discretos

Nesta subseção, nosso objetivo é explicar como vamos resolver a parte discreta do (PGSM) através de uma abordagem contínua. Nós adotamos esta abordagem e nos certificamos para que as condições iniciais sejam satisfeitas. Para isto, adicionamos restrições signomiais ao problema original nas quais a viabilidade só é possível para valores discretos, transformando o problema signomial discreto em um problema de programação geométrica signomial.

O conceito de versão contínua

Seja um conjunto discreto

$$S = \{d_1, d_2, \dots, d_M\}$$

Uma versão contínua ou formulação funcional de S é um conjunto de desigualdades da forma:

$$\begin{aligned} f_{\rho_k}^k(x) &\leq \lambda, \quad \lambda > 0, \quad k = 1, \dots, M-1 \\ r_1 &\leq x \leq r_M \end{aligned}$$

onde $f_{\rho_k}^k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:

$$f_{\rho_k}^k(d_k) = f_{\rho_k}^k(d_{k+1}) = \lambda \tag{4.32}$$

$$f_{\rho_k}^k(x) > \lambda \quad \text{se } x \in (d_k, d_{k+1}) \tag{4.33}$$

$$f_{\rho_k}^k(x) < \lambda \quad \text{se } x \in \mathbb{R} \cap [d_k, d_{k+1}]^c \tag{4.34}$$

$$f_{\rho_k} \text{ é contínua em } \mathbb{R} \tag{4.35}$$

A figura 4.1 ilustra um exemplo de uma versão contínua que possui quatro soluções discretas.

Se $f_{\rho_k}^k$ é uma função signomial para todo k , $k = 1, \dots, M-1$, $f_{\rho_k}^k$ é dita uma versão contínua signomial para o conjunto S .

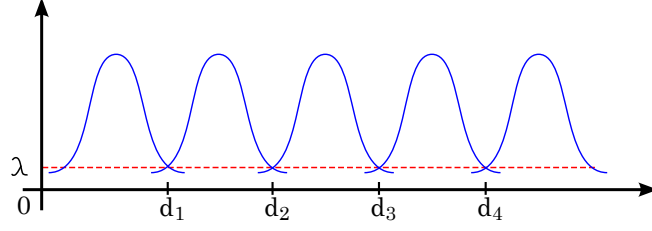


Figura 4.1: Função Versão Contínua

Considerando o problema (*PGSM*) e $f_{\rho_k}^k$ uma versão contínua signomial para o conjunto $\{d_l^1, d_l^2, \dots, d_l^{q_l}\}$, a restrição (4.22) pode agora ser reformulada da seguinte forma:

$$f_{\rho_k}^{lk}(u_l) < \lambda \quad l = 1, \dots, q; \quad k = 1, \dots, q_l - 1 \quad u_l \in [d_l^1, d_l^{q_l}].$$

Uma construção signomial para uma versão contínua

Dados $\rho > 0$ e o conjunto $S = \{d_1, d_2, \dots, d_M\}$, sejam $f_{\rho_k}^k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções definidas da seguinte forma:

$$f_{\rho_k}^k(x) = \frac{9}{4}d_k^{-\theta_k\alpha}x^{\theta_k\alpha} - d_k^{-\theta_k\rho}x^{\theta_k\rho} - \frac{1}{4}d_k^{-2\theta_k\rho}x^{2\theta_k\rho} \quad k = 1, \dots, M - 1 \quad (4.36)$$

onde:

$$\alpha = 2 \frac{\log(\frac{2+2\rho}{3})}{\log(2)}, \quad \theta_k = \frac{\log(2)}{\log(d_{k+1}) - \log(d_k)}, \quad k = 1, \dots, M - 1. \quad (4.37)$$

Proposição 4. Para cada $k = 1, \dots, M - 1, \rho > 0$ e $\lambda = 1$, se θ_k e α são dados por (4.37), então $f_{\rho_k}^k$ dada por (4.36) satisfaz as condições (4.32, 4.33, 4.34, 4.35).

O problema contínuo de programação geométrica (*CSGP*) é uma versão contínua do problema *DSGP* como descrito abaixo:

$$CSGP \quad \min \quad g_0(t, u)$$

Sujeito a:

$$g_k(t, u) \leq 1, \quad k = 1, \dots, p \quad (4.38)$$

$$\frac{f_{\rho_k}^{lk}(u_l)}{\lambda} \leq 1, \quad l = 1, \dots, q, \quad k = 1, \dots, q_l - 1 \quad (4.39)$$

$$\frac{u_l}{d_l^{q_l}} \leq 1$$

$$\frac{r_l^1}{d_l} \leq 1$$

$$t_j > 0, \quad j = 1, \dots, m$$

tal que $g_k(t, u)$ é dada por (4.23), $J[k] = \{m_k, m_{k+1}, \dots, n_k\}$, $k = 0, 1, \dots, p$, e (4.39) é uma versão contínua signomial de (4.22).

O problema CSGP pode ser resolvido por vários métodos da literatura, ([27],[26], [19],[14]).

4.2.12 Modelo de Programação Geométrica Signomial

PREDF

Min t^{-1}

$$\text{Sujeito a: } t - \sum_n^{i=1} \frac{4}{3} \pi r_i^3 \leq 0$$

$$\alpha_x^{-2} w_i^x r_i^{-2\beta_x} + \alpha_y^{-2} w_i^y r_i^{-2\beta_y} + \alpha_z^{-2} w_i^z r_i^{-2\beta_z} + \alpha_x^{-2} x_0^2 r_i^{-2\beta_x} + \alpha_y^{-2} y_0^2 r_i^{-2\beta_y} + \alpha_z^{-2} z_0^2 r_i^{-2\beta_z} - 2\alpha_x^{-2} x_0 w_x r_i^{-2\beta_x} - 2\alpha_y^{-2} y_0 w_y r_i^{-2\beta_y} - 2\alpha_z^{-2} z_0 w_z r_i^{-2\beta_z} \leq 1 \quad (4.40)$$

$$2w_i^x w_j^x + 2w_i^y w_j^y + 2w_i^z w_j^z + \gamma^2 r_i^2 + \gamma^2 r_j^2 + 2\gamma^2 r_i r_j - w_i^{x^2} - w_i^{y^2} - w_i^{z^2} - w_j^{x^2} - w_j^{y^2} - w_j^{z^2} \leq 0 \quad j = i + 1, \dots, n \quad (4.41)$$

$$\mathbf{r}_1 / r_i \leq 1, \quad r_i / \mathbf{r}_M \leq 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, M. \quad (4.42)$$

$$\mathbf{r}_k^{-\theta_k \alpha} r_i^{\theta_k \alpha} - \mathbf{r}_k^{-2\theta_k \rho} r_i^{\theta_k \rho} - \frac{1}{4} \mathbf{r}_k^{-2\theta_k \rho} r_i^{2\theta_k \rho} \leq 1 \quad (4.43)$$

A restrição (4.40) diz respeito a inclusão das esferas no elipsóide e é equivalente a restrição (4.1). A restrição (4.41) garante que a distância entre os centros das esferas $S(w_i, r_i)$ e $S(w_j, r_j)$ seja maior ou igual a $\gamma(r_i + r_j)$ e é equivalente a restrição (4.2) e por fim, (4.3) será representada pelas restrições (4.42) e (4.43) onde esta última define os limites inferiores e superiores.

4.3 Um algoritmo para resolver o problema de recobrimento elipsoidal discreto fraco (*PREDF*)

Dados $\epsilon > 0$, $\rho > 0$, $\gamma \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{(3)}}, \frac{\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{5\sqrt{3}(1+\sqrt{5})} \right\}$, $\theta \in \{0.367553, 0.664909\}$, $c \in \mathbb{R}^3$, $(R_x, R_y, R_z) \in \mathbb{R}_{+++}^3$, $0 < \mathbf{r}_1 < \mathbf{r}_2 < \dots < \mathbf{r}_M$, sendo $\mathbf{r}_M \leq \min\{R_x, R_y, R_z\}$.

Faça:

$$\tilde{\epsilon} = (1 - \epsilon \frac{R_{min}}{\mathbf{r}_M}), \quad R_{\tilde{\epsilon}} = \text{diag}(R_x - \tilde{\epsilon}r, R_y - \tilde{\epsilon}r, R_z - \tilde{\epsilon}r), \quad \beta_x = \frac{\log\left(\frac{R_x - \tilde{\epsilon}r_M}{R_x - \tilde{\epsilon}r_1}\right)}{\log\left(\frac{r_M}{r_1}\right)}, \quad \alpha_x = \frac{R_x - \tilde{\epsilon}r_1}{r_1^{\beta_x}}$$

$$\beta_y = \frac{\log\left(\frac{R_y - \tilde{\epsilon}r_M}{R_y - \tilde{\epsilon}r_1}\right)}{\log\left(\frac{r_M}{r_1}\right)} \text{ e } \alpha_y = \frac{R_y - \tilde{\epsilon}r_1}{r_1^{\beta_y}}, \quad \beta_z = \frac{\log\left(\frac{R_z - \tilde{\epsilon}r_M}{R_z - \tilde{\epsilon}r_1}\right)}{\log\left(\frac{r_M}{r_1}\right)} \text{ e } \alpha_z = \frac{R_z - \tilde{\epsilon}r_1}{r_1^{\beta_z}}$$

$$\text{Calcule } \alpha = 2 \frac{\log\left(\frac{2+2^\rho}{3}\right)}{\log(2)} \quad \theta_k = \frac{\log(2)}{\log(\mathbf{r}_{k+1}) - \log(\mathbf{r}_k)} \quad k = 1, \dots, M - 1$$

Enquanto

Passo 1: Resolva o problema **P3** da seção 4.1.1 para obter o número n de esferas.

Passo 2: Use o algoritmo (1) para resolver o problema

$$\begin{aligned} & \min t^{-1} \\ \text{P3} \quad & \text{Sujeito a:} \\ & t - \sum_{i=1}^n \frac{4}{3}\pi r_i^3 \leq 0 \\ & \text{e as restrições dadas em (4.40),(4.41) e (4.42).} \end{aligned}$$

Se (\tilde{w}, \tilde{r}) for a solução obtida no passo 2 e $\tilde{r}_i \in \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_M\}$

PARE, (\tilde{w}, \tilde{r}) é um (PREDF).

Senão

Passo 3:

$$t^0 = t^k \quad k = k + 1.$$

Insira no problema P3 as restrições dadas por

$$\mathbf{r}_k^{-\theta_k \alpha} r_i^{\theta_k \alpha} - \mathbf{r}_k^{-\theta_k \rho} r_i^{\theta_k \rho} - \frac{1}{4} \mathbf{r}_k^{-2\theta_k \rho} r_i^{2\theta_k \rho} \leq 1. \quad (4.44)$$

Volte ao Passo 2.

Fim enquanto

Desta forma, apresentamos a nossa proposta para a resolução do problema de recobrimento elipsoidal utilizando esferas de diferentes raios. É uma abordagem nova, uma outra maneira de tratar as dificuldades inerentes ao problema, já que as abordagens comumente utilizadas estão representadas nos trabalhos [13] e [25]. Podemos observar nos três trabalhos que as duas restrições principais do problema dizem respeito a garantir que as esferas estejam dentro do recipiente e que não fiquem sobrepostas. Nos dois trabalhos citados, a técnica utilizada para contornar as dificuldades produzidas pela não convexidade e pela não linearidade das restrições é a reformulação, de forma que o problema é resolvido de forma aproximada para que depois seja resolvido na sua formulação original. A nossa proposta é semelhante ao que já foi feito na literatura, porém a nossa reformulação utiliza a programação geométrica como base e utiliza uma técnica de resolução tradicional, que é a condensação, e apresenta uma técnica relativamente nova, a Versão Contínua.

Capítulo 5

Uma abordagem linear inteira

Neste capítulo, apresentamos um modelo linear totalmente binário que utiliza a idéia do *Problema de Localização de Facilidades* para determinar as prováveis localizações para os centros das esferas de forma que cada esfera seja uma facilidade que pode atender algumas localidades do elipsóide.

A seguir, apresentaremos algumas proposições e definições necessárias. Seja $B_\infty[0, 1] = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\|_\infty = 1\}$ e $Z = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset B_\infty[0, 1]$.

Se

$$\|x_i - x_j\| \leq \frac{2(r-1)}{R}$$

para algum i, j , onde r é o raio da maior esfera contida em $E(c, R)$, então temos os resultados a seguir.

Proposição 5. Se $x \in B_\infty[0, 1]$, e $w_i = \frac{Rx}{\|x\|}$ então

$$w \in \partial E(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^t R^{-2} x = 1, \quad R = \text{diag}(R_x, R_y, R_z)\}.$$

Prova 4. $\frac{xR}{\|x\|} R^{-2} \frac{Rx}{\|x\|} = 1$.

Proposição 6. Se $\|x_i - x_j\| \leq \frac{2(r-1)}{R}$ e $w_i = \frac{Rx_i}{\|x_i\|}$ então $\|w_i - w_j\| \leq 2(r-1)$.

Prova 5. $\|w_i - w_j\| = \left\| \frac{Rx_i}{\|x_i\|} - \frac{Rx_j}{\|x_j\|} \right\| \leq \bar{R} \left\| \frac{x_i}{\|x_i\|} - \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\|$.

Mas

$$\left\| \frac{x_i}{\|x_i\|} - \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| = \left\| \frac{x_i \|x_j\|}{\|x_i\| \|x_j\|} - \frac{x_j \|x_i\|}{\|x_j\| \|x_i\|} \right\| = \frac{1}{\|x_i\| \|x_j\|} \|x_i \|x_j\| - x_j \|x_i\|\|$$

$$\leq \frac{\max\{\|x_i\|, \|x_j\|\}}{\|x_i\| \|x_j\|} \|x_i - x_j\|. \text{ Como } \|x_i\| \geq 1 \text{ e } \|x_j\| \geq 1 \text{ então}$$

$$\frac{\max\{\|x_i\|, \|x_j\|\}}{\|x_i\| \|x_j\|} \|x_i - x_j\| \leq \|x_i - x_j\|.$$

$$\text{Fazendo } \alpha = \frac{\max\{\|x_i\|, \|x_j\|\}}{\|x_i\| \|x_j\|} \leq 1, \text{ temos } \|w_i - w_j\| \leq \bar{R} \|x_i - x_j\|$$

$$\leq \frac{2(r-1)\alpha \bar{R}}{R} = \alpha 2(r-1) \leq 2(r-1).$$

Esta proposição expressa o fato de que dados dois pontos dentro do elipsóide, existe pelo menos um que satisfaz $\|w_i - w_j\| \leq 2(r - 1)$.

Definição 1. Para cada $i = 1, \dots, N$ onde $N = \aleph_0(Z)$, $Z = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset B_\infty[0, 1]$, seja

$$W_i = \{w_j; \|w_i - w_j\| \leq 2(r - 1)\}, \quad N_i = \aleph_0(z_i),$$

$$\bar{w}_i = \frac{1}{N_i} \left(\sum_{j=1}^{N_i} w_j^1, \sum_{j=1}^{N_i} w_j^2, \sum_{j=1}^{N_i} w_j^3 \right)^t.$$

Os pontos \bar{w}_i são denominados baricentros ou pontos de Weber de W_i , que no Facility Location Problem são as facilidades. O centro do elipsóide também pertence a este conjunto, portanto ele possui $N + 1$ pontos.

Definição 2. Sejam \bar{w}_i a facilidade i e w_j a localização j ,

$\delta_{ij} = 1$, se \bar{w}_i atende w_j ou $\delta_{ij} = 0$, caso contrário;

$z_{ij} = 1$, se $S(\bar{w}_i, r_i)$ e $S(\bar{w}_j, r_j)$ se interceptam ou $z_{ij} = 0$, caso contrário.

$y_i = 1$, se \bar{w}_i é o centro da i -ésima esfera ou $y_i = 0$ caso contrário;

$\lambda_i = 1$, se a esfera $S(\bar{w}_i, r_i)$ tem centro \bar{w}_i e raio r_i ou $\lambda_i = 0$, caso contrário.

O problema de otimização associado ao $\text{Pell}(E(c, R))$ que utiliza a idéia do Facility Location Problem é apresentado a seguir:

$$(P1) \quad \text{Minimizar} \quad \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^N D_{i(j+N+1)} \delta_{ij} - \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^N D_{ij} z_{ij} + \sum_{i=1}^{N+1} r_i + M \sum_{i=1}^{N+1} y_i$$

Sujeito a :

$$\sum_{j=1}^N \delta_{ij} + \sum_{j=1}^N z_{ij} - (N + 1)y_i \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n + 1 \quad (5.1)$$

$$\sum_{i=1}^{N+1} \delta_{ij} \geq 1, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (5.2)$$

$$\sum_{i=1}^{N+1} z_{ij} \geq y_i, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (5.3)$$

$$2\delta_{ij}r_{max} - r_i \leq 2r_{max} - D_{i(j+N+1)}, \quad \forall i = 1, \dots, n + 1, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (5.4)$$

$$D_{ij}z_{ij} + D_{ij}y_i + D_{ij}y_j - r_i - r_j \leq 2D_{ij}, \quad \forall i = 1, \dots, n + 1, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (5.5)$$

$$4r_{max}z_{ij} + 2(r_i + r_j) \leq 3D_{ij} + 4r_{max}, \quad \forall i = 1, \dots, n + 1, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (5.6)$$

$$r_i \leq r_{max}y_i, \quad \forall i = 1, \dots, n + 1 \quad (5.7)$$

$$r_i - 2\lambda_{i1} - 4\lambda_{i2} - 7\lambda_{i3} - 9\lambda_{i4} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n + 1 \quad (5.8)$$

$$y_i - \lambda_{i1} - \lambda_{i2} - \lambda_{i3} - \lambda_{i4} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n + 1 \quad (5.9)$$

$$\delta_{ij} \in \{0, 1\}, \quad z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad y_i \in \{0, 1\}, \quad \lambda_i \in \{0, 1\}. \quad (5.10)$$

Na função objetivo, $D_{i(j+N+1)}$ é a distância entre o baricentro e os pontos localizados na borda do elipsóide, D_{ij} é a distância entre dois baricentros e M é uma constante com um valor grande. Nas restrições, r_{max} é o maior valor possível para o raio de uma esfera em um dado elipsóide. Este modelo é dividido em três grupos de restrições: o primeiro grupo compreende as restrições (5.1), (5.2) e (5.3) e é relativo às restrições tradicionais do Problema de Localização de Facilidades e que no contexto deste trabalho estão relacionadas ao preenchimento do elipsóide. O segundo grupo de restrições é composto por (5.4), (5.5) e (5.6) e está associado às interseções entre as esferas e o terceiro grupo compreende as restrições (5.7), (5.8) e (5.9) as quais estão relacionadas à determinação dos raios das esferas. Mais detalhadamente, as restrições (5.1) expressam que é possível que cada baricentro (facilidade) cubra ou atenda todos os pontos da borda do elipsóide (localidades) e tenha interseções com outros baricentros. As restrições (5.2) asseguram que cada ponto da borda do elipsóide será coberto por pelo menos um baricentro. As restrições (5.3) estabelecem que um baricentro tem que interceptar pelo menos um outro. As restrições (5.4) asseguram que as esferas cubram os pontos da borda do elipsóide que estiverem mais próximos. As restrições (5.5) asseguram que ou as esferas estão próximas e têm alguma interseção ou estão distantes e não têm interseção nenhuma. Esta restrição é importante porque exclui a possibilidade de duas esferas estarem próximas, porém sem interseção e sem espaço suficiente para outra esfera entre elas. As restrições (5.6) estabelecem que duas esferas podem se interceptar somente em um ponto ou pode haver uma certa sobreposição, não sendo permitida a sobreposição total, ou também pode não haver nenhuma interseção, que é o caso de duas esferas estarem distantes uma da outra. As restrições (5.7) estabelecem que o tamanho do raio de uma esfera está limitado por r_{max} , que é o maior raio possível de uma esfera em um dado elipsóide, pois $r_{max} \leq \min\{Rx, Ry, Rz\}$. As restrições (5.8) estabelecem os raios das esferas como sendo 0, 2, 4, 7 ou 9. As restrições (5.9) estabelecem que se um baricentro é escolhido para ser uma esfera, obrigatoriamente algum tamanho de raio deve ser atribuído a ela.

Capítulo 6

Resultados Computacionais

Os resultados computacionais serão divididos em duas partes relativas às duas abordagens do problema de Recobrimento Elipsoidal apresentadas neste trabalho. Na seção 6.1 apresentaremos os aspectos relativos à abordagem de Programação Geométrica e seus resultados e a seção 6.2 apresentará aspectos e resultados relativos à abordagem de Programação Linear.

6.1 Abordagem de Programação Geométrica

Os experimentos desta abordagem foram conduzidos da seguinte forma: nós simulamos as dimensões de 7 elipsóides e resolvemos o problema com o método apresentado no capítulo 4. Após a solução, construímos uma fina malha, na qual a distância entre dois pontos é $d = 0.5$. Esta malha é construída considerando o interior e a borda de cada elipsóide, ou seja, temos uma única malha para cada experimento. A malha é utilizada para calcular a porcentagem de pontos que são cobertos por todas as esferas. A tabela 6.1 mostra os resultados resumidos obtidos por cada um dos 7 experimentos. Além desta tabela com o resumo dos resultados, apresentamos as tabelas com a solução detalhada de cada um dos experimentos. Para avaliarmos o comportamento do nosso algoritmo, nós testamos duas instâncias que estão em [13]: a segunda, cujo elipsóide possui raios (12, 8, 6) e a sexta, elipsóide de raios (10, 10, 10) presentes na tabela 6.2.

Como utilizamos a técnica de Condensação para a resolução do problema de programação geométrica signomial, a solução obtida não é global.

O algoritmo para a solução desta abordagem foi implementado em Matlab e o tempo execução das instâncias foi de no máximo 5 minutos num laptop DELL com processador Intel core I5 com 4 GB de memória.

6.1.1 Pós Otimização

Uma vez encontrada uma solução para o problema, houve a necessidade de verificar se todas as esferas estavam totalmente contidas no elipsóide de segurança. Mas para fazermos esta verificação de forma direta, precisaríamos tomar vários pontos x pertencentes à borda do elipsóide e resolvermos o seguinte problema de programação não linear para cada um dos mesmos:

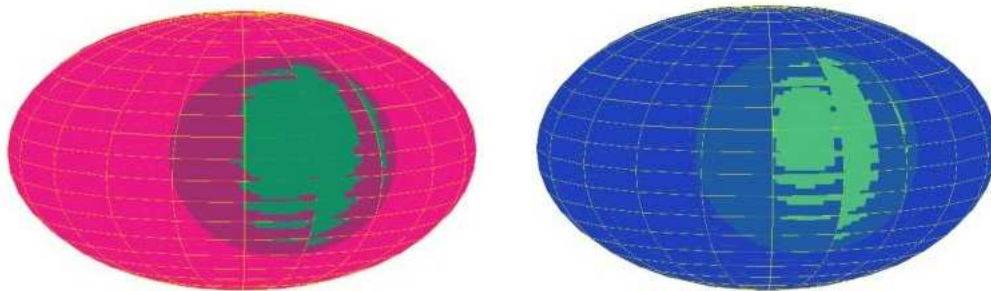
$$\min \| \bar{c} - x \|$$

Sujeito a:

$$(x_i - c)^t R_{\bar{c}}^{-2} (x_i - c) = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

onde \bar{c} seria o centro da esfera, c o centro do elipsóide e x o ponto na borda do elipsóide.

Se pelo menos um dos valores obtidos na função objetivo fosse menor do que o raio da esfera que estivesse sendo avaliada, então neste caso saberíamos que algum ponto pertencente à borda da esfera estaria fatalmente fora do elipsóide. Porém, resolver este problema para todas as esferas pertencentes a uma determinada solução não seria nada fácil. Diante desta situação, criamos um algoritmo que faz a projeção do conjunto de pontos, que são os vértices de um cubo de lado unitário, $\{111, -111, -1 - 11, 1 - 11, 11 - 1, -11 - 1, -1 - 1 - 1, 1 - 1 - 1\}$ em cada esfera participante de uma determinada solução. Feito isto, se existirem um ou mais pontos de uma esfera que estejam fora do elipsóide de segurança, aquele que se encontrar mais distante é tomado como referência e esta esfera sofrerá um reposicionamento até que o ponto de referência esteja dentro do elipsóide de segurança, como observado nas figuras a seguir. É importante salientar que este procedimento foi executado com parcimônia porque modificar os centros das esferas para que estejam dentro do elipsóide de segurança também pode aumentar a interseção entre elas, por isso houve todo um cuidado envolvido na execução desta tarefa para que a solução final não fosse prejudicada no ponto de vista desta outra restrição do problema.



A tabela abaixo é um resumo dos resultados obtidos com os testes computacionais. A primeira coluna mostra o número do experimento. As três colunas posteriores apresentam os raios de cada elipsóide. A quinta coluna mostra o valor que foi utilizado para o elipsóide de segurança. A sexta coluna apresenta o número de iterações signomiais que foram utilizadas para a obtenção da solução. A sétima coluna mostra o número de esferas utilizadas no preenchimento e a última coluna mostra o índice de preenchimento alcançado. Vale lembrar que o índice de preenchimento é a porcentagem de pontos da malha que são cobertos por pelo menos uma esfera.

Instância	Rx	Ry	Rz	E_{seg}	iter. sig.	n	IP
1	10	8	6	0.3	20	21	99.893676902870723
2	12	8	6	0.2	20	25	99.9373858596400
3	12	10	6	0.2	20	32	99.5969919813869
4	12	10	8	0.2	20	8	99.756774455081228
5	12	8	8	0.3	20	7	99.1678712349103
6	10	10	10	0.3	86	4	99.541929882338849
7	14	12	10	0.3	50	7	99.9733005820473

Tabela 6.1: Resultados-resumo

A seguir, detalhamos as soluções obtidas para cada teste feito. As tabelas abaixo seguem a ordem dos experimentos, ou seja, a primeira tabela é relativa ao experimento 1, cujo elipsóide tem raios (10, 8, 6) e assim sucessivamente. Em todas as tabelas, a primeira coluna é relativa ao número de esferas, as colunas x, y e z correspondem às coordenadas de cada esfera presente na solução e a quinta coluna é relativa ao raio de cada esfera. Imediatamente após cada tabela está a figura do elipsóide preenchido pelas esferas e o valor de cada parâmetro utilizado na respectiva solução. O parâmetro γ que proporcionou todos os melhores resultados foi o do cubo, o que significa que a interseção máxima que as esferas podem alcançar é até que as faces dos cubos inscritos a elas se toquem.

	x	y	z	r
1	14.818197732723949	13.727685812884648	13.844226721218172	4
2	13.112541473048589	15.904236016628948	9.643409976244822	4
3	13.498286306340775	12.013075207403258	18.335276941369074	4
4	11.398125871066982	8.145237843695282	15.449480807149168	4
5	11.622504289324651	20.557957788763680	14.206960504605867	4
6	5.118020164625483	14.177565807811973	13.963493913095459	4
7	22.848334110829057	14.204996789354622	13.974189174033516	4
8	16.125071561779222	19.538769577341920	11.941309032396671	4
9	16.238997974218460	7.442092506127198	14.616735237375179	4
10	12.004133440137975	9.463649566494244	10.875081439031044	4
11	15.261405846838358	18.128986988664117	17.398881245113373	4
12	16.649454477912649	10.740951088530366	10.591829098291615	4
13	8.702735893140353	17.029269248292216	16.833464026520531	4
14	20.441913938932188	9.851568756287755	13.600269028524394	4
15	8.088033751910595	17.829790807074364	12.135360268615420	4
16	8.879060999827479	13.420639265876268	10.360439383365437	4
17	19.025519534281056	12.695355662146442	17.507674486801349	4
18	7.585863299519524	9.884779928307880	13.187158913300438	4
19	20.019683807039463	18.341343860483772	14.813492364906198	4
20	19.096378628319517	15.236840436667782	10.479173183832067	4
21	8.530623654069348	12.102347026171291	17.226044383043089	4

Tabela 6.2: Resultados instância 1

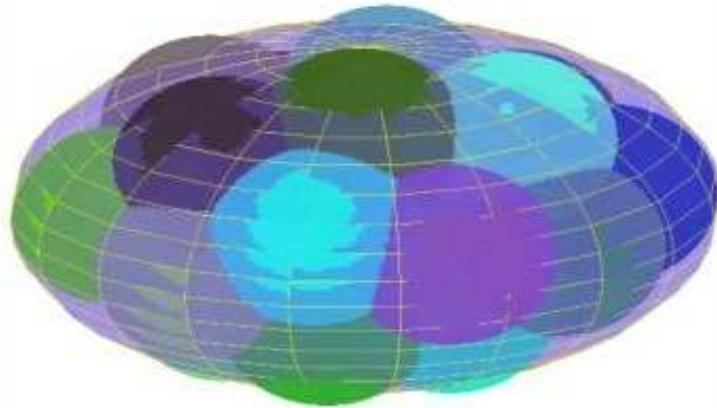


Figura 6.2: instância 1

	x	y	z	r
1	18.888715896714462	15.667601358060931	16.211734558644068	4
2	16.107441547783079	15.249014548237026	11.744891740911017	4
3	14.422348778611058	16.887339508803954	19.992827782992691	4
4	14.567060634629824	10.108503563803547	16.540503777316719	4
5	16.756289733739955	21.849903035047813	15.320469759450976	4
6	5.664768835230602	15.907490680933613	16.134567867282229	4
7	24.849373033059223	18.037200363981750	14.930413141269552	4
8	13.101758494757746	19.699897267872092	13.017680521439718	4
9	17.201172140446417	12.681207618470610	19.357097520461991	4
10	12.468834113970509	12.267795184270666	13.134994039856752	4
11	18.281693811883130	19.393561763472789	19.204174708021423	4
12	21.541506542660073	14.321477428128784	13.121741355457067	4
13	9.571690131107665	17.082233851341307	18.979536895597739	4
14	25.043861679781124	13.694978251798942	16.240164454926209	4
15	8.571026036430128	19.786799794165770	15.327671478620905	4
16	9.468733590983367	15.885541012828327	12.943308236565789	4
17	22.653444989712700	16.677061636958619	18.929662165280657	4
18	8.597459332104140	12.082563994594199	15.688748807245217	4
19	21.539075226050471	20.918116123068671	16.270273794488133	4
20	19.561590322658589	18.682763710212846	12.671745666428047	4
21	11.700227676720161	12.828090574348236	18.964397261730635	4
22	17.952610370987916	11.452968517653279	13.838601727105777	4
23	12.508647323281041	21.070457522692099	17.563222039017884	4
24	13.061377775644731	15.978877420765054	15.691092410549002	4
25	21.234808367628133	11.222784403740000	17.109614358993454	4

Tabela 6.3: Resultados instância 2

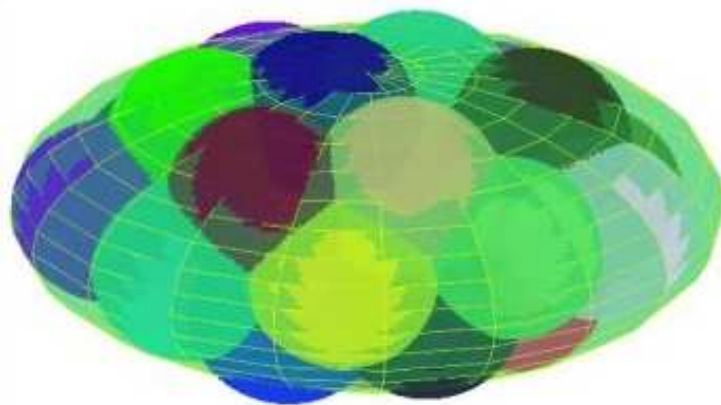


Figura 6.3: instância 2

	x	y	z	r
1	16.234939016603914	17.666151635380441	17.126382146472316	4
2	15.118016496011933	14.901448206330711	11.742781438822023	4
3	18.565964709948599	23.290855111261649	17.184523669972013	4
4	17.150697826678140	7.783850068365294	15.371406759308574	4
5	26.212565882351285	16.138378637110556	16.660626691120097	4
6	7.517638432720244	15.610338570174772	18.090581143399543	4
7	14.477236055431765	21.393739975511622	18.928924264954873	4
8	18.624375144134479	11.793267577435101	12.957116312059805	4
9	18.296747400822785	10.756479294157357	18.924737512210726	4
10	17.014175025849784	19.202324131008659	12.282407403665093	4
11	22.860908068722924	13.014810517765879	18.489975426146824	4
12	10.142635803264593	16.440729274328355	12.677005068453470	4
13	24.040749069012207	20.384184477383045	16.622298642101519	4
14	9.633726987923977	11.277846183120994	17.964524516921387	4
15	11.539261042463437	15.001479042269812	16.637428734933994	4
16	22.997161832780712	17.446142306477640	13.209966269960610	4
17	10.006446678144190	22.255170749644609	16.293007417235650	4
18	21.488270796813012	9.433432217629816	15.896800219161047	4
19	20.324159577169212	19.536383803679623	19.156153014657701	4
20	7.646810236378299	13.121668946466336	14.400586981203638	4
21	19.024502714982294	15.200706150166125	19.888156417808720	4
22	12.811728440314067	19.644768328237213	14.259930359770097	4
23	10.688734339867754	18.720709886878598	19.138766954458895	4
24	19.979451818543691	15.085288664077142	15.335846340998730	4
25	15.330130445860036	12.160185849146600	15.736461824367634	4
26	20.715647917969491	21.386816501611221	13.724593537971112	4
27	14.542962818797657	13.911655242316469	19.934568946671906	4
28	11.768252581867742	11.811004679491498	12.989605484985690	4
29	14.627235819036500	23.592329343320340	14.956713061835497	4
30	12.463904466611917	8.159304680158719	16.036481293665926	4
31	23.345843399601709	13.068752946275682	14.150660309494590	4
32	7.128055871288905	18.926623425450611	15.098640192421643	4

Tabela 6.4: Resultados instância 3

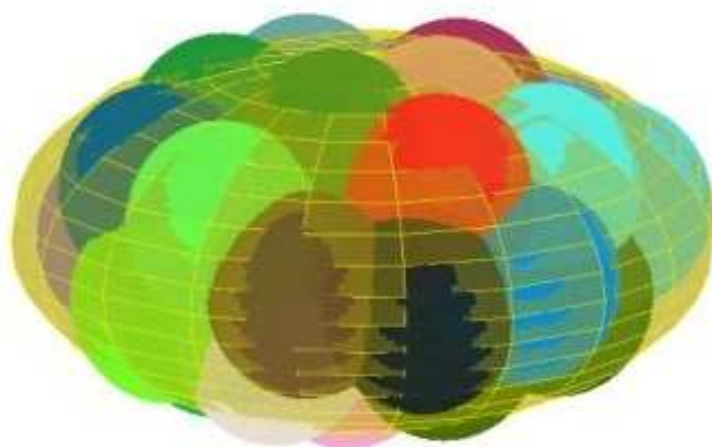


Figura 6.4: instância 3

	x	y	z	r
1	14.433660778055453	15.938726414259676	19.944895849609289	7
2	17.937135378987243	16.001633242227864	12.225952218188507	7
3	13.292761021659562	21.137291907438929	14.583700115441179	7
4	19.273894847232025	11.086869808214130	17.486110562033925	7
5	23.736489540861729	15.901142231304405	15.692275231182450	7
6	8.041877490599415	16.598655974081090	16.603906363163063	7
7	19.502460922335114	20.595931171781992	17.919990133154919	7
8	12.649636813540324	11.303497274852214	14.481038403100730	7

Tabela 6.5: Resultados instância 4

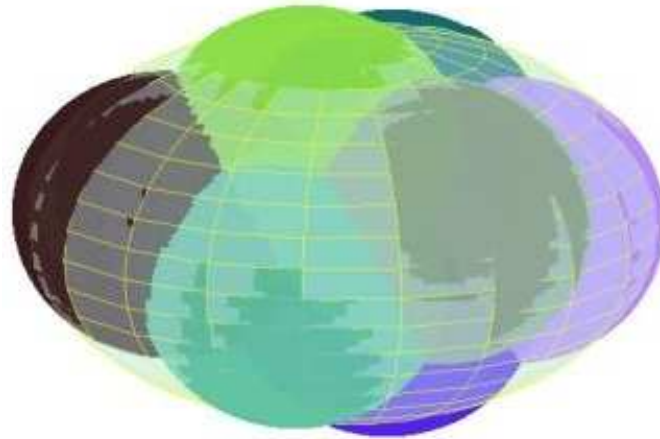


Figura 6.5: instância 4

	x	y	z	r
1	18.225864986994395	12.351879056893436	12.351879055860728	4
2	13.136594587717196	17.107937258991946	11.799907719685573	7
3	19.072999366685842	15.023637196026337	20.253801168049954	7
4	13.136594588237788	11.799907719358750	17.107937258106240	7
5	19.072999367318712	20.253801167762063	15.023637195368813	7
6	8.127475212000235	17.372143417317780	17.372143418191403	7
7	22.679920941706939	14.895802198136378	14.895802198926145	7

Tabela 6.6: Resultados instância 5

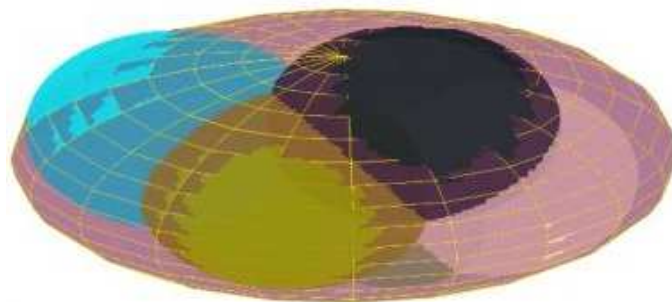


Figura 6.6: instância 5

	x	y	z	r
1	10.910802435641781	14.356698637797098	18.522834390258499	9
2	11.386012823094530	14.253801559960943	9.520485823050825	9
3	17.323250260881348	18.613316873950875	14.476470363642878	9
4	17.117729993408457	10.314373342391864	14.523239151615956	9

Tabela 6.7: Resultados instância 6

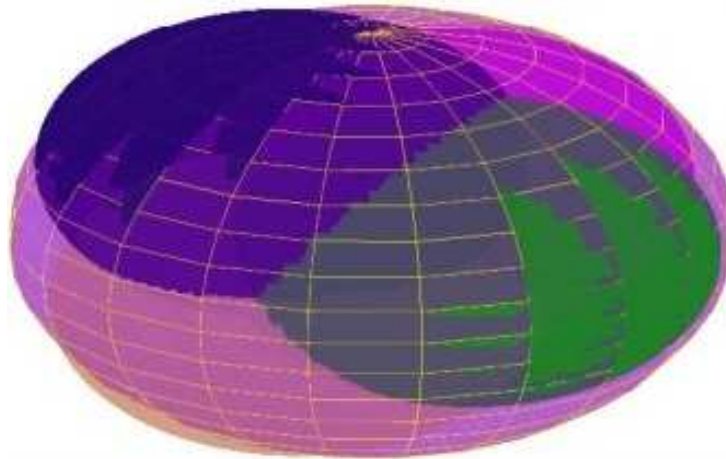


Figura 6.7: instância 6

	x	y	z	r
1	18.097477148716727	25.971885032719427	18.059078191180962	7
2	18.064081335489409	18.704556581994787	12.673121549875781	9
3	18.052272725644396	18.697635123297811	23.381459214424815	9
4	23.385065296526701	12.333329759864425	18.053402939381105	9
5	10.381207052230891	21.794119950511877	18.045175619845033	9
6	12.690122943479791	12.319570072009325	18.041600219972697	9
7	25.721005630724108	21.730294410064129	18.036292787712465	9

Tabela 6.8: Resultados instância 7

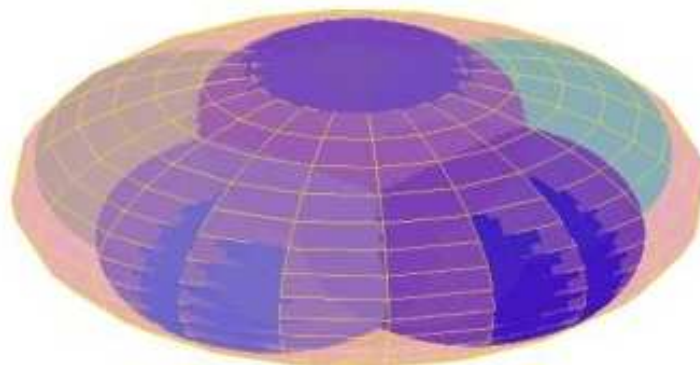


Figura 6.8: instância 7

Uma vez apresentados os resultados de todos os testes executados, ressaltamos que o nosso algoritmo funcionou satisfatoriamente para todos eles produzindo preenchimentos acima de 90%, inclusive para os dois exemplos presentes em [13] mas infelizmente, não houve a possibilidade de comparação de resultados nestes dois casos porque a avaliação feita neste citado artigo é completamente diferente da que foi feita neste trabalho não havendo nenhum parâmetro que permitisse tal procedimento.

6.2 Abordagem de Programação Linear

Os resultados abaixo foram obtidos utilizando o resolvidor CPLEX. A exposição dos resultados segue a mesma ordem anterior: abaixo temos a tabela resumo e em seguida cada uma das soluções detalhadas. Vale salientar que as coordenadas dos centros das esferas mudam um pouco porque neste caso o centro do elipsóide está na origem, fato que não ocorria nas soluções obtidas na abordagem de Programação Geométrica.

As instâncias utilizadas para testar esta abordagem foram as mesmas utilizadas anteriormente na seção 6.1. Nesta abordagem o modelo foi implementado em Matlab, que gera o problema e se comunica com o CPLEX para que este possa resolvê-lo. Daí a sua execução é dada em dois tempos: um tempo de montagem do problema e um tempo de execução propriamente dita utilizando o CPLEX. O tempo de montagem do problema ficou em torno de 30 minutos e a resolução pelo CPLEX é imediata.

Instância	Rx	Ry	Rz	<i>eps</i>	n	IP
1	10	8	6	0.1	18	96.172368503346050
2	12	8	6	0.25	18	92.308896425776155
3	12	10	6	0.17	10	98.375300386584470
4	12	10	8	0.005	10	97.312045901025911
5	12	8	8	0.1	5	96.554283705121691
6	10	10	10	0.1	8	99.748510523637009
7	14	12	10	0.1	10	97.201900998558230

Tabela 6.9: Resultados-resumo

	x	y	z	r
1	-4.259940097870565	-3.407952078296452	0	4
2	-3.984093279300315	0	-2.390455967580189	4
3	-6.400000000000000	0	0	4
4	-3.984093279300315	0	2.390455967580189	4
5	-4.259940097870565	3.407952078296452	0	4
6	0	-2.776854249492379	-2.082640687119285	4
7	0	-4.400000000000000	0	4
8	0	-2.776854249492379	2.082640687119285	4
9	0	0	-2.400000000000000	4
10	0	0	2.400000000000000	4
11	0	2.776854249492379	-2.082640687119285	4
12	0	4.400000000000000	0	4
13	0	2.776854249492379	2.082640687119285	4
14	4.259940097870565	-3.407952078296452	0	4
15	3.984093279300315	0	-2.390455967580189	4
16	6.400000000000000	0	0	4
17	3.984093279300315	0	2.390455967580189	4
18	4.259940097870565	3.407952078296452	0	4

Tabela 6.10: Resultados instância 1 cplex

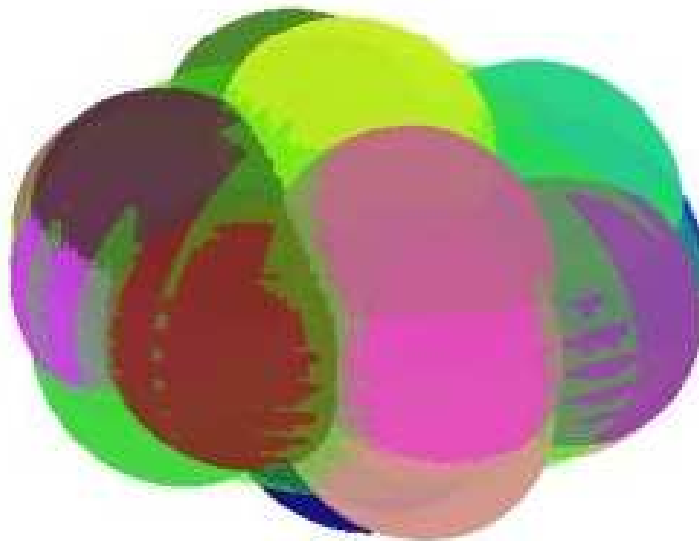


Figura 6.9: instância 1 cplex

	x	y	z	r
1	-5.989130491225039	-3.992753660816693	0	4
2	-5.801999801238821	0	-2.900999900619411	4
3	-10.500000000000000	0	0	2
4	-5.801999801238821	0	2.900999900619411	4
5	-5.989130491225039	3.992753660816693	0	4
6	0	-3.256854249492380	-2.442640687119285	4
7	0	-3.256854249492380	2.442640687119285	4
8	0	0	3.000000000000000	4
9	0	3.256854249492380	-2.442640687119285	4
10	0	3.256854249492380	2.442640687119285	4
11	5.989130491225039	-3.992753660816693	0	4
12	5.801999801238821	0	-2.900999900619411	4
13	10.500000000000000	0	0	2
14	5.801999801238821	0	2.900999900619411	4
15	5.989130491225039	3.992753660816693	0	4
16	0	-4.362285838184012	0	4
17	-0.000000000000000	-0.000000000000000	-2.926100257235603	4
18	0	4.362285838184012	0	4

Tabela 6.11: Resultados instância 2 cplex



Figura 6.10: instância 2 cplex

	x	y	z	r
1	-4.549116566928418	-3.790930472440348	0	7
2	-7.035400000000001	0	0	7
3	-4.549116566928418	3.790930472440348	0	7
4	0	-4.702000000000002	0	7
5	0	0	-3.020200000000001	4
6	0	0	3.020200000000001	4
7	0	4.702000000000002	0	7
8	4.549116566928418	-3.790930472440348	0	7
9	7.035400000000001	0	0	7
10	4.549116566928418	3.790930472440348	0	7

Tabela 6.12: Resultados instância 3 cplex



Figura 6.11: instância 3 cplex

	x	y	z	r
1	-3.134620161842848	-2.612183468202373	0	7
2	-5.035000000000000	0	0	7
3	-3.134620161842848	2.612183468202373	0	7
4	0	-1.632316554094768	-1.305853243275815	7
5	0	-6.020000000000000	0	4
6	0	-1.632316554094768	1.305853243275815	7
7	0	3.035000000000000	0	7
8	3.134620161842848	-2.612183468202373	0	7
9	5.035000000000000	0	0	7
10	3.134620161842848	2.612183468202373	0	7

Tabela 6.13: Resultados instância 4 cplex

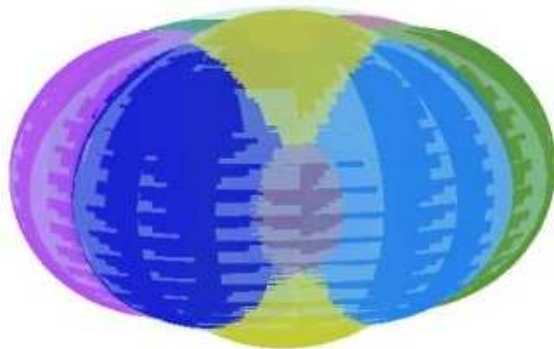


Figura 6.12: instância 4 cplex

	x	y	z	r
1	-5.699999999999999	0	0	7
2	0	-1.700000000000000	0	7
3	0	1.202081528017131	-1.202081528017131	7
4	0	1.202081528017131	1.202081528017131	7
5	5.699999999999999	0	0	7

Tabela 6.14: Resultados instância 5 cplex

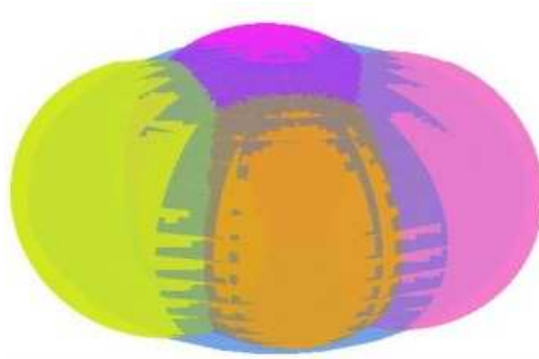


Figura 6.13: instância 5 cplex

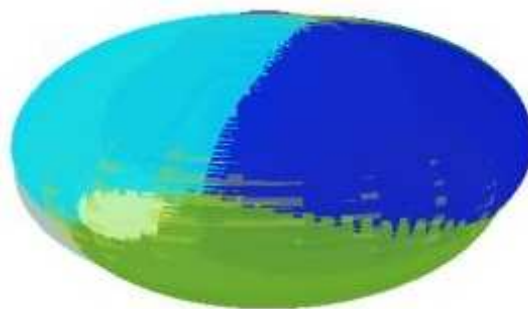


Figura 6.14: instância 6 cplex

	x	y	z	r
1	-4.525483399593904	-4.525483399593904	0	4
2	-1.343502884254441	0	1.343502884254441	9
3	-1.096965511460289	1.096965511460289	-1.096965511460289	9
4	0	-1.343502884254441	-1.343502884254441	9
5	0	4.525483399593904	4.525483399593904	4
6	1.096965511460289	-1.096965511460289	1.096965511460289	9
7	4.525483399593904	0	-4.525483399593904	4
8	1.343502884254441	1.343502884254441	0	9

Tabela 6.15: Resultados instância 6 cplex

	x	y	z	r
1	-5.116178341710296	-4.385295721465968	0	7
2	-5.900000000000000	0	0	9
3	-5.116178341710296	4.385295721465968	0	7
4	0	-3.900000000000001	0	9
5	0	0	-6.400000000000000	4
6	0	0	6.400000000000000	4
7	0	3.900000000000001	0	9
8	5.116178341710296	-4.385295721465968	0	7
9	5.900000000000000	0	0	9
10	5.116178341710296	4.385295721465968	0	7

Tabela 6.16: Resultados instância 7 cplex

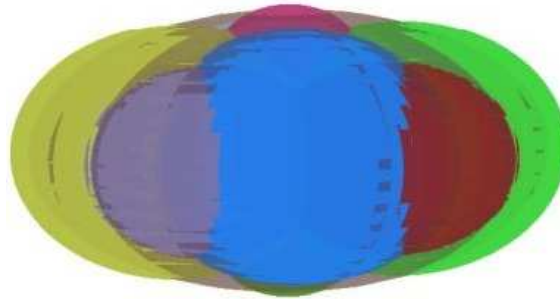


Figura 6.15: instância 7 cplex

Ao observarmos as soluções desta abordagem também avaliamos que o funcionamento do algoritmo foi satisfatório com todos os preenchimentos acima de 90%.

Capítulo 7

Considerações Finais

Neste trabalho foi apresentado um modelo não linear não convexo inteiro misto e um método de solução para o mesmo. Para a resolução deste modelo utilizamos a técnica de Condensação, o que nos proporcionou um ótimo local como solução. Apresentamos também uma outra abordagem na qual fazemos uma aproximação do problema original por problema de programação linear binário com características de um problema de localização, onde os facilitadores são os baricentros de um conjunto de pontos pertencentes à fronteira do elipsóide. Na primeira abordagem utilizamos o algoritmo de Pós Otimização para verificar se a solução obtida realmente encontrava-se totalmente dentro do elipsóide de segurança e caso contrário reposicionar as esferas de forma que esta condição fosse verificada. Os resultados alcançados foram considerados satisfatórios com preenchimentos acima de 90% em todos os casos em ambas abordagens. Não houve possibilidade de comparação de resultados com outros artigos da literatura pois há vários aspectos do problema que podem ser levados em consideração na hora da avaliação dos mesmos, como nível de preenchimento, nível de interseção entre as esferas e incidência de esferas fora do elipsóide de segurança entre outros e esta divergência de aspectos de avaliação ocorreu entre este trabalho, [13] e [25].

Como trabalhos futuros, para a abordagem não linear não convexa inteira mista pretendemos desenvolver um algoritmo que nos proporcione uma solução global, um algoritmo que faça pré-processamento para auxiliar na resolução do mesmo e também uma metaheurística que forneça para o algoritmo principal um bom ponto inicial. Para a abordagem de Programação Linear pretendemos definir uma nova abordagem utilizando Teoria dos Grafos.

Referências Bibliográficas

- [1] F. A. Al-Khayyal, C. Larsen, and T. Van Voorhis, *A relaxation method for nonconvex quadratically constrained quadratic programs*, Journal of Global Optimization **6** (1995), 215–230, 10.1007/BF01099462.
- [2] C. S. Beightler and D. T. Phillips, *Applied geometric programming*, Wiley & Sons, New York, 1976, Applied Geometric Programming.
- [3] S. Boyd, S. Jean Kim, L. Vandenberghe, and Hassibi Arash, *A tutorial on geometric programming*, Optimization and Engineering **8** (2007), 67–127.
- [4] I. I. Dikin, *Iterative solution of problems of linear and quadratic programming*, Soviet Mathematics Doklady **8** (1967), 674–675.
- [5] R.J. Duffin, E.L. Peterson, and C. Zener, *Geometric programming - theory and applications*, Wiley & Sons, New York, 1967, Applied Geometric Programming.
- [6] A. Fiacco and G. McCormick, *Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques*, John Wiley & Sons, 1955, (nonlinear programming).
- [7] D. Hertog, C. Roos, and T. Terlaky, *On the classical logarithmic barrier function method for a class of smooth convex programming problems*, Journal of Optimization Theory and Applications **73** (1992), 1–25, 10.1007/BF00940075.
- [8] N. Karmarkar, *A new polynomial-time algorithm for linear programming*, Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing (New York, NY, USA), STOC '84, ACM, 1984, pp. 302–311.
- [9] M. Kojima, N. Megido, and S. Mizuno, *A primal-dual infeasible-interior-point algorithm for linear programming*, Mathematical Programming **61** (1993), 263–280.

- [10] K. O. Kortanek, X. Xu, and Y. Ye., *An infeasible interior point method for solving primal and dual geometric programs*, Mathematical Programming **76** (1995), 155–181.
- [11] K. O. Kortanek and Jishan Zhu, *A polynomial barrier algorithm for linearly constrained convex programming problems*, MATHEMATICS OF OPERATIONS RESEARCH **18** (1993), no. 1, 116–127.
- [12] K.O. Kortanek and H. No, *A second order affine scaling algorithm for geometric programming dual with logarithmic barrier*, Optimization **23** (1992), 303–322.
- [13] L. Liberti, N. Maculan, and Y. Zhang, *Optimal configuration of gamma ray machine radiosurgery units: the sphere covering subproblem*, Optimization Letters **3** (2009), 109–121.
- [14] C. D. Maranas and C. A. Floudas, *Global optimization in generalized geometric programming*, Engng **21** (1997), 351–569.
- [15] R. Q. Nascimento, E. F. Lima Junior, and R. M. O.Santos, *A continuous strategy to solve a class of discrete optimization problems*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **36** (2010), 279–286.
- [16] R. Q Nascimento, A. F. U. S. Macambira, L. A. F. Cabral, and N. M. Filho, *A model to the ellipsoidal filling problem*, Vietnam Journal of Mathematics **40** (2012), 345–354.
- [17] R. Q Nascimento, A. F. U. S. Macambira, L. A. F. Cabral, and R. V. Pinto, *The discrete ellipsoidal covering problem: a discrete geometric programming approach*, Aceito para publicação em Discrete Applied Mathematics (2012).
- [18] A. Nemirovskii and Y. Nesterov, *Interior point polinomials methods in convex programming, theory and algorithms*, SIAM Publications, 1994, (Interior Point Methods).
- [19] S. Qu, K. Zhang, and Y. Ji, *A new global optimization algorithm for signomial geometric programming via lagrangian relaxation*, Applied Mathematics and Computation **184** (2007), no. 2, 886 – 894.
- [20] U. Raber, *A simplicial branch-and-bound method for solving nonconvex all-quadratic programs*, Journal of Global Optimization **13** (1998), 417–432, 10.1023/A:1008377529330.

- [21] M. J. Rijckaert and X. M. Martens, *Comparison of generalized geometric programming algorithms*, Journal of Optimization Theory and Applications **26** (1978), 205–242, 10.1007/BF00933404.
- [22] P. Shen, *Linearization method of global optimization for generalized geometric programming*, Applied Mathematics and Computation **162** (2005), no. 1, 353 – 370.
- [23] P. Shen and H. Jiao, *A new rectangle branch-and-pruning approach for generalized geometric programming*, Applied Mathematics and Computation **183** (2006), no. 2, 1027 – 1038.
- [24] P. Shen and K. Zhang, *Global optimization of signomial geometric programming using linear relaxation*, Applied Mathematics and Computation **150** (2004), no. 1, 99 – 114.
- [25] A. Sutou, Y. Dai, and Communicated P. M. Pardalos, *Global optimization approach to unequal sphere packing problems in 3d*, Problems in 3D, Journal of Optimization and Applications, 2002.
- [26] Y. Wang and Z. Liang, *A deterministic global optimization algorithm for generalized geometric programming*, Applied Mathematics and Computation **168** (2005), 722–737.
- [27] H. Yang and D. L. Bricker, *Investigation of path-following algorithms for signomial geometric programming problems*, European Journal of Operations Research **103** (1997), 230–241.