

UM MÉTODO DE FEIXE COM REGIÃO DE CONFIANÇA

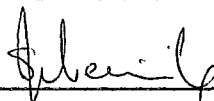
RAÚL JESÚS AGUILA FUMEY

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



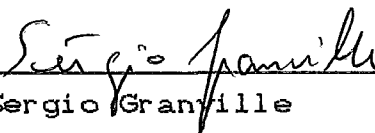
Prof. Paulo Roberto Oliveira
(Presidente)



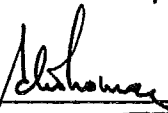
Prof.^a Susana Scheimberg de Makler



Prof. Nelson Maculan Filho



Prof. Sergio Granville



Prof. Antônio Clécio Fontelles Thomaz

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JANEIRO DE 1991

AGUILA FUMEY, RAÚL JESÚS

Um Método de Feixe com Região de Confiança. (Rio de Janeiro), 1991.

V, 139 p. (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1991).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Um Método de Feixe com Região de Confiança.

I COPPE/UFRJ II. Título (Série).

Aos meus filhos.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Paulo Roberto Oliveira pela sua orientação e apoio durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao professor Rafael Correa F. pela valiosa ajuda.

À Universidade Católica de Valparaíso, em especial ao Instituto de Matemática, pelo apoio recebido.

Ao CNPq pela concessão de bolsa de estudo.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta tese.

RESUMO DA TESE APRESENTADA A COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc).

UM MÉTODO DE FEIXE COM REGIÃO DE CONFIANÇA

Raúl Jesús Aguila Fumey

Janeiro, 1991

Orientador: Paulo Roberto Oliveira

Programa : Engenharia de Sistemas e Computação

Se considera o problema de minimizar uma função f convexa, não obrigatoriamente diferenciável definida em \mathbb{R}^n , sujeita as restrições afins $h_i(x) = 0 \quad i=1,2,\dots,m$.

Se propõe um algoritmo que combina os métodos de feixe e região de confiança. O subproblema (modelo) para determinar uma nova aproximação à solução do problema, será gerado por uma aproximação seccionalmente afim para f (vía subgradientes), e uma aproximação afim para as h_i , (na verdade exata) passando por algum ponto que garanta interseção não vazia com a condição natural de região de confiança $\|d\|_2 \leq r$, que corresponderá à segunda restrição do modelo. O control do raio da região de confiança será em forma indireta, através de um parâmetro t . Propriedades do modelo relacionando d e t foram obtidas de modo de justificar a metodologia de atualização de r vía o parâmetro t , que com número finito de mudanças fornecera uma informação aceitável

Uma função de penalidade exata será usada como função de mérito, para avaliar a qualidade da nova aproximação à solução do problema. Se prova que a sequência gerada pelo método converge à solução do problema.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF SCIENCE (D. Sc.).

A BUNDLE METHOD WITH TRUST REGION

Raúl Jesús Aguila Fumey

January, 1991

Chairman : Paulo Roberto Oliveira

Department: Systems Engineering and Computer Science

It is considered the problem of minimizing a function f not necessarily differentiable defined in \mathbb{R}^n , subject to the afin restrictions $h_i(x) = 0$, $i=1,2,\dots,m$.

It is proposed an algorithm which combine both methods, bundle method and trust region method. The subproblem (model) for determining a new approximation for the problem solution, will be generated by sectionally afin approximation for f (via subgradients), and an afin approximation for h_i (in fact, exact) passing by the same point which guarantees non empty intersection with a natural condition of trust region $\|d\|_2 \leq r$, which will correspond to the second restriction for the model. The control of the ratio of de trust region will be managed indirectly through a parameter t . Properties of the model, relationing d and t , were founded justifying the methodology of updating r via the parameter t , which after a finite number of changes will give an acceptable information.

An exact penalty function will be used as merit function, for measure the quality of the new approximation for the solution of the problem. It is proved that the generated sequence by the method converge to the solution of the problem.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO GERAL.....	1
CAPÍTULO II - MÉTODOS DE REGIÃO DE CONFIANÇA.	
II.0 RESUMO DOS TRABALHOS:.....	5
LEVENBERG.....	5
MARQUARDT.....	8
GOLFELD-QUANDT-TROTTER.....	10
POWELL.....	12
FLETCHER.....	16
MOREÉ.....	18
FLETCHER.....	22
DENNIS-SCHNABEL.....	25
GAY.....	26
VARDI.....	29
BYRD-SCHNABEL-SHULTZ.....	33
CONN-GOULD-TOINT.....	36
EL-ALEM.....	40
KIWIEL.....	46
SCHRAMM-ZOWE.....	50
CAPÍTULO III - FUNDAMENTOS TEÓRICOS.	
III.0 INTRODUÇÃO.....	55
III.1 SUBDIFERENCIABILIDADE.....	55
III.2 CONDIÇÕES DE OTIMALIDADES.....	59
III.3 ϵ -SUBDIFERENCIABILIDADE.....	61

CAPÍTULO IV - UM MÉTODO DE FEIXE E DE REGIÃO DE CONFIANÇA

IV.0 INTRODUÇÃO.....	64
IV.1 MÉTODO	66
IV.2 ALGORITMO.....	89
O Algoritmo interno.....	90
O algoritmo geral.....	98
IV.3 CONVERGÊNCIA.....	104
Convergência do algoritmo geral.....	104
CAPÍTULO V CONCLUSÕES.....	123
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	124

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO GERAL

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um algoritmo que combine os métodos de feixe e de região de confiança para resolver o problema

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{mín } f(x) \\ & \text{s. a.} \\ & h_i(x) = 0, \quad i=1,2,\dots,m. \end{aligned}$$

onde f é uma função convexa (não necessariamente diferenciável) e as h_i são funções afins. O modelo para (P), o sub-problema que determinará uma nova aproximação à solução de (P), é gerado por uma aproximação seccionalmente afim para f através de subgradientes (ver MIFFLIN (1977-1982), KIWIEL (1985)); as restrições h_i são tratadas como nos métodos de aproximações sucessivas (ver HAN (1977)); o raio da região de confiança será tratado em forma indireta adicionando à função objetivo o termo $\frac{1}{2t} \|d\|^2$. Devido ao fato de que o algoritmo não será de direções viáveis, uma função mérito será usada para medir o progresso da nova aproximação.

A motivação deste trabalho surge do fato que se o modelo para (P) é suficientemente bom (isto é o feixe contém a informação suficiente), então não será necessário efetuar uma busca linear, já que esta seria supérflua; em lugar desta, uma região de confiança será usada, e assim, em vez de escolher t^k antes de minimizar o modelo este permanecerá variável nele.

Da mesma forma que no método de feixe o conceito de passo nulo será mantido (e assim se melhorará a informação contida no feixe). Entretanto agora t será refinado em uma forma sistemática até que o modelo proporcione ou um d^k que produza um decrescimento suficiente para a função mérito, ou um passo nulo.

Demonstraremos que o método é globalmente convergente.

O problema (P) com $h_i \in C^2$ e restrições de positividade nas variáveis, foi abordado em forma teórica por BIHAIN (1984). Ele utiliza o método de feixes, gradiente reduzido generalizado, e busca linear. Só no caso de restrições lineares consegue expressar em forma explícita a função reduzida. Este caso também foi abordado por STRODIOT-NGUYEN (1987). A diferença destas abordagens está essencialmente na forma de escolher as sucessivas bases e a eleição da direção reduzida.

Subproblemas parecidos aos obtidos na forma indireta de controle do raio, são usados nos métodos proximais, veja por exemplo os trabalhos de ROCKAFELLAR (1976), AUSLENDER (1987) e KIWIEL (1989), neste último, o parâmetro u_k na regularização $u_k \|d\|^2$ é escolhido através de uma salvaguardada interpolação quadrática, que estima a curvatura da função objetivo do problema tratado.

O conteúdo desta tese seguirá basicamente a seguinte divisão:

No capítulo II apresentaremos algumas abordagens dos métodos de região de confiança a partir do ano 1944 .

O capítulo III será dedicado à apresentação dos fundamentos teóricos necessários ao desenvolvimento desta tese.

No capítulo IV seção IV.1 apresentaremos o problema ge-

ral e o método para definir o subproblema modelo, algumas propriedades da solução $d(t)$ relativamente ao parâmetro t (medida indireta da região de confiança). A seção IV.2 será dedicada ao algoritmo interno de determinação do parâmetro t , e ao algoritmo geral, que fornecerá as aproximações à solução de (P). Na seção IV.3 apresentaremos o resultado de convergência do algoritmo geral.

Finalmente apresentaremos algumas conclusões, visando à continuidade da pesquisa.

CAPÍTULO II

MÉTODOS DE REGIÃO DE CONFIANÇA

II.0 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos uma revisão dos principais trabalhos que utilizam a metodologia de região de confiança. Consideraremos os seguintes:

- 1) LEVENBERG (1944) "Um método para a solução de certos problemas não lineares de mínimo quadrados".
- 2) MARQUARDT (1963) "Um algoritmo para o problema de mínimos quadrados para a estimação de parâmetros não lineares".
- 3) GOLFELD-QUANDT-TROTTER (1966) "Maximização por meio de aproximações quadráticas".
- 4) POWELL (1970) "Um novo algoritmo para resolver um problema irrestritos".
- 5) FLETCHER (1972) "Um algoritmo para resolver um problema com restrições de desigualdades".
- 6) MORÉ (1978) "Teoria e implementação do algoritmo de LEVENBERG-MARQUARDT".
- 7) FLETCHER (1980) "Um algoritmo para problemas irrestrito".
- 8) FLETCHER (1982) "Um algoritmo para um problema composto não diferenciável".
- 9) DENNIS-SCHNABEL (1983) " Método de duplo dog-leg para achar uma solução aproximada do subproblema quadrático".
- 10) GAY (1984) "Um problema com restrições de desigualdades lineares usando uma estratégia de conjunto ativo local".
- 11) VARDI (1985) "Um algoritmo para problemas com restrições

não lineares de igualdades, que usa a função penalidade exata L_1 como função mérito".

12) BYRD-SCHNABEL-SHULTZ (1987) "Um algoritmo para problemas com restrições não lineares de igualdades, que usa a função penalidade exata L_1 como função mérito, e faz correção de segunda ordem para evitar efeito MARATOS".

13) CONN-GOULD-TOINT (1988) "Um algoritmo para problema com cotas simples nas variáveis".

14) EL-ALEM (1988) "Um algoritmo para problemas com restrições não lineares, que usa a função lagrangeana aumentada como função mérito".

15) KIWIEL (1988) "Um método de feixe com região de confiança elipsoidal para, problema geral não diferenciável e convexo."

16) SCHRAMM-ZOWE (1987) "Um método de feixe com região de confiança para problema convexo não diferenciável irrestrito"

Nosso trabalho procura ser analítico e comparativo, até a data de 1988, diferentemente da revisão que conhecemos de MORÉ (1982), que é sobre todo descritivo.

II.1 RESUMO DOS TRABALHOS

LEVENBERG (1944) considera o problema de aproximar uma função $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por uma outra função $H : \mathbb{R}^{n+n} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que os resíduos nos pontos $\{x^i\}_{i=1}^m$ definidos por

$$f_i(d) = H(x^i, d) - h(x^i) \quad i=1,2,\dots,m$$

$$d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$$

(II.1.1)

sejam mínimos, o que, pelo critério de mínimos quadrados equivale a minimizar a função s definida como

$$s(d) = \sum_{i=1}^m f_i^2(d) \quad (\text{II.1.2})$$

Se d_0 for um ponto qualquer com $\nabla s(d_0)$ distinto de zero, então a aproximação de Taylor de primeira ordem da função f_i ($i=1,2,\dots,m$) em torno do ponto d_0 será dada por

$$F_i(d) = f_i(d_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial d_j} \Delta d_j, \quad i=1,2,\dots,m. \quad (\text{II.1.3})$$

$$\text{onde } \Delta d_j = d_j - d_{0j} \quad j=1,2,3,\dots,n. \quad (\text{II.1.4})$$

A forma usual (standard) de minimizar (II.1.2) é obter uma solução aproximada através da minimização da seguinte aproximação de (II.1.2)

$$S(d) = \sum_{i=1}^m F_i^2(d) \quad (\text{II.1.5})$$

Para obter informação sobre o decrescimento de (II.1.2) o minimizador de (II.1.5) deve satisfazer as seguintes equações:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S(d)}{\partial d_1} = \begin{bmatrix} d_1 & d_1 \end{bmatrix} \Delta d_1 + \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix} \Delta d_2 + \dots + \begin{bmatrix} d_1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S(d)}{\partial d_n} = \begin{bmatrix} d_n & d_1 \end{bmatrix} \Delta d_1 + \begin{bmatrix} d_n & d_2 \end{bmatrix} \Delta d_2 + \dots + \begin{bmatrix} d_n & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.1.6})$$

onde

$$\begin{bmatrix} d_j d_k \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial d_j} \frac{\partial f_i}{\partial d_k} \quad ; \quad \begin{bmatrix} d_j 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial d_j} f_i \quad 1 \leq j, k \leq m$$

Pode acontecer que os Δd_j que satisfazem (II.1.6) sejam grandes demais em valor absoluto, de tal forma que a um decréscimo em (II.1.5) não corresponda a um em (II.1.2). É assim que, para evitar isto, LEVENBERG limita ou amortece (damp) a relação

$$Q(d) = \sum_{i=1}^n (\Delta d_i)^2 \quad (\text{II.1.7})$$

e minimiza \bar{S} sob a relação "amortecida" melhorando assim a aproximação (II.1.3). Para fazer isso simultaneamente propõe minimizar

$$\bar{S}(d) = \omega S(d) + Q(d) \quad ; \quad \omega > 0. \quad (\text{II.1.8})$$

É fácil provar que se $d_\omega = d(\omega)$ for um minimizador de \bar{S} e se d_∞ minimiza S , então

$$S(d_\omega) < s(d_\infty) \quad e \quad Q(d_\omega) < Q(d_\infty) \quad (\text{II.1.9})$$

Também é possível provar que (II.1.5) pode ser obtido de (II.1.8) quando $\omega \rightarrow \infty$ e que sempre existe ω de modo que um decréscimo em \bar{S} corresponde a um decréscimo em s .

MARQUARDT(1963) considera o problema de ajuste de dados e para isso usa o modelo seguinte :

$$E(y) = f(X, \beta) ; X = (x_1, x_2, \dots, x_m) ; \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) \quad (\text{II.1.10})$$

onde os x_1, x_2, \dots, x_m são variáveis independentes, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ são os valores da população de k parâmetros, e $E(y)$ é o valor esperado da variável dependente y . Sejam os dados denotados pelos pontos

$$(Y_i, X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{mi}) \quad i=1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{II.1.11})$$

O problema consiste em computar aqueles estimadores dos parâmetros que minimizem

$$\phi = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \|Y - \hat{Y}\|^2 \quad (\text{II.1.12})$$

\hat{Y} corresponde ao valor de y predito por (II.1.10) no i-ésimo dado. Da mesma forma que Levenberg o método usado será baseado em aproximações de Taylor de primeira ordem da função f. Escrevamos a série de Taylor através dos termos lineares

$$\langle Y(X_i, b + d_t) \rangle = f(X_i, b) + \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial f}{\partial b_j} \right] (d_t)_j, \quad (\text{II.1.13a})$$

ou

$$\langle Y \rangle = f_0 + P d_t \quad (\text{II.1.13b})$$

Os colchetes $\langle \rangle$ são usados para distinguir predições baseadas no modelo linearizado, daquelas baseadas no modelo

real não linear.

Deste modo, o valor de ϕ predito por (II.1.13) será :

$$\langle \phi \rangle = \sum_{i=1}^n [Y_i - \langle Y_i \rangle]^2 \quad (\text{II.1.14})$$

Como d_i aparece linearmente em (II.1.13) pode ser achado pelo método (standard) de mínimos quadrados resolvendo o sistema

$$Ad_i = g \quad (\text{II.1.15})$$

onde:

$$A = P^T P \quad ; \quad P = \left[\frac{\partial f_i}{\partial b_j} \right] \quad , \quad i=1,2,\dots,n \quad ; \quad j=1,2,\dots,k, \quad A^{k \times k} \quad (\text{II.1.16.a})$$

$$g = \left[\sum_{i=1}^n \left(Y_i - f_i \right) \frac{\partial f_i}{\partial b_j} \right] \quad ; \quad j=1,2,\dots,k, \quad g^{k \times 1}, \quad (\text{II.1.16.b})$$

$$= P^T (Y - f_0) \quad (\text{II.1.16.c})$$

Com isto MARQUARDT estabelece os seguintes resultados:

TEOREMA II.1.1

Seja $\lambda \geq 0$ e seja d_0 satisfazendo a equação

$$(A + \lambda I)d_0 = g \quad (\text{II.1.17})$$

Então d_0 minimiza $\langle \phi \rangle$ na esfera cujo raio $\|d\|_2$ satisfaz

$$\|d\|_2 = \|d_0\|_2$$

TEOREMA II.1.2

Seja $d(\lambda)$ a solução de (II.1.17) para um valor dado de λ . Então $\|d(\lambda)\|_2$ é uma função contínua e decrescente de λ tal que

$$\|d(\lambda)\|_2 \longrightarrow 0 \quad , \text{ se } \lambda \longrightarrow \infty .$$

TEOREMA II.1.3

Seja γ o ângulo entre d_0 e $d_g = g^{kx1}$ (ver (II.1.16b)); então γ é uma função contínua monotonamente decrescente de λ tal que $\gamma \longrightarrow 0$ quando $\lambda \longrightarrow \infty$. Dado que d_g é independente de λ , então d_0 gira para d_g quando $\lambda \longrightarrow \infty$.

GOLFELD-QUANDT-TROTTER (1966) apresentam uma versão mais geral do método de LEVENBERG -MARQUARDT. Consideram a minimização da função $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Fazem uma aproximação de Taylor de segunda ordem para f em torno do ponto $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$,

$$\phi(x) = f(a) + \nabla f(a)^T(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^T S(x-a) \quad (\text{II.1.18})$$

onde $S = \nabla^2 f(a)$,

procuram um minimizador para f mediante a solução do

subproblema

$$\begin{aligned} \min \phi(x) & & & \text{(II.1.19)} \\ \text{s. a.} & & & \\ \|x - a\|_2 \leq r & & & \end{aligned}$$

Estabelecem os seguintes resultados.

LEMA II.1.4

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $S - \lambda I$ seja definida positiva e defina

$$d_\lambda = a - (S - \lambda I)^{-1} \nabla f(a) \quad \text{(II.1.20)}$$

$$r_\lambda = \|d_\lambda - a\|_2 \quad \text{(II.1.21)}$$

Então

$$\phi(d_\lambda) \leq \phi(x) \quad \forall x \text{ tal que } \|x - a\|_2 \leq r_\lambda$$

LEMA II.1.5

Se $\nabla f(a) \neq 0$, então r_λ é uma função estritamente decrescente em λ no intervalo $(-\infty, \alpha_1)$, onde α_1 é o menor valor próprio da matriz S .

TEOREMA II.1.6

Sejam λ, d_λ e r_λ como no lema (II.1.4) e a região

$$B_\lambda = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_2 \leq r_\lambda \right\}$$

Então o mínimo de $\phi(x)$ é alcançado em d_λ se $\lambda \leq 0$ e em d_0 se $\lambda > 0$ (neste caso d_0 fica no interior da região B_λ)

POWELL (1970) fornece um algoritmo mais sofisticado para minimizar a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sob as hipóteses de que f seja duas vezes continuamente diferenciável e que a hessiana \bar{G} satisfaça:

$$i) \quad \|\bar{G}(x)\| \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{II.1.22.a})$$

$$ii) \quad \|\bar{G}(x) - \bar{G}(y)\|_2 \leq L\|x-y\|_2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (\text{II.1.22.b})$$

Na k -ésima iteração, exceto para algumas "iterações especiais", resolve o seguinte subproblema para achar a aproximação x^{k+1} ao minimizador de f

$$\min \phi^k(d) \quad (\text{II.1.23})$$

s. a.

$$\|d\|_2 \leq r_k,$$

onde

$$\phi^k(d) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T G^k d \quad (\text{II.1.24})$$

G^k é uma aproximação simétrica quasi-Newton da hessiana de f dada por

$$G^k = G^{k-1} + \frac{\eta^{k-1}(d^{k-1})^T + d^{k-1}(\eta^{k-1})^T}{\|d^{k-1}\|_2^2} - \frac{d^{k-1}(d^{k-1})^T(\eta^{k-1}, d^{k-1})}{\|d^{k-1}\|_2^4} \quad (\text{II.1.25})$$

onde :

$$\eta^{k-1} = \gamma^{k-1} - G^{k-1}d^{k-1}; \quad \gamma^{k-1} = g^k - g^{k-1} = \nabla f(x^k) - \nabla f(x^{k-1})$$

As iterações especiais serão destinadas a manter o bom comportamento das aproximações de G.

A solução d^k de (II.1.23) (o deslocamento) deve satisfazer:

$$\|d^k\|_2 \leq r_k \quad (\text{II.1.26.a})$$

$$\phi^k(d^k) < f(x^k) \quad (\text{II.1.26.b})$$

Deste modo espera-se que o valor de $f(x^k + d^k)$ seja menor do que o de $f(x^k)$, de maneira que o x^{k+1} será definido como

$$x^{k+1} = \begin{cases} x^k & \text{se } f(x^k + d^k) \geq f(x^k) \\ x^k + d^k & \text{se } f(x^k + d^k) < f(x^k) \end{cases} \quad (\text{II.1.27})$$

testando na k -ésima iteração o criterio de convergência

$$\|g^{k+1}\|_2 \leq \varepsilon \quad , \quad \varepsilon \geq 0 \quad \text{dado} \quad (\text{II.1.28})$$

Se (II.1.28) for satisfeito o algoritmo acaba .Caso

contrário r_{k+1} deverá ser definido de modo que o algoritmo possa começar a iteração $k+1$.

Dado que o método de Marquardt requer um número de operações de ordem de n^3 para calcular d^k , Powell propõe o seguinte método (Dog leg de ordem n^2 operações): restringe d^k ao subespaço bidimensional gerado por $g^k = \nabla f(x^k)$ e $(G^k)^{-1}g^k$ (sendo este último o ponto estacionário da função quadrática ϕ^k). Assim d^k resulta ser da forma

$$d^k = \alpha^k g^k + \beta^k (G^k)^{-1} g^k \quad (\text{II.1.29. a})$$

onde

$$\alpha^k = - \frac{r_k}{\|g^k\|_2} \quad \text{e} \quad \beta^k = 0 \quad (\text{II.1.29. b})$$

$$\text{se} \quad \langle g^k, G^k d^k \rangle_{r_k} \leq \|g^k\|_2 \quad ; \quad (\text{II.1.30})$$

caso contrário o deslocamento será o ponto no segmento que une os pontos

$$-(G^k)^{-1}g^k \quad \text{e} \quad - \frac{g^k \|g^k\|_2}{\langle g^k, G^k d^k \rangle}$$

e que dá o valor mínimo a $\phi^k(d)$ sujeito a $\|d^k\|_2 \leq r_k$. Duas características desta escolha de d^k são verificadas:

- i) Uma tendência para a inclinação de $-g^k$ se r_k for pequeno
- ii) Se r_k for suficientemente grande e G^k for definida positiva, então

$$d^k = -(G^k)^{-1}g^k \quad (\text{direção de Newton})$$

O cálculo de r_{k+1} dependerá da relação

$$f(x^k + d^k) - f(x^k) \leq 0,1[\phi(x^k) - f(x^k)] \quad (\text{II.1.31})$$

Logo, se (II.1.31) valer r_{k+1} será $\|d^k\|_2$ ou $2\|d^k\|_2$.

Caso contrário

$$r_{k+1} = \frac{1}{2}\|d^k\|_2$$

Powell estabelece que cada três iterações devem corresponder a uma especial de maneira que as direções d^k para $k=1,2,\dots$ satisfagam uma condição de independência linear estrita.

Deste modo, se f for limitada inferiormente, e as condições (II.1.22) forem satisfeitas o algoritmo calcula um ponto x^{k+1} que também satisfaz (II.1.28).

Se x^* for um mínimo local de f que esteja contido numa região convexa e fechada B , onde f seja estritamente convexa, e se existir σ em \mathbb{N} tal que os pontos x^k gerados pelo algoritmo pertençam a B para todo $k \geq \sigma$, então a sequência $\{x^k\}$ convergirá para x^* e G^k para $\bar{G}(x^*)$. Finalmente, se \bar{G} for estritamente definida positiva, então a taxa de convergência da sequência $\{x^k\}$ será superlinear.

FLETCHER (1972) considera o problema com restrições

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ & \text{s. a.} \\ & x \in R = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid C_i^T x \geq b_i, \quad i=1,2,\dots,m \right\} \quad (\text{II.1.32}) \end{aligned}$$

Na k -ésima iteração a aproximação x^{k+1} ao minimizador de (II.1.32) é obtida como o vetor que resolve o subproblema

$$\begin{aligned} & \text{mín } \phi^k(x) \\ & \text{s. a.} \\ & x \in \left\{ x \in R \mid \|x - x^k\|_\infty \leq r_k \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.1.33})$$

onde

$$\phi^k(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T (x - x^k) + \frac{1}{2} (x - x^k)^T G^k (x - x^k) \quad (\text{II.1.34})$$

Sendo G^k a aproximação da hessiana dada por (II.1.25).

r_k é tal que $0 < r_k \leq H$ ($H \geq 0$). O r_k será diminuído se a relação (II.1.35) abaixo não se satisfazer, sendo aumentado no caso contrarior.

Se y for solução de (II.1.33), o teste para aceitar y como x^{k+1} será

$$f(x^k) - f(y) \geq \rho [\phi^k(x^k) - \phi^k(y)] \quad 0 < \rho < 1 \quad (\text{II.1.35})$$

Resolve-se (II.1.33) fazendo-se uso de uma estratégia de conjunto ativo, e desta forma o subproblema (II.1.33)

transforma-se em

$$\begin{aligned} & \text{mín } \phi^k(x) \\ & \text{s. a.} \\ & \bar{C} x = \bar{b} , \end{aligned} \tag{II.1.36}$$

cuja solução pode ser achada resolvendo-se o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} G^k & \bar{C} \\ \bar{C}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^k x^k - \nabla f(x^k) \\ b \end{bmatrix} \tag{II.1.37}$$

Sob as mesmas hipóteses de POWELL (1970) para f e $\nabla^2 f$ tem-se que o número de subproblemas quadráticos resolvidos em cada iteração é finito, se $\{x^k\}$ for uma sequência gerada pelo método, então existe uma subsequência, digamos $\{x^{k'}\}$, tal que

$$\lim \|g_b(x^{k'})\| = 0 \text{ se } k' \rightarrow \infty$$

onde g_b é um gradiente viável e é tal que $-g_b$ corresponde à solução do problema

$$\begin{aligned} & \text{mín } \|v + g\|^2 \\ & v \\ & \eta_i^T v \geq 0 \quad \forall i \in B(x) = \left\{ i \mid C_i^T x = b_i \right\} \end{aligned} \tag{II.1.38}$$

Além disso se $x^k \rightarrow \hat{x}$, então \hat{x} é um ponto de Kuhn - Tucker.

Como corolário temos que para o caso irrestrito

$$\lim \|\nabla f(x^k)\| = 0 \quad \text{se } k \longrightarrow \infty$$

MORÉ (1978) dá uma implementação robusta e eficiente da versão do algoritmo de LEVENBERG-MARQUARDT para o problema

$$\min \frac{1}{2} \|F(x)\|_2^2 \quad (\text{II.1.39})$$

onde $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. O algoritmo procura uma aproximação à solução de (II.1.39) mediante a solução do subproblema

$$\begin{aligned} & \min \phi(d) \\ & \text{s. a.} \\ & \|Dd\|_2 \leq r, \end{aligned} \quad (\text{II.1.40})$$

onde

$$\phi(d) = \|F(x) + F'(x)^T d\|_2 \quad (\text{II.1.41})$$

D é uma matriz não singular que neste caso será diagonal, usada com a finalidade de fazer um scaling.

De um ponto de vista mais geral Moré considera o subproblema

$$\begin{aligned} & \min \|f + Jd\|_2 \\ & \text{s. a.} \\ & \|Dd\|_2 \leq r \end{aligned} \quad (\text{II.1.42})$$

onde $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e J é uma matriz $m \times n$. Sabemos que a

base para o método de LEVENBERG-MARQUARDT é que se d^* é solução de (II.1.42), então $d^* = d(\lambda)$ para algum $\lambda \geq 0$ onde

$$d(\lambda) = -(J^T J + \lambda D^T D)^{-1} J^T f \quad (\text{II.1.43})$$

Se J for de posto deficiente e $\lambda = 0$, então (II.1.47) será definido pelo seguinte limite

$$Dd(0) = \lim Dd(\lambda) = -(JD^{-1})^+ f$$

Existem duas possibilidades : $\lambda = 0$ e $\|Dd(0)\|_2 < r$ em tal caso $d(0)$ é a solução de (II.1.42) para o qual $\|Dd\|_2$ é mínimo; ou $\lambda > 0$ e $\|Dd(\lambda)\|_2 = r$, e então $d(\lambda)$ é a única solução de (II.1.42).

Isto sugere o seguinte algoritmo

1) Dado $r_k \geq 0$ e a solução $d = d^k =: d(\lambda^k)$ de

$$((J^k)^T J^k + \lambda_k D^k D^k) d = -J^k f(x^k) \quad (\text{II.1.44})$$

então: ou $\lambda_k = 0$ e $\|Dd(\lambda^k)\|_2 \leq r_k$

ou $\lambda_k > 0$ e $\|D^k d(\lambda^k)\|_2 = r_k$

2) Se $\|f(x^k + d^k)\|_2 < \|f(x^k)\|_2$ faça $x^{k+1} = x^k + d^k$ e calcular

J^{k+1} , senão faça $x^{k+1} = x^k$ e $J^{k+1} = J^k$

3) Escolha r_{k+1} e D^{k+1}

Observemos que o sistema de equações

$$(J^T J + \lambda D^T D) d = - J^T f \quad (\text{II.1.45})$$

corresponde às equações normais do problema de mínimos quadrados

$$\begin{bmatrix} J \\ \lambda^{1/2} D \end{bmatrix} d \cong - \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.1.46})$$

que pode ser resolvido usando uma decomposição Q-R com pivô coluna. A principal vantagem de (II.1.45) é a rapidez (duas vezes mais rápido que (II.1.46)), mas (II.1.45) resulta quase irrealizável quando $\lambda = 0$ e J esta perto de ser de posto deficiente; além disto, a formação dos fatores $J^T J$ e $D^T D$ podem conduzir a underflows e overflows desnecessários, o que não sucede com (II.1.46), e portanto a perda de rapidez é compensada pelo ganho da viabilidade e robustez. A escolha de r dependerá do comportamento do parâmetro ρ definido por

$$\rho_k = \frac{\|f(x^k)\|_2 - \|f(x^{k+1})\|_2}{\|f(x^k)\|_2 - \|f(x^k) + J^k d^k\|_2} \quad (\text{II.1.47})$$

MORÉ propõe o seguinte algoritmo

- 1) Seja $\sigma \in (0,1)$. Se $\|D^k J_+^k f(x^k)\|_2 \leq (1 + \sigma)r_k$, ponha $\lambda_k = 0$ $d^k = -J_+^k f(x^k)$ (J_+ inversa generalizada), senão determine $\lambda_k > 0$ tal que se (II.1.46) se satisfazer para

$d = d^k$, então

$$(1 - \sigma)r_k \leq \|D^k d^k\|_2 \leq (1 + \sigma)r_k$$

2) calcule o raio ρ_k

3) Se $\rho_k \leq 0.0001$, ponha $x^{k+1} = x^k$ e $J^{k+1} = J^k$

Se $\rho_k > 0.0001$, ponha $x^{k+1} = x^k + d^k$, compute J^{k+1}

4) Se $\rho_k \leq \frac{1}{4}$ escolha $r_{k+1} \in \left[\frac{1}{10} r_k, \frac{1}{2} r_k \right]$.

Se $\rho_k \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right]$ e $\lambda_k = 0$, ou se $\lambda_k \geq \frac{3}{4}$ ponha

$$r_{k+1} = 2 \|D^k d^k\|_2$$

5) Atualize D^{k+1}

Com este algoritmo MOREÉ dá o seguinte resultado de convergência. Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ for uma função continuamente diferenciável em \mathbb{R}^n e $\{x^k\}$ for uma sequência gerada pelo algoritmo, então

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|J^k (D^k)^{-T} f(x^k)\|_2 = 0$$

Se $\{J^k\}$ são limitadas, então $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|J^k f(x^k)\|_2 = 0$

Finalmente se f' for uniformemente contínua, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|J^k f(x^k)\|_2 = 0$$

FLETCHER(1980) considera o problema irrestrito, e, da mesma forma que GOLFELD-QUANDT-TROTTER, na k -ésima iteração usa o modelo

$$\min \phi^k(d) \quad (\text{II.1.48})$$

s. a.

$$\|d\|_2 \leq r_k$$

Apresenta o seguinte algoritmo

- 1) Dados x^k e r_k computar $g^k = \nabla f(x^k)$ e $G^k = \nabla^2 f(x^k)$
- 2) Resolver (II.1.48) para d^k
- 3) Compute

$$\delta_k = \frac{f(x^k) - f(x^k + d^k)}{\phi^k(0) - \phi^k(d^k)} \quad (\text{II.1.49})$$

- 4) Se $\delta_k < 0.25$ faça $r_{k+1} = \frac{\|d^k\|_2}{4}$
 Se $\delta_k > 0.75$ e $\|d^k\|_2 = r_k$ faça $r_{k+1} = 2r_k$
 Senão faça $r_{k+1} = r_k$
- 5) Se $\delta_k \leq 0$ faça $x^{k+1} = x^k$, de outro modo $x^{k+1} = x^k + d^k$

FLETCHER estabelece que se a sequência $\{x^k\}$ gerada pelo algoritmo for tal que $x^k \in B \subseteq \mathbb{R}^n \forall k$, onde B é um conjunto limitado e se a função for duas vezes continuamente diferenciável com $\|\nabla^2 f(x^k)\|_2 < H$ em B , então existirá um ponto de acumulação x^* que satisfará as condições

necessárias (de convergência) de primeira ordem. Se além disso x^* satisfazer as condições suficientes de segunda ordem, então a restrição $\|d\|_2 \leq r$ é não ativa para k suficientemente grande, e a taxa da convergência é quadrática.

FLETCHER (1982) considera o seguinte problema irrestrito (não diferenciável)

$$\begin{aligned} \min F(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (\text{II.1.50})$$

$$F(x) = f(x) + h(c(x))$$

onde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, são diferenciáveis, e $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa. O algoritmo apresentado por ele é uma adaptação de FLETCHER (1980). Logo o problema modelo na k -ésima iteração é

$$\begin{aligned} \min \phi^k(d) \\ \text{s. a.} \\ \|d\|_2 \leq r_k \end{aligned} \quad (\text{II.1.51})$$

onde:

$$\phi^k(d) = q^k(d) + h(l^k(d)),$$

$$q^k(d) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T W^k d,$$

$$W^k = \nabla^2 f(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla^2 c_i(x^k),$$

λ_i^k são os multiplicadores, ou aproximações deles, do problema (II.1.51)

$$l^k(d) = c(x^k) + (A^k)^T d$$

$$A^k = (\nabla c_1(x^k), \nabla c_2(x^k), \dots, \nabla c_m(x^k))$$

O ALGORITMO

- 1) Dados x^k , λ^k , r_k , calcule $f(x^k)$, $c(x^k)$, A^k , e W^k , os quais determinam $F(x^k)$, $\phi^k(d)$.
- 2) Obtenha a solução (global) d^k de (II.1.51)
- 3) Computar

$$\delta_k = \frac{F(x^k) - F(x^k + d^k)}{\phi^k(0) - \phi^k(d^k)}$$

- 4) Se $\delta_k < 0.25$ ponha $r_{k+1} = \frac{\|d^k\|_2}{4}$.

Se $\delta > 0.75$ e $\|d^k\|_2 = r_k$ ponha $r_{k+1} = 2r_k$.

Senão ponha $r_{k+1} = r_k$

- 5) Se $\delta_k \leq 0$ faça $x^{k+1} = x^k$, $\lambda^{k+1} = \lambda^k$, caso contrário faça $x^{k+1} = x^k + d^k$ e λ^{k+1} igual ao multiplicador que resolve (II.1.51).

Prova-se que, se a sequência $\{x^k\}$ gerada pelo algoritmo

estiver contida num subconjunto B limitado de \mathbb{R}^n , e se a função f for duas vezes continuamente diferenciável com segunda derivada limitada em B , então existirá um ponto de acumulação x^0 no qual a condição de convergência de primeira ordem se verifica, isto é

$$\begin{aligned} \max s^T g \geq 0 \quad \forall s \\ g \in \partial F(x^0) \end{aligned} \quad (\text{II.1.52})$$

DENNIS-SCHNABEL (1983) admitem que em (II.1.18) G seja uma aproximação simétrica e definida positiva da Hessiana de f ; em tal caso a solução do subproblema (II.1.19) é

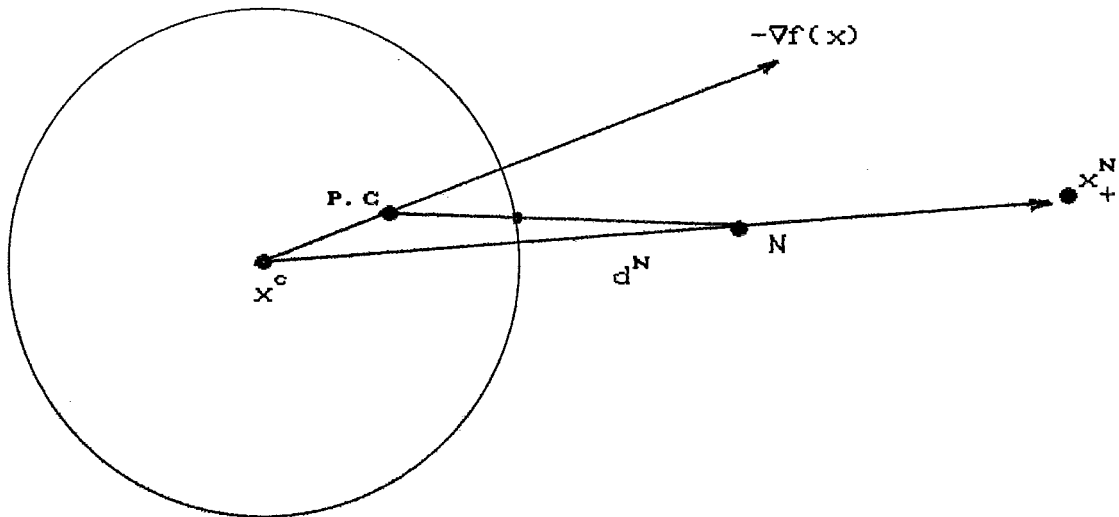
$$d(\lambda) = - (G + \lambda I)^{-1} \nabla f(x) \quad (\text{II.1.53})$$

para um único $\lambda \geq 0$ tal que $\|d(\lambda)\|_2 = r$ a menos que $\|d(\lambda)\|_2 < r$ e em tal caso $d(0) = d^N$ (direção de Newton). Devido às dificuldades para resolver a equação

$$\|d(\lambda)\|_2 - r = 0 \quad (\text{II.1.54})$$

apresentam o método Double dog-leg, que é uma extensão do método de POWELL (dog-leg), para achar uma solução aproximada do subproblema (II.1.19). Basicamente o método consiste em aproximar a curva $d(\lambda)$ mediante uma função linear por partes que une o ponto de Cauchy (minimizador do modelo quadrático na direção de máxima descida local) a uma fração do ponto de Newton (correspondente à direção de

Newton do modelo). Deste modo escolhe-se x^+ como o ponto tal que $\|x^+ - x\|_2 = r$, salvo se $\|G^{-1} \nabla f(x)\|_2 \leq r$, caso em que x^+ será o ponto de Newton. Assim a direção tenderá para a de máxima descida se r for pequeno, e para a de Newton se r for grande.



O ponto N na direção de Newton é dado por:

$$N = x^c - \eta G^{-1} \nabla f(x^c) \quad (\text{II.1.55})$$

onde η é tal que

$$\frac{\|\nabla f(x^c)\|_2^4}{\nabla f(x^c)^T G(x^c) \nabla f(x^c) \nabla f(x^c)^T G(x^c)^{-1} \nabla f(x^c)} \leq \eta \leq 1 \quad (\text{II.1.56})$$

e P.C. é o ponto de Cauchy.

GAY (1984) considera o mesmo problema restrito (II.1.32) que (FLETCHER), e usa como modelo para o câmbio na função f à função.

$$\phi(d) = g^T d + \frac{1}{2} d^T G d \quad (\text{II.1.57})$$

com $g = \nabla f(x)$ e G sendo $\nabla^2 f(x)$ ou uma aproximação (DFP -BFGS).

Fazendo uso, de uma estratégia local de conjunto ativo no problema (II.1.32), Gay aplica o seguinte algoritmo para problemas irrestritos :

PASSO 0

Escolha um ponto x^c em \mathbb{R}^n e um raio $r > 0$, e sejam δ_0 , δ_1 , δ_2 , α , η constantes dadas, tais que:

$$0 < \delta_0 < \delta_1 < 1 < \delta_2, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \eta < 1$$

PASSO 1

Achar d^t satisfazendo

$$\phi(d^t) \leq \eta \min \left\{ \phi(d) \mid \|d\|_2 \leq r \right\}, \quad (\text{II.1.58})$$

PASSO 2

$$\text{Teste } f(x^c + d^t) - f(x^c) \leq \alpha \phi(d^t) \quad (\text{II.1.59})$$

PASSO 3

Escolha r_+ segundo:

i) $r \leq r_+ \leq \delta_2 r$ se (II.1.59) se satisfazer

ii) $\delta_0 \|d^t\|_2 \leq r_+ \leq \delta_1 \|d^t\|_2$ se (II.1.59) não se satisfazer

Defina $r = r_+$ até que (II.1.59) seja válido

PASSO 4

Defina $x^+ = x^c + d^t$ como o novo iterando.

No algoritmo, que d^t satisfaça a condição (II.1.58), garante que nos pontos limites da sequência gerada, se satisfarão as condições de otimalidade necessárias de primeira ordem.

O procedimento efetuado por GAY é o seguinte:

0) dados $d^{t,0} = 0$, $k = 1$.

1) Escolha A^k tal que

$$A^k \subseteq A_0(x^c + d^{t,k-1}) = \left\{ i \mid C_i^T(x^c + d^{t,k-1}) = b_i \right\}.$$

2) Ponha $g = \nabla f(x^c) + Gd^{t,k-1}$, e faça uma mudança linear de variáveis em (II.1.57), de maneira que quando as restrições não ativas (daqueles índices que não pertencem a A^k) forem ignoradas, se obtenha um problema irrestrito.

3) Aplique o algoritmo para o problema irrestrito resultante no passo 2).

4) Volte às variáveis originais, obtenha $d^{t,k}$. Se $d^{t,k}$ for viável defina $d^t = d^{t,k}$. Senão escolha $d^{t,k}$ tal que $\|d^{t,k}\|_2 \leq r$ e $Cd^{t,k} \geq Cx^c$, faça $k := k+1$ e vá para 1).

Uma forma de definir $d^{t,k}$ é

$$d^{t,k} = \xi d^{t,k} + (1-\xi)s^{t,k-1}$$

onde $\xi \in [0,1]$ é escolhido de maneira que $\xi^{t,k}$ seja viável.

Para evitar as complicações próprias das estratégias de conjunto ativos (por exemplo, convergência a um ponto não estacionário, zig-zag, etc) GAY efetua uma escolha encaixada dos A^k , isto é, $A^k \subset A^{k+1}$. Usando uma extensão do método dog-leg GAY prova que se f for uma função continuamente diferenciável e x^0 um ponto viável, então, para r_0 dado, (II.1.59) será obtido num número finito de passos. Se G em (II.1.57) for localmente limitada, então todo ponto de acumulação x^* da sequência $\{x^k\}$ gerada pelo método será um ponto estacionário (satisfaz as condições de otimalidade de primera ordem). Além disto, se x^* for um minimizador local forte (satisfaz as condições necessárias e suficientes de otimalidade) e se $G = \nabla^2 f$ for Lipschitz contínua, então a convergência de $\{x^k\}$ será Q-quadrática para x^* , se $\|x^* - x^0\|_2 < \delta$, $\delta > 0$ e x^0 um ponto inicial.

VARDI(1985) apresenta um algoritmo para resolver o problema

$$\begin{aligned} \min f(x) & \qquad \qquad \qquad \text{(II.1.60)} \\ \text{s.a.} & \\ h_i(x) = 0 & \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

onde $f, h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$ são duas vezes continuamente diferenciáveis f é limitada inferiormente e tal que ∇f e $\nabla^2 f$ são Lipschitz com a mesma contante K :

$$\|\nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(y)\|_2 \leq K \|x - y\|_2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\|\nabla h_i(x) - \nabla h_i(y)\|_2 \leq K \|x - y\|_2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad i=1,2,\dots,m$$

Define o seguinte subproblema modelo na k -ésima iteração

$$\min L(x^k, v^k) + \nabla_x L(x^k, v^k)(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T B^k (x - x^k)$$

s. a.

$$\alpha h_i(x^k) + \nabla h_i^T(x^k)(x - x^k) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\|x^k - x\|_2 \leq r_k \quad (\text{II.1.61})$$

$$\text{onde } L(x, v) = f(x) + \sum_{i=1}^m h_i(x) v_i, \quad (\text{II.1.62})$$

é a lagrangeana associada ao problema (II.1.60).

B^k é uma aproximação BFGS da Hessiana $\nabla^2 L(x^k, v^k)$ e α é uma função peso destinada a fazer com que o conjunto viável de (II.1.61) seja não vazio.

Para decidir se (x^{k+1}, v^{k+1}) é uma melhor aproximação à solução do que (x^k, v^k) usa a função mérito dada pela penalidade exata

$$PL(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i |h_i(x)| \quad (\text{II.1.63})$$

Para evitar um possível efeito Maratos numa vizinhança da solução, usa como função mérito a Lagrangeana definida em (II.1.62). Se λ for o multiplicador de Lagrange associado à restrição $\|x - x^k\|_2 \leq r_k$ em (II.1.62), e se $d(\lambda) = x - x^k$, $w(\lambda) = v - v^k$, então a função $\|d(\lambda)\|_2$ será monotonamente decrescente em λ ($\lambda \geq 0$); além disso é possível mostrar que

para λ suficientemente grande

$$L(x + d(\lambda), v + w(\lambda)) < L(x, v + w(\lambda))$$

e que se $\mu_i > |v_i| \quad i=1,2,\dots,m$, então existirá $\lambda > 0$ tal que

$$PL(x + d(\lambda)) < PL(x) .$$

VARDI propõe o seguinte algoritmo

- 1) Parta com $x^1, v^1, r_1, B^0, k = 0$
- 2) Faça $k = k + 1$
- 3) obtenha λ^k (primeiro teste $\lambda = 0$), $d(\lambda^k)$ e $w(\lambda^k)$ tais que

$$\begin{bmatrix} d(\lambda^k) \\ w(\lambda^k) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B^k + \lambda^k I & \nabla h(x^k) \\ \nabla h(x^k)^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \nabla_x L(x^k, v^k) \\ \alpha h(x^k) \end{bmatrix}$$

$$\|d(\lambda^k)\|_2 \leq r_k, \quad \lambda^k \geq 0 \quad \text{e} \quad \lambda^k (\|d(\lambda^k)\|_2 - r_k) = 0$$

- 4) Teste se $PL(x^k + d(x^k)) < PL(x^k)$, senão reduza r_k e vá a 3)
- 5) Teste a convergência, continue se necessário.
- 6) Compare a aproximação quadrática de L com o valor da Lagrangeana e seus gradientes em $(x^k + d(\lambda^k), v^k + w(\lambda^k))$, usando a comparação para aumentar ou reduzir o raio r_k .
- 7) Atualize B^k ,

8) Faça $x^{k+1} = x^k + d(\lambda^k)$; $v^{k+1} = v^k + w(\lambda^k)$, volte a 2).

Para obter convergência VARDI escolha λ^k que verifique :

$$\begin{aligned} PL(x^k + d(\lambda^k)) &= \min PL(x^k + d(\lambda)) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

em lugar da exigência do passo 3) λ é tal que $\|(d(\lambda^k), w(\lambda^k))\|_2 \leq r_k$. Sob as hipóteses de que existem constantes a, b em \mathbb{R} verificando

$$az^T z \leq z^T B^k z \leq bz^T z \quad \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

que $\mu_i \geq |v_i|$ $i = 1, 2, \dots, m$ para todos os pontos gerados pelo algoritmo e que o conjunto

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i |h_i(x)| < f(x^0) + \sum_{i=1}^m \mu_i |h_i(x^0)| \right\}$$

seja limitado, prova que a sequência $\{x^k\}$ gerada é limitada, e se \bar{x} for um ponto de acumulação, então $h_i(\bar{x}) = 0$ $i=1, 2, \dots, m$ e existirá \bar{v} tal que

$$\nabla f(\bar{x}) + \nabla h(\bar{x})^T \bar{v} = 0.$$

Se acontecer que o ponto (x^0, v^0) estar numa vizinhança da solução (x^*, v^*) e se $\|(B^0)^{-1} - \nabla^2 L(x^0, v^0)\|_2 < \delta$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, então a convergência de (x^k, v^k) para (x^*, v^*) é superlinear. Esta propriedade local é obtida trocando no algoritmo a função mérito PL pela função lagrangeana numa vizinhança da solução.

BYRD-SCHNABEL-SHULTZ (1987), da mesma forma que VARDI consideram o problema com restrições de igualdade (II.1.60) e na k -ésima iteração definem o problema modelo (subproblema)

$$\begin{aligned} & \text{mín } \phi^k(d) \\ & \text{s. a.} \\ & \alpha h(x^k) + (A^k)^T d = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.1.64})$$

$$\|d\|_2 \leq r_k$$

onde $\phi^k(d) = g^{kT}d + \frac{1}{2} d^T B^k d$ é uma aproximação quadrática da lagrangeana, com $g^k = \nabla f(x^k)$ e B^k uma aproximação simétrica da Hessiana da lagrangeana. α é definido de forma que o conjunto viável de (II.1.64) seja não vazio, e

$$A^k = (\nabla h_1(x^k), \nabla h_2(x^k), \dots, \nabla h_m(x^k)).$$

Nota-se que, se d satisfizer as restrições de (II.1.64), então d pode ser descomposto segundo os espaços tangente e ortogonal, isto é,

$$d = \alpha v^k + Z^k u \quad (\text{II.1.65})$$

onde Z^k é uma matriz $n \times (n-m)$ tal que $(Z^k)^T A^k = 0$ e

$$(Z^k)^T Z^k = I, \quad v^k \text{ é dado por}$$

$$v^k = -A^k [(A^k)^T A^k]^{-1} h(x^k) \quad (\text{II.1.66})$$

com $\vartheta r_k \leq \|\alpha v^k\|_2 \leq r_k$; $\vartheta \in (0,1]$

e u é a solução do seguinte subproblema

$$\min \phi^k(u) \quad (\text{II.1.67})$$

s. a.

$$\|u\|_2 \leq \tilde{r}_k,$$

onde:

$$\phi^k = g^k Z^k u + \frac{1}{2} u^T (Z^k)^T B^k Z^k u$$

$$g^k = g^k + \alpha B^k v^k$$

$$\tilde{r}_k = (r_k^2 - (\alpha \|v^k\|_2)^2)^{1/2}$$

Assim, lembrando o trabalho de Gay (1984), os autores retornam à forma do método de região de confiança para o problema irrestrito.

Para decidir se $x^k + d^k$ é uma melhor aproximação que x^k à solução de (II.1.60) usam como função mérito a penalidade exata definida em (II.1.63). Para evitar o efeito MARATOS, ou seguir uma curvatura negativa da Lagrangeana adicionam e d a correção

$$-A^k [(A^k)^T A^k]^{-1} h(x^{k+1} - d^k) \quad (\text{II.1.68})$$

cada vez que $\|v\|_2 \leq \xi r_k$ $\xi \in (0, \vartheta)$

Sob a assunção standard de que a sequência $\{x^k\}$ esteja

contida num subconjunto S aberto de \mathbb{R}^n , que f, h_i , sejam duas vezes continuamente diferenciáveis em S , que $g = \nabla f$, A , $(A^T A)^{-1}$, $\nabla^2 f$ e cada $\nabla^2 h_i$ sejam limitadas em S ; e as condições sobre o espaço nulo:

$$1) \text{ Existe } \beta > 0 \text{ tal } \|B^k\|_2 < \beta \quad \forall k$$

2) Existem K_1, K_2 tais que para todo k

$$-\tilde{\phi}^k(u^k) \geq K_1 \|(Z^k)^T \tilde{g}^k\|_2 \min \left\{ r_k, \frac{\|(Z^k)^T \tilde{g}^k\|_2}{\|(Z^k)^T B^k Z^k\|_2} \right\}$$

$$\tilde{\phi}^k(u^k) \leq K_2 (\nu_1((Z^k)^T B^k Z^k)) \tilde{r}_k$$

onde $\nu_1(P)$ significa o menor valor próprio da matriz P .

3) Se $(Z^k)^T B^k Z^k$ for uma matriz definida positiva e

$$\|(Z^k)^T B^k Z^k\|_2 \leq \tilde{r}_k, \text{ então } u^k = -((Z^k)^T B^k Z^k)^{-1} \tilde{g}^k.$$

Provam que cada iteração interna (iterar até conseguir que $x + d$ seja melhor que x) do algoritmo termina após um número finito de repetições. Se $\langle PL(x^k) \rangle$ forem limitados inferiormente em S , então os pesos u_i para k suficientemente grande permanecem fixos e $h(x^k) \rightarrow 0$, $(Z^k)^T \tilde{g}^k \rightarrow 0$ (condição de convergência de primeira ordem). Se

$$B^k = \nabla^2 f(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla^2 h_i(x^k), \text{ e } x^k \rightarrow x^*,$$

então existirá λ^* tal que as condições de Kuhn-Tucker serem verificada isto é

$$g(x^*) + A(x^*)\lambda^* = 0$$

$$h(x^*) = 0$$

e a matriz

$$Z(x^*)^T \left[\nabla^2 f(x^*) + \sum \lambda_i^* \nabla^2 h_i(x^*) \right] Z(x^*)$$

será definida positiva.

Finalmente a convergência de x^k para x^* , será Q-superlinear, se, numa vizinhança de x^* , $\nabla^2 f$ e $\nabla^2 h_i$ ($i=1,2,\dots,m$) forem Lipschitz contínuas.

CONN-GOULD-TOINT (1988) apresentam um algoritmo para o problema

$$\min f(x) \quad (\text{II.1.69})$$

s. a.

$$l_i \leq x_i \leq u_i \quad i = 1,2,\dots,m$$

Onde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é duas vezes continuamente diferenciável. Na k -ésima iteração o problema modelo utilizado por eles é

$$\min \phi^k(x^k + d) \quad (\text{II.1.70})$$

s. a.

$$\|D^k d\|_2 \leq \beta_2 r_k$$

onde $\phi^k(x^k + d) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T B^k d$,

B^k é uma aproximação simétrica da Hessiana $\nabla^2 f(x^k)$, $\beta_2 \in (0,1)$, e D^k é uma matriz de escalamento não singular diagonal.

A viabilidade da solução é mantida mediante o operador de projeção

$$(P[x]) = \begin{cases} l_i & \text{se } x_i \leq l_i \\ u_i & \text{se } x_i \geq u_i \\ x_i & \text{de outra maneira} \end{cases} \quad (\text{II.1.70})$$

Tem-se que se d^k for solução de (II.1.70), então $x^k + d^k$ deverá ser viável, satisfazendo

$$f(x^k) - \phi^k(x^k + d^k) \geq \beta_1 (f(x^k) - \phi^k(x_c^k)) \quad (\text{II.1.72})$$

onde $\beta_1 \in (0,1]$, x_c^k é o ponto generalizado de Cauchy definido por

$$x_c^k = P[x^k - t_c^k w^k] \quad (\text{II.1.73})$$

sendo t_c^k a menor solução do problema unidimensional

$$\begin{aligned} \min \phi^k(P[x^k - t w^k]) \\ t \geq 0 \end{aligned}$$

$$\|D^k(P[x^k + t w^k] - x^k)\|_2 \leq \nu r_k$$

com ν constante positiva e w^k correspondendo à direção gradiente escalonado definido por

$$(D^k)^T D^k w^k = \nabla f(x^k)$$

Usando o seguinte algoritmo:

PASSO 0

Sejam $\mu, \eta, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ constantes reais dadas tais que

$$0 < \eta < 1, \eta < \mu < 1, 0 < \gamma_0 \leq \gamma_1 < 1 \leq \gamma_2.$$

escolha um ponto inicial x^0 em \mathbb{R}^n , um raio r_0 , e uma aproximação B^0 da hessiana no ponto x^0 . Calcule $f(x^0)$.

Faça $k = 0$.

PASSO 1

ACHAR d^k solução do problema (II.1.70)

PASSO 2

Calcule $f(x^k + d^k)$ e

$$\rho_k = \frac{f(x^k) - f(x^k + d^k)}{f(x^k) - \phi^k(x^k + d^k)}$$

PASSO 3

Se $\rho_k > \mu$, faça:

$$x^{k+1} = x^k + d^k, g^{k+1} = \nabla f(x^{k+1}),$$

escolha $r_{k+1} \in [r_k, \gamma_2 r_k]$ se $\rho_k \geq \eta$, ou

$$r_{k+1} \in [\gamma_1 r_k, r_k] \text{ se } \rho_k < \eta$$

De outra forma faça

$$x^{k+1} = x^k, g^{k+1} = g^k,$$

escolha $r_{k+1} \in [\gamma_0 r_k, r_k]$.

PASSO 4

Atualize as matrizes B^k, D^k . Incremente k em 1 e vá a 1)

Este algoritmo é similar ao dado por SORENSEN (1982) que apresenta uma forma estruturada dos métodos de região de confiança.

Os autores, sob as hipóteses:

$$1) \quad \|(D^k)^{-1}\|_2 < \sigma_1 \quad , \quad \sigma_1 \geq 1$$

$$2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b_k} \longrightarrow \infty \quad ; \quad b_k = 1 + \max_i \|(D^i)^{-1}\|_2^T B^i (D^i)^{-1} \|_2$$

e a propriedade de que x será um ponto crítico de (II.1.70) se e somente se

$$P[x - tw] = x \quad \forall t \geq 0$$

provam que se for a sequência $\{x^k\}$ gerada pelo método verifica

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|P[x^k - w^k] - x^k\|_2 = 0 \quad (\text{II.1.74})$$

Além disto, se existir $\sigma_2 \geq 0$ tal que

$$\|D^k\|_2 \leq \sigma_2 \quad \text{e} \quad \lim_k [f(x^k) - f(x^{k+1})] = 0$$

então \liminf na relação (II.1.74) se transforma em \lim .

Finalmente se todo ponto de acumulação de $\{x^k\}$ satisfizer as condições de folgas complementares estritas, e se $I(x^k) \subset I(x^k + d^k)$, então o algoritmo identifica o conjunto ativo corretamente.

MAHMOUD EL-ALEM (1988) considera também o problema com restrições de igualdades (P) e apresenta uma estratégia diferente àquela dada por VARDI, e por BYRD e outros.

Corresponde a uma variação do método no qual em cada iteração o passo é escolhido como aquele que minimiza o modelo quadrático da Lagrangeana e dá também algum decréscimo a $\|h(x^k) + \nabla h(x^k)^T d\|_2$. Esta idéia foi introduzida por CELIS-DENNIS-TAPIA (1984) : em cada iteração o passo é computado resolvendo-se o subproblema

$$\begin{aligned}
 \text{(CDT)} \quad & \min \nabla_x l(x^k, \lambda^k)^T d + \frac{1}{2} d^T B^k d \\
 & \text{s. a.} \\
 & \|h(x^k) + \nabla h(x^k)^T d\|_2 \leq \vartheta_k \\
 & \|d\|_2 \leq r_k
 \end{aligned}
 \tag{II.1.75}$$

onde B^k é uma aproximação da hesiana da Lagrangeana l associada ao problema (P) e o ϑ_k é uma constante positiva que depende de k .

Em CELIS-DENNIS-TAPIA ϑ_k é escolhido como

$$\vartheta_k = \|h(x^k) + \nabla h(x^k)^T d_{cp}^k\|_2$$

onde d_{cp}^k é o ponto de Cauchy.

O seguinte algoritmo corresponde à modificação dada por MAHMOUD para obter a direção que permitirá definir a nova aproximação à solução de (P)

ALGORITMO 1

1) Resolva o sub-problema

$$\begin{aligned}
 \text{(QP)} \quad & \min \nabla_x l(x^k, \lambda^k)^T d + \frac{1}{2} d^T B^k d \\
 & \text{s. a.} \\
 & h(x^k) + \nabla h(x^k)^T d = 0
 \end{aligned} \tag{II.1.76}$$

para obter d_{qp}^k e $\Delta\lambda_{qp}^k$

se $\|d_{qp}^k\|_2 \leq r_k$, o passo teste será $\hat{d}^k = d_{qp}^k$ e $\hat{\Delta\lambda}^k = \Delta\lambda_{qp}^k$, senão:

a) Se x^k for um ponto viável, então resolva o subproblema

$$\begin{aligned}
 \text{(TRQP)} \quad & \min \nabla_x l(x^k, \lambda^k)^T d + \frac{1}{2} d^T B^k d \\
 & \text{s. a.} \\
 & h(x^k) + \nabla h(x^k)^T d = 0
 \end{aligned} \tag{II.1.77}$$

$$\|d\|_2 \leq r_k$$

Faça

$$\hat{d}^k = d_{\text{TRQP}}^k, \quad \hat{\Delta\lambda}^k = -\left[\nabla h(x^k)^T \nabla h(x^k)\right]^{-1} \nabla h(x^k) \left[\nabla l(x^k) + B^k d_{\text{TRQP}}^k\right]$$

b) Se x^k não for viável, então resolva o subproblema

(CDT)

Faça : $\hat{d}^k = d_{\text{CDT}}^k$, e

$$\hat{\Delta\lambda}^k = -\left[\nabla h(x^k)^T \nabla h(x^k)\right]^{-1} \nabla h(x^k) \left(\nabla l(x^k) + B^k d^k_{\text{CDT}}\right)$$

Seja \hat{d}^k o passo computado por alguma das formas anteriores e $\hat{\Delta\lambda}^k$ o seu correspondente multiplicador de Lagrange. A qualidade do ponto $(x^k + \hat{d}^k, \lambda^k + \hat{\Delta\lambda}^k)$ em relação ao ponto (x^k, λ^k) será avaliada por meio da função LAGRANGEANO AUMENTADO

$$\phi(x, \lambda; c) = f(x) + \lambda^T h(x) + c \|h(x)\|_2^2$$

(II.1.78)

Define-se a redução real na função mérito no ponto $(x^k + \hat{d}^k, \lambda^k + \hat{\Delta\lambda}^k)$ como

$$\text{ared}_k = \phi(x^k, \lambda^k; c^k) - \phi(x^k + \hat{d}^k, \lambda^k + \hat{\Delta\lambda}^k; c^k)$$

e a redução predita como

$$\text{pred}_k = \phi(x^k, \lambda^k; c^k) - \psi(x^k, \hat{d}^k, \lambda^k, \hat{\Delta\lambda}^k; c^k)$$

onde

$\psi(x^k, \hat{d}^k, \lambda^k, \hat{\Delta\lambda}^k; c^k)$ é uma aproximação da função

$$\phi(x^k + \hat{d}^k, \lambda^k + \hat{\Delta\lambda}^k; c^k)$$

O passo será aceito se $\frac{\text{ared}_k}{\text{pred}_k} \geq \eta_1$, onde $\eta_1 \in (0, 1)$

e então $x^{k+1} = x^k + \hat{d}^k$ e $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \hat{\Delta\lambda}^k$. Defina-se $\hat{d}^k = \hat{d}^k$ e $\hat{\Delta\lambda}^k = \hat{\Delta\lambda}^k$ se o passo for aceito, no caso em que seja rejeitado, $x^{k+1} = x^k$, e $\lambda^{k+1} = \lambda^k$. O algoritmo seguinte

permite testar o passo e atualizar o raio da região de confiança.

ALGORITMO 2

1) Se $\frac{\text{ared}_k}{\text{pred}_k} \leq \eta_1$, então faça:

$$x^{k+1} = x^k$$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k$$

$$r_{k+1} \in \langle \alpha_1 \|\hat{d}^k\|_2, \alpha_2 \|\hat{d}^k\|_2 \rangle$$

caso contrario, se $\eta_1 \leq \frac{\text{ared}_k}{\text{pred}_k} \leq \eta_2$, então faça

$$x^{k+1} = x^k + d^k$$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \Delta\lambda^k$$

$$r_{k+1} = \min\langle r_k, \alpha_3 \|d^k\| \rangle$$

senão, se $\frac{\text{ared}_k}{\text{pred}_k} \geq \eta_2$ e $\|d_{QP}\|_2 > r_k$ e

$$\alpha_4 \|d_k\|_2 > r_k, \text{ faça}$$

$$r_k = \alpha_k \|d^k\|_2$$

e voltar ao último passo aceitado e ao último radio da região de confiança e atualize o radio.

Caso contrario faça

$$x^{k+1} = x^k + d^k$$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \Delta\lambda^k$$

$$r_{r+1} = \max\langle r_k, \alpha_3 \|d^k\|_2 \rangle$$

A seguir apresentaremos o algoritmo geral proposto .

ALGORITMO

PASSO (0)

Sejam $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $B^0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m$, c_{-1} , ρ , α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , η_1 , η_2 , ε , r_0 , tais que :

$$c_{-1} = 1, \rho > 0$$

$$0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < 1 < \alpha_4 < \alpha_3$$

$$0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$$

$$\varepsilon > 0, r_0 > 0$$

seja $k = 1$

PASSO (1)

Se $\|P_k \nabla f(x^k)\|_2 + \|h(x^k)\|_2 < \varepsilon$, PARE

PASSO (2)

Compute \hat{d}^k e $\Delta \hat{\lambda}^k$ de acordo com o algoritmo (1)

PASSO (3)

Atualização do parâmetro de penalidade de acordo com o seguinte esquema:

$$\text{faça } r_k = r_{k-1}$$

Se

$$\text{pred}_k \geq \frac{r_k}{2} \left(\|h(x^k)\|_2^2 - \|h(x^k) + \nabla h(x^k)^T \hat{d}^k\|_2^2 \right),$$

vá a (4)

caso contrário faça

$$r_k = 2 \frac{\nabla l(x^k, \lambda^k) \hat{d}^k + \frac{1}{2} \hat{d}^k B^k \hat{d}^k + \Delta \lambda^k (h(x^k) + \nabla h(x^k)^T \hat{d}^k) + \rho}{\|h(x^k)\|_2^2 - \|h(x^k) + \nabla h(x^k)^T \hat{d}^k\|_2^2} + \rho$$

PASSO (4)

Teste o passo e atualize r_k de acordo com o algoritmo 2

PASSO (5)

Faça $k = k + 1$ e vá ao passo (1).

Considera-se as seguintes hipóteses de convergência

1) Existe um conjunto aberto e convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que para todo k , x^k e $x^k + d^k \in \Omega$.

2) f e h_i são duas vezes continuamente diferenciáveis em Ω .

3) Existe uma constante r tal que $r_k \leq r$ para todo k .

4) $\nabla h(x)$, $\nabla f(x)$, $\nabla^2 f(x)$, $\left[\nabla h(x)^T \nabla h(x) \right]^{-1}$ e $\nabla h_i(x)$ $i=1,2,\dots,m$ são todos limitados em Ω .

6) As matrizes B^k são superiormente uniformemente limitadas.

É demonstrado que o algoritmo está bem definido, no sentido em que sempre encontra um passo aceitável e além disto termina num ϵ ponto de Kuhn Tucker.

Para a velocidade de convergência local, acrescenta-se as seguintes hipóteses:

1) A sequência $\{x^k\}$ converge a um ponto de Kuhn Tucker. x^* .

- 2) Em x^* se satisfaz a condição necessária de segunda ordem
- 3) $\nabla_x^2 l$ é Lipschitz contínua em relação a x em alguma vizinhança de x^*
- 4) Existe k_0 suficientemente grande tal que $\forall k \geq k_0$ se tem

$$\|\nabla h(x^k) \left[\nabla h(x^k)^T \nabla h(x^k) \right]^{-1} \nabla h(x^k)^T \nabla l(x^k, \lambda^k)\|_2 \leq c_0 \|\hat{d}^k\|$$

Estabelece-se então que para k suficientemente grande a região de confiança será inativa e a convergência da sequência (x^k, λ^k) para a solução (x^*, λ^*) será Q- quadrática.

Os trabalhos descritos a seguir correspondem ao caso não diferenciável geral, nos quais se combinam os métodos de feixe e região de confiança. As definições e propriedades necessárias para sua compreensão são dadas no capítulo (III) ao qual referimos para a metodologia de feixe e algumas fórmulas que serão utilizadas.

KIWIEL (1988) apresenta um método de feixe com região de confiança elipsoidal para minimizar uma função f convexa (não necessariamente diferenciável) sob as hipóteses de que o conjunto solução $\mathcal{X}^* = \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n \mid f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}$ seja não vazio, e que se conhece o centro x_0 e o raio r de alguma bola \mathbb{E} dada por $\mathbb{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_2 \leq r \right\}$ que intersepta o conjunto \mathcal{X}^* . O algoritmo precisa da computação

de $f(x)$ e de algum subgradiente $g_f \in \partial f(x)$ em cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$, e gera duas seqüências de pontos $\{x^k\}$ e $\{y^k\}$ em \mathbb{R}^n . A seqüência $\{x^k\}$ deve satisfazer $f(x^{k+1}) \leq f(x^k)$ se $x^{k+1} \neq x^k$ e $f(x^k) \downarrow \min f(x)$, a seqüência auxiliar $\{y^k\}$ em que se calcula $f(y^k)$ e $g_f = g_f(y^k) \in \partial f(y^k)$, gera uma seqüência de elipsóides

$$E_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_c^k\|_{A_k} \leq 1 \right\}$$

com centro em x_c onde as matrizes A_k são simétricas e definidas positivas. Estas matrizes são tais que $E_k \cap X^* \neq \emptyset \forall k$. Assim na k -ésima iteração, o problema se reduz a

$$\begin{aligned} \min f(y) \\ y \in E_k \end{aligned}$$

que usa como subproblema modelo a

$$\begin{aligned} \min \hat{f}^k(y) \\ y \in E_k \end{aligned} \tag{II.1.79}$$

para \hat{f} fornecido pela definição (III.1.2):

$$\hat{f}^k(y) = \max \left\{ f(y^j) + \langle g^j, y - y^j \rangle \mid g^j \in \partial f(y^j) \right\}$$

(trata-se de um modelo localmente afim para a função f).
Devido à complexidade deste problema Kiwiel utiliza uma forma equivalente via dualização de restrições. O algoritmo busca uma solução (y^{k+1}, u^k) de

$$\min u + \frac{1}{2} \eta^k \|y - x_c^k\|_{A_k}^2$$

s. a.

$$f(y^j) + \langle g^j, y - y^j \rangle \leq u \quad j \in J^k = \{1, 2, \dots, k\}$$

(II.1.80)

η^k é um número maior que o multiplicador de lagrange associado à restrição quadrática.

Fazendo

$$v^k = u^k - f(x^k)$$

$$d^k = y^{k+1} - x_c^k$$

$$\bar{\alpha}_j^k = f(x^k) - f_j(x_c^k)$$

o problema anterior se transforma em

$$\min v + \frac{1}{2} \eta^k \|d\|_{A_k}^2$$

s. a.

$$-\bar{\alpha}_j^k + g^j d \leq v \quad j \in J^k$$

(II.1.81)

KIWIEL propõe o seguinte algoritmo :

PASSO (0)

Escolha um ponto $x_c^1 \in \mathbb{R}^n$ e uma matriz A_1 nxn simétrica definida positiva , tal que o elipsóide

$$E_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_c^1\|_{A_1} \leq 1 \right\}$$

satisfaça $E_1 \cap X^* \neq \emptyset$. Selecione um ponto de partida x^1

em \mathbb{R}^n , uma tolerância final ϵ , $m \in (0,1)$ e parâmetros $\eta_u > 0$ e $\chi \in (1,100]$. Ponha $y^1 = x^1$ e $J^1 = \langle 1 \rangle$. Compute $f(y^1)$, $g^1 \in \partial f(y^1)$ e $f_1(x_c^1) = f(y^1) + \langle g^1, x_c^1 - y^1 \rangle$. Escolha $\eta^1 \in (0, \eta_u)$. Ponha o contador de iterações em $k = 1$ e o contador de passos sérios em $l = 0$.

PASSO (2)

Calcule a solução (v^k, \bar{d}^k) e os multiplicadores de Lagrange λ_j^k , $j \in J^k$, do subproblema (II.1.81); compute

$$(p^k, \bar{\alpha}_p^k) = \sum_{j \in J^k} \lambda_j^k (g^j, \bar{\alpha}_j^k)$$

PASSO (2)

Se $\|p^k\|_{A_k^{-1}} + \bar{\alpha}_p^k \leq \epsilon$, PARE.

Se $\bar{\alpha}_p^k > 0$, vá a passo (4); de outra maneira continue.

PASSO (3)

Obtenha $x_c^+ \in \mathbb{R}^n$ e uma matriz A_+ $n \times n$ simétrica e definida positiva tal que

$$E_+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_c^+\|_{A_+} \leq 1 \right\}$$

seja um elipsóide de menor volume contendo a $E_k \cap H_p^k$,

onde

$$H_p^k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p^k, x - x_c^k \rangle \leq \bar{\alpha}_p^k \right\}$$

Substitua x_c^k , A_k e η^k por x_c^+ , A_+ e η^+ respectivamente e vá ao passo (1)

PASSO (4)

Se $\|\bar{d}^k\|_{A^k} \leq 1$ vá ao passo (5) Caso contrário escolha η^+ em $[\chi\eta^k, 100\eta^k]$ ponha $\eta^k = \eta^+$ e vá a passo (1)

PASSO (5)

Faça $y^{k+1} = x^k + \bar{d}^k$ e compute $f(y^{k+1})$ e $g^{k+1} \in \partial f(y^{k+1})$
 se $f(y^{k+1}) \leq f(x^k) + mv^k$, ponha $x^{k+1} = y^{k+1}$, $k(1) = k + 1$
 e acrescenta em 1 o contador de passos serios 1. Caso contrário faça $x^{k+1} = x^k$.

PASSO (6)

Atualize J^{k+1} .

PASSO (7)

Se $x^{k+1} = x^k$, ponha $\eta^{k+1} = \eta^k$, caso contrário escolha $\eta^{k+1} \in (0, \eta_u]$. Ponha $x_c^{k+1} = x_c^k$, $A_{k+1} = A_k$, $k = k+1$ e vá a passo (1)

Kiwiel prova que a sequência $\{x_n^k\}$ gerada pelo algoritmo ou é finita, e em tal caso o último elemento é o minimizador de f , ou é infinita, e $f(x^k) \downarrow \min f(x)$, quando $k \rightarrow \infty$.

SCHRAMM-ZOWE (1987) apresentam também um método com região de confiança para minimizar uma função convexa não necessariamente diferenciável sob a hipótese geral de que f seja uma função limitada inferiormente. Da mesma forma que Kiwiel o algoritmo precisa da computação de $f(x)$ e de um

subgradiente $g_j(x) \in \partial f(x)$ em cada $x \in \mathbb{R}^n$. Gera duas sequências de pontos $\{x^k\}$ e $\{y^k\}$ em \mathbb{R}^n : a sequência $\{x^k\}$ deve satisfazer $f(x^{k+1}) \leq f(x^k)$, se $x^{k+1} \neq x^k$ e $f(x^k) \downarrow \min f(x)$; e a sequência $\{y^k\}$ serve para computar $f(y^k)$ e $g^j \in \partial f(y^k)$ que serão usado para melhorar o modelo quando não se consiga um suficiente decrescimento da função f . Desta maneira, na k -ésima iteração, o problema modelo será

$$\begin{aligned} & \min \hat{f}(x^k, d) \\ & \text{s. a.} \\ & \|d\|_2 \leq r \end{aligned} \quad (\text{II.1.82})$$

onde \hat{f} é como em (II.1.79), um modelo localmente afim para $f(x^k + d) - f(x^k)$ definido em (IV.1.5), por

$$\hat{f}(x^k, d) = \max_I \left\{ f(y^j) + \langle g^j, x^k - y^j \rangle - f(x^k) + \langle g^j, d \rangle \mid g^j \in \partial f(y^j) \right\}$$

onde $I = \{1, 2, \dots, k\}$

Como na obtenção de forma (II.1.82) se chega sucessivamente as formas equivalentes

$$\begin{aligned} & \min v \\ & \text{s. a.} \\ & -\alpha_j^k + g^j d \leq v \quad j=1, 2, \dots, k \\ & \|d\|_2 \leq r \end{aligned} \quad (\text{II.1.83})$$

$$\begin{aligned} \min v + \frac{1}{2t} \|d\|_2^2 \\ \text{s. a.} \\ -\alpha_j^k + g^j d \leq v \end{aligned} \quad (\text{II.1.84})$$

Os autores mostram que o trabalho de adaptar r ao modelo é equivalente fazê-lo com t . Estabelecem que a solução em d do problema (II.1.84), como função do parâmetro t é contínua e crescente em $t > 0$, e que além disso é seccionalmente afim. Em cada iteração k , o parâmetro t varia segun o seguinte algoritmo interno (até que $d(t)$ produza ou um decrescimento suficiente da função f . ou passo nulo).

ALGORITMO INTERNO

PASSO (0)

Escolha t_1^k , faça $j = 1$

Compute a solução $(v(t_j^k), d(t_j^k))$ de (II.1.84),

faça $y_j^{k+1} = x^k + d(t_j^k)$ e compute $g_j^{k+1} \in \partial f(y_j^{k+1})$

PASSO (2)

1) PASSO SÉRIO: se se tiver:

$$a) f(y_j^{k+1}) - f(x^k) < m_1 v_j^k$$

$$b) g_j^{k+1} d_j^k \geq m v_j^k \quad \text{ou} \quad \bar{t} - t_j^k \leq \mu$$

faça $x^{k+1} = y^{k+1} = y_j^{k+1}$, $g^{k+1} = g_j^{k+1}$ e PARE

2) PASSO NULO: se se tiver

$$a) f(y_j^{k+1}) - f(x^k) \geq m_1 v_j^k$$

$$b) f(x^k) - f(y_j^{k+1}) + g_j^{k+1} d_j^k \leq \beta \quad \text{ou} \quad t_j^k - \underline{t} \leq \mu$$

3) Se 1) e 2) não forem satisfeitos então escolha um t melhor e volte ao passo 1).

A escolha de t é realizada através da bisseção, os autores provam que o algoritmo interno cicla um número finito de vezes.

O algoritmo geral dado por SCHRAMM-ZOWE é o seguinte.

ALGORITMO GERAL

PASSO (0)

Escolha $x^1 \in \mathbb{R}^n$, \underline{t} , \bar{t} , m , μ , β , e ϵ em \mathbb{R} tais que :

$$0 \leq \underline{t} < \bar{t}, \quad 0 < m < 1, \quad \mu > 0, \quad \beta > 0, \quad \text{e} \quad \epsilon > 0$$

Faça $y^1 = x^1$, compute $f(y^1)$, $g^1 \in \partial f(y^1)$ e α_1^1 , ponha $k=1$

PASSO (1)

Compute x^{k+1} de acordo com o algoritmo interno, ou pare se se satisfazer algum teste de parada.

PASSO (2)

Compute α_i^{k+1} , para $i=1,2,\dots,k+1$.

PASSO (3)

Faça $k = k+1$ e volte ao passo (1).

Os autores estabelecem que se $\{x^k\}$ é uma sequência gerada por este algoritmo, então $x^k \rightarrow x^*$, onde x^* é uma solução do problema.

CAPÍTULO III

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

III.0 INTRODUÇÃO

Neste capítulo daremos o mínimo de ferramentas, necessário ao desenvolvimento desta tese. Suporemos conhecidos, os resultados básicos da otimização diferenciável, de análise convexa e as propriedades das funções localmente Lipschitz (ver Rockafellar (1970)). Começaremos lembrando o conceito e algumas propriedades do subdiferencial no caso localmente Lipschitz e no caso convexo. Seguiremos com as condições de otimalidade para problemas convexos não diferenciáveis nos casos irrestrito e com restrições, e, finalmente daremos o conceito e algumas propriedades do ε -subdiferencial.

III.1 SUBDIFERENCIABILIDADE

Definições III.1.1

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz; então:

1) O conjunto gradiente de f em x , $M(x)$ é o conjunto

$$M(x) = \left\{ g \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \exists f(x_i) \rightarrow g, \text{ para alguma sequência} \\ x_i \rightarrow x, \text{ com } f \text{ diferenciável em } x_i \end{array} \right\}$$

2) O conjunto subdiferencial (gradiente generalizado) de f em x , $\partial f(x)$, é a envoltória convexa do conjunto gradiente, quer dizer:

$$\partial f(x) = \text{co}M(x) = \left\{ g \in \mathbb{R}^n \mid g = \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \right. \\ \left. g_i \in M(x) \forall i, i=1, 2, \dots, k, k \in \mathbb{N} \right\}$$

Cada elemento $g \in \partial f(x)$ é chamado um subgradiente de f em x

Propriedade III.1.1

O subdiferencial de f no ponto $x \in \mathbb{R}^n$ verifica o seguinte:

- 1) $\partial f(x) \neq \emptyset$
- 2) $\partial f(x)$ é um conjunto convexo
- 3) $\partial f(x)$ é um conjunto compacto
- 4) $\partial f(x)$ é semicontínuo superiormente, ou seja, se uma sequência $\{y_i\}$ converge para x , e $g_i \in \partial f(y_i)$ para cada i , então cada ponto de acumulação g de $\{g_i\}$ satisfaz $g \in \partial f(x)$.
- 5) ∂f é limitado sobre conjuntos limitados

Propriedade III.1.2

Os fatos seguintes são equivalentes:

- 1) $\partial f(x)$ consiste de um único ponto.
- 2) $\nabla f(x)$ existe e é contínuo relativamente ao conjunto onde ele existe.

Propriedade III.1.3

Se a função f for convexa, então f será localmente Lipschitz no domínio efetivo. ($\text{dom} f$)

Propriedade III.1.4

Se a função f for convexa e $f(x) < \infty$, então

$$\partial f(x) = \left\{ g \in \mathbb{R}^n \mid f(z) \geq f(x) + \langle g, z-x \rangle \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \right\}$$

A propriedade III.1.4 nós permite dar a seguinte interpretação geométrica dos elementos do conjunto $\partial f(x)$. Cada subgradiente g em $\partial f(x)$ define uma linearização de f em x da seguinte maneira

$$f_g(z) = f(x) + \langle g, z-x \rangle \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

a qual é uma aproximação inferior de f em x com

$$f(x) = f_g(x)$$

$$f(z) \geq f_g(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

O gráfico da função afim $f_g(z)$

$$H_g = \left\{ (z, \beta) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \beta = f_g(z) \right\}$$

é um hiperplano suporte do conjunto $\text{Epi}(f)$ (epigráfico de f) no ponto $(x, f(x))$ onde

$$\text{Epi}(f) = \left\{ (z, \mu) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(z) \leq \mu \right\}$$

Definição III.1.2

Através das linearizações inferiores de f , podemos definir um modelo local para f seccionalmente afim, dado por

$$\hat{f}(z) = \max \left\{ f_g(z) \mid g \in \partial f(x) \right\}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

Propriedade III.1.5

$$1) f(x) = \hat{f}(x)$$

$$2) f(z) \geq \hat{f}(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

$$3) \text{Epi} f \subset \text{Epi} \hat{f}$$

Propriedade III.1.6

$$f'(x, d) = \max \left\{ \langle g, d \rangle \mid g \in \partial f(x) \right\}$$

onde

$$f'(x, d) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + td) - f(x)}{t}$$

quando tal limite existe .

III.2. CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE

Nesta seção lembraremos as condições de otimalidade para problemas convexos não diferenciáveis irrestritos e com restrições.

Propriedade III.2.1

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa, então são equivalentes:

1) \bar{x} é um mínimo global para f

2) $0 \in \partial f(\bar{x})$

3) $\min_{\|d\|_2 = 1} f'(\bar{x}, d) \geq 0$

$$\|d\|_2 = 1$$

Consideremos agora o seguinte problema (P)

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min f_0(x) \\ \text{s. a.} \\ f_i(x) \leq 0 & i \in I = \langle 1, 2, \dots, r \rangle \\ f_j(x) = 0 & j \in J = \langle r+1, \dots, m \rangle \end{array}$$

Onde $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $i \in K = I_0 \cup J$, $I_0 = I \cup \langle 0 \rangle$ são localmente Lipschitz. Temos, para (P), a seguinte condição de otimalidade.

Proposição III.2.2

Seja \bar{x} uma solução local para o problema (P), então existem escalares μ_i , $i \in K$ não todos nulos tais que:

$$1) \mu_i \geq 0 \quad i \in I_0$$

$$2) \mu_i f_i(\bar{x}) = 0 \quad i \in I$$

$$3) 0 \in \sum_{i \in K} \mu_i \partial f_i(\bar{x})$$

Definição III.2.1

O problema (P) é chamado convexo quando as funções f_i , $i \in I_0$ são convexas e f_j , $j \in J$ são lineares.

Proposição III.2.3 (Teorema de KUHN-TUCKER)

Dado um problema convexo (P) seja \bar{I} o conjunto de subíndices de I para os quais f_i não são afins. Admitamos que o ponto de mínimo de (P) é finito e que existe um ponto viável que satisfaz as desigualdades estritas em (P) para todo $i \in \bar{I}$. Então um ponto \bar{x} será solução ótima de (P) se e somente se existierem escalares μ_i , $i \in I \cup J$, tais que

$$1) \mu_i \geq 0 \quad \forall i \in I$$

$$2) \mu_i f_i(\bar{x}) = 0 \quad \forall i \in I$$

$$3) 0 \in \left[\partial f_0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i \partial f_i(\bar{x}) \right]$$

Definição III.2.2

As condições 1),2),3) da proposição (III.2.3) são chamadas de condições de KUHN-TUCKER para o problema (P)

III.3 ϵ -SUBDIFERENCIABILIDADE

Definição III.3.1

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, uma função convexa e $\epsilon \geq 0$.

O ε -subdiferencial de f em x é o conjunto convexo

$$\partial_{\varepsilon} f(x) = \left\{ g \in \mathbb{R}^n \mid f(z) \geq f(x) + \langle g, z-x \rangle - \varepsilon, \forall z \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Cada elemento $g \in \partial_{\varepsilon} f(x)$ é chamado um ε -subgradiente.

Notemos que $g \in \partial_{\varepsilon} f(x)$ se e somente se g determinar um hiperplano que passe por $(x, f(x) - \varepsilon)$ tal que para todo $(y, \mu) \in \text{Epif}$ se verifique $\mu \geq f(x) + \langle g, y-x \rangle - \varepsilon$

Propriedade III.3.1

Sejam $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1,2$ funções convexas e próprias. Se existir x_0 tal que $f_i(x_0) < \infty$, $i=1,2$, então

$$\partial_{\varepsilon} (f_1 + f_2)(x_0) = \bigcup_{\substack{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon}} \left\{ \partial_{\varepsilon_1} f_1(x_0) + \partial_{\varepsilon_2} f_2(x_0) \right\}$$

Esta propriedade pode ser generalizada para k funções, $k \geq 2$.

O resultado a seguir é essencial na metodologia dos feixes (ver LEMARECHAL (1978-1979-1981), MIFFLIN (1982), ZOWE (1985)), porque identifica subgradientes em um ponto a ε -subgradientes de pontos vizinhos.

Propriedade III.3.2

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, uma função convexa e própria, $\varepsilon \geq 0$. Então :

- 1) Existe uma vizinhança $V(x)$ de x tal que

$$y \in V(x) \implies \partial f(y) \subset \partial_\varepsilon f(x)$$

- 2) sejam $x, y \in \text{dom} f$ e $g \in \partial f(y)$. Então

$$g \in \partial_\varepsilon f(x) \iff f(y) \geq f(x) + \langle g, y-x \rangle - \varepsilon$$

CAPÍTULO IV

UM MÉTODO DE FEIXE E REGIÃO DE CONFIANÇA

IV.0 INTRODUÇÃO

Neste capítulo consideraremos o problema (P)

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min f(x) \\ \text{s. a.} \\ h_i(x) = 0 & i = 1, 2, \dots, m \end{array}$$

Onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, é uma função convexa (não obrigatoriamente diferenciável) e $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ($i=1, 2, \dots, m$) são afins.

Propõe-se um algoritmo para (P) que use os métodos de feixe e de região de confiança. O modelo para (P), o subproblema para determinar a "direção de descida" é gerado por uma aproximação seccionalmente afim para f (via subgradiente) as restrições são tratadas com nos métodos de aproximações sucessivas, que em nosso caso corresponderã a hiperplanos paralelos aos h_i . Dado que os hiperplanos paralelos em cada ponto poderiam ter interseção vazia com o conjunto

$$\left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \|d\|_2 \leq r, r \geq 0 \right\},$$

da mesma forma que VARDI (1985), BYRD - SCHNABEL - SHULTZ (1987), poromos uma função peso nos termos constantes dos hiperplanos de modo que estos interseptem o conjunto

$$\left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \|d\|_2 \leq r, r \geq 0 \right\}.$$

Da mesma forma que LEVENBERG (1944), e GOLFELD-QUANDT-TROTTER (1966) no caso diferenciável, e SCHRANN-ZOWE (1988) para o caso não suave, o controle de r será feito por forma indireta, adicionando na função objetivo do subproblema (modelo para (P)) a expressão $\frac{1}{2t} \|d\|_2^2$. A função peso considerada será (α em (II.1.61) e em (II.1.64))

$$\beta^k = \beta(x^k) = \begin{cases} \frac{\underline{t}}{\|h(x^k)\|_2} & , \text{ se } \|h(x^k)\|_2 \geq 1 \text{ e } k \leq k_0 \\ \underline{t} & , \text{ se } \underline{t} < \|h(x^k)\|_2 \leq 1 \text{ e } k \leq k_0 \\ 1 & , \text{ se } \|h(x^k)\|_2 \leq \underline{t} \text{ ou } k > k_0 \end{cases} \quad (\text{IV.0.1})$$

se a sequência $\{x^k\}$ (que será gerada pelo ALGORITMO GERAL) tiver um número menor que q (q é prefixado) termos consecutivos iguais. Caso contrario $\beta^k = 1$.

O parâmetro \underline{t} será convenientemente escolhido em $(0,1)$. Assim $0 \leq \beta \leq 1$.

$$h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x)).$$

A direção d (solução do subproblema), como função do parâmetro $t > 0$, será contínua e $\|d(t)\|_2$ crescente; tais propriedades justificarão o nosso controle indireto do raio através do parâmetro t , que será escolhido por meio de bissecção. A qualidade da aproximação à solução do problema, definida pela solução do subproblema será avaliada por meio da função mérito penalidade exata:

$$\phi(x, c) = f(x) + c \sum_{i=1}^m |h_i(x)| \quad (\text{IV.0.2})$$

O método será uma extensão do método de SCHRANN-ZOWE (1987) pois considera restrições de igualdades, e em certo modo uma generalização do método de VARDI (1985) pois trata

o caso não suave.

O algoritmo gerará duas seqüências $\langle x^k \rangle$ e $\langle y^k \rangle$ em \mathbb{R}^n . A seqüência $\langle x^k \rangle$ deve satisfazer $f(x^k) \searrow \min f(x)$ e $h_i(x^k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ para $i=1,2,\dots,m$. A seqüência auxiliar $\langle y^k \rangle$ será usada para computar $f(y^k)$ e $g^k = g(x^k) \in \partial f(y^k)$, necessário para a geração dos sucessivos modelo locais de $f(x+d)-f(x)$ seccionalmente afins.

IV.1 O MÉTODO

Na k -ésima iteração teremos as seqüências de iterandos x^1, x^2, \dots, x^k , y^1, y^2, \dots, y^k , e as linearizações

$$f_j(x) = f(y^j) + \langle g^j, x-y^j \rangle, g^j \in \partial f(y^j), \quad j \in I = \{1,2,\dots,k\} \quad (\text{IV.1.1})$$

$$h_i(x) = h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)(x-x^k), \quad i=1,2,\dots,m \quad (\text{IV.1.2})$$

(esta, na verdade, exata)

Definamos o erro (positivo) de cada linearização em x^k :

$$\alpha_j^k = \alpha(x^k, y^j) = f(x^k) - f_j(x^k), \quad j \in I \quad (\text{IV.1.3})$$

O modelo seccionalmente afim obtido através das linearizações, é, no ponto $x^k + d$, dado por:

$$\hat{f}(x^k, d) = \max \left\{ f_j(x^k + d) \right\} - f(x^k) \quad (\text{IV.1.4})$$

Das relações (IV.1.1) e (IV.1.3) temos

$$\hat{f}(x^k, d) = \max_j \left\{ -\alpha_j^k + g^{jT} d \right\}, \quad d \in \mathbb{R}^n \quad (\text{IV.1.5})$$

onde $g^{jT} d = \langle g^j, d \rangle$

Observemos que \hat{f} aproxima inferiormente a $f(x^k + d) - f(x^k)$.

Assim então o problema modelo (subproblema) para (P) será

$$\begin{aligned} & \min \hat{f}(x^k, d) \\ & \text{s. a.} \\ & \beta^k h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)^T d = 0 \quad i=1, 2, \dots, m \\ & \|d\|_2 \leq r_k \end{aligned} \quad (\text{IV.1.6})$$

Onde β^k é a função peso dada por (IV.0.1).

É claro que o problema (IV.1.6) é equivalente ao problema

$$\begin{aligned} & \min v \\ & v, d \\ & \text{s. a.} \\ & -\alpha_j^k + g^{jT} d \leq v \quad j=1, 2, \dots, k \quad (\text{IV.1.7.a}) \\ & \beta^k h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)^T d = 0 \quad i=1, 2, \dots, m \quad (\text{IV.1.7.b}) \\ & \frac{1}{2} \|d\|_2^2 \leq \frac{1}{2} r_k^2 \quad (\text{IV.1.7.c}) \end{aligned}$$

Lema IV.1.1

Se o multiplicador de Lagrange da restrição (IV.1.7.c) for positivo, então existirá $t > 0$ tal que o problema

$$\begin{aligned}
 & \min_{v, d} v + \frac{1}{2t} \|d\|_2^2 \\
 & \text{s. a.} \\
 & -\alpha_j^k + g^{jT}d \leq v \quad j=1, 2, \dots, k \\
 & \beta^k h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)^T d = 0 \quad i=1, 2, \dots, m
 \end{aligned} \tag{IV.1.8}$$

é equivalente a (IV.1.7) (ou (IV.1.8))

Demonstração

Observe que se trata de problemas convexos diferenciáveis, envolvendo apenas funções quadráticas e lineares, portanto sob a hipótese de consistência em as restrições a existência da solução está garantida, e ela é única, por ser a função objetivo estritamente convexa.

As condições de Kuhn - Tucker para o problema (IV.1.7) no ponto (v, d) garantem a existencia de:

$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$, $\mu \geq 0$ em \mathbb{R}^k , $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ em \mathbb{R}^m , e $\tau > 0$ em \mathbb{R} tais que

$$(1, 0) + \sum_{j=1}^k \mu_j (-1, g^j) + \sum_{i=1}^m \sigma_i (0, \nabla h_i(x^k)) + \tau (0, d) = 0$$

onde $(\ , \)$ representa um vetor em \mathbb{R}^{1+n} .

$$\mu_j (-v - \alpha_j^k + g^{jT}d) = 0 \quad j=1, 2, \dots, k$$

$$\tau (\|d\|_2^2 - r_k^2) = 0.$$

Isto implica em

$$\sum_{j=1}^k \mu_j = 1 \tag{IV.1.9.a}$$

$$d = -\frac{1}{\tau} \left(\sum_{j=1}^k \mu_j g^j + \sum_{i=1}^m \sigma_i \nabla h_i(x^k) \right) \quad (\text{IV.1.9.b})$$

$$v = -\sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k + \sum_{j=1}^k \mu_j g^{jT} d \quad (\text{IV.1.9.c})$$

Considere agora a função lagrangeana associada a (IV.1.7.)

$$\begin{aligned} L(v, d, \tau, \mu, \sigma) &= v \cdot \sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k + \sum_{j=1}^k \mu_j g^{jT} d - \sum_{j=1}^k \mu_j v + \\ &+ \sum_{i=1}^m \sigma_i \nabla h_i(x^k)^T d + \beta \sum_{i=1}^m \sigma_i h_i(x^k) + \\ &+ \frac{1}{2} \tau (\|d\|_2^2 - r_k^2) \end{aligned} \quad (\text{IV.1.10})$$

Substituindo as expressões de d e v dadas por (IV.1.9.b) e (IV.1.9.c) temos:

$$\begin{aligned} L(\tau, \mu, \sigma) &= -\frac{1}{\tau} \left\langle \sum_{j=1}^k \mu_j g^j + \sum_{i=1}^m \sigma_i \nabla h_i(x^k), \sum_{j=1}^k \mu_j g^j + \sum_{i=1}^m \sigma_i \nabla h_i(x^k) \right\rangle - \\ &- \sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k + \beta \sum_{i=1}^m \sigma_i h_i(x^k) + \frac{1}{2\tau} \left\| \sum_{j=1}^k \mu_j g^j + \sum_{i=1}^m \sigma_i \nabla h_i(x^k) \right\|_2^2 - \\ &- \frac{1}{2} \tau r^2 \\ &= -\sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k + \beta \sum_{i=1}^m \sigma_i h_i(x^k) - \frac{1}{2\tau} \left\| \sum_{j=1}^k \mu_j g^j + \sum_{i=1}^m \sigma_i \nabla h_i(x) \right\|_2^2 - \\ &- \frac{1}{2} \tau r^2 \end{aligned}$$

que tem máximo em relação a τ em

$$\bar{\tau} = \frac{\left\| \sum_{j=1}^k \mu_j g^j + \sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla h_i(x^k) \right\|_2}{r} \quad (\text{IV.1.11})$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned} & \min_{v, d} v + \frac{\bar{\tau}}{2} \|d\|_2^2 \\ & \text{s. a.} \\ & -\alpha_j^k + g^{jT} d \leq v \quad j=1, 2, \dots, k \\ & \beta^k h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)^T d = 0 \quad i=1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

é equivalente ao problema (IV.1.7); portanto, fazendo

$$t = \frac{1}{\bar{\tau}} \quad \text{obtemos (IV.1.8).}$$

O lema anterior fornece a identificação entre r em (IV.1.7) e t em (IV.1.8).

Dado que a restrição $\|d\|_2 \leq r$ deve ser ativa, e usando o fato de que τ mede a variação da função objetivo em relação à variação de r , é que uma eleição da função β pode ser justamente (IV.0.1) onde \underline{t} é tal que $0 < \underline{t} \leq t \leq \bar{t}$, e \bar{t} é uma cota superior dada para t . O próximo lema será um instrumento útil para a justificativa do algoritmo: ele relaciona a não viabilidade de x^k e a garantia de deslocamento a partir de x^k .

Lema IV.1.2

Se β for definido como em (IV.0.1), e a sequência (x^k) tiver menos de q termos consecutivos iguais, então

$$\|h(x^k)\|_2 \geq \underline{t} \implies \|d(t)\|_2 \geq \frac{\underline{t}^2}{\|\nabla h(x^k)\|_2}, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}$$

Demonstração

Se $d(t)$ satisfizer o sistema $\beta h(x^k) + \nabla h(x^k)^T d(t) = 0$ (que suporemos sempre consistente), então,

$$\beta \|h(x^k)\|_2 = \|\nabla h(x^k)^T d(t)\|_2 \leq \|\nabla h(x^k)\|_2 \|d(t)\|_2$$

Use agora a definição de β dada em (IV.0.1) e o fato de que, $\|h(x^k)\|_2 \geq \underline{t}$, para obter:

$$\|d(t)\|_2 \geq \frac{\underline{t}^2}{\|\nabla h(x^k)^T\|_2}$$

Lema IV.1.3

Dado $t > 0$ o problema (IV.1.8) terá solução $(v(t), d(t))$ se e somente se existirem $(\mu(t), \sigma(t)) \in \mathbb{R}^{k+m}$ tais que

$$d(t) = -t \left[\sum_{j=1}^k \mu_j(t) g^j + \sum_{i=1}^m \sigma_i(t) \nabla h_i(x^k) \right] \quad (\text{IV.1.12})$$

$$v^k(t) = -t \left\| \sum_{j=1}^k \mu_j g^j + \sum_{i=1}^m \sigma_i \nabla h_i(x^k) \right\|_2^2 - \sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k + \beta \sum_{i=1}^m \sigma_i h_i(x^k) \quad (\text{IV.1.13})$$

com $\mu(t) \in \Omega(t)$, e $\mu_j(t) = 0$ se $j \in I - I(t)$, (IV.1.14.a)

onde:

$$\Omega(t) = \left\{ \mu(t) \in \mathbb{R}^k \mid \mu_j(t) \geq 0, \quad j=1,2,\dots,k, \quad \sum_{j=1}^k \mu_j(t) = 1 \right\}$$

(IV.1.14.b)

$$I(t) = \left\{ j \in I \mid -\alpha_j^k + g^{jT}d(t) = \max_I \left\{ -\alpha_j^k + g^{jT}d(t) \right\} \right\}$$

(IV.1.14.c)

Demonstração

As condições de Kuhn - Tucker para (IV.1.8) se verificarão em $(v(t), d(t))$ se existirem $(\mu(t), \sigma(t)) \in \mathbb{R}^{k+m}$, $\mu_j(t) \geq 0$, $j \in I$ tais que

$$(1, t^{-1}d(t)) + \sum_{j=1}^k \mu_j(t)(-1, g^j) + \sum_{i=1}^m \sigma_i(t)(0, \nabla h_i(x^k)) = 0$$

$$\mu_j(t)(-v(t) - \alpha_j^k + g^{jT}d(t)) = 0, \quad j \in I \quad (\text{IV.1.15})$$

de onde obtemos (IV.1.12), (IV.1.14 .a,b,c). A expressão (IV.1.13) é calculada diretamente de (IV.1.9c) como a seguir

$$\begin{aligned}
v^k &= - \sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k + \sum_{j=1}^k \mu_j g^{jT} d^k \\
&= - \sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k + \sum_{j=1}^k \mu_j g^{jT} d^k + \sum_{i=1}^m \sigma_i \left(\beta h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)^T \right) \\
&= - \sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k + \left\langle \sum_{j=1}^k \mu_j g^j + \sum_{i=1}^m \sigma_i \nabla h_i(x^k), d^k \right\rangle + \beta \sum_{i=1}^m \sigma_i h_i(x^k) \\
&= -t \left\| \sum_{j=1}^k \mu_j g^j + \sum_{i=1}^m \sigma_i \nabla h_i(x^k) \right\|_2^2 - \sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k + \beta \sum_{i=1}^m \sigma_i h_i(x^k)
\end{aligned}$$

Dado que o problema (IV.1.8) é convexo as condições de Kuhn-Tucker são necessárias e suficientes para a otimalidade de algum ponto viável $(v(t), d(t))$. Bastará então provar que (IV.1.12) e (IV.1.14), implicam as condições de Kuhn-Tucker. Provaremos primeiro que $\mu_j(-v^k - \alpha_j^k + g^{jT} d^k) = 0$, $j=1,2,\dots,k$, para isto usaremos a expressão de v^k , os fatos que $\sum_{j=1}^k \mu_j = 1$ e $\mu_j \geq 0$. Com efeito, para $j = 1,2,\dots,k$ temos que:

$$\mu_j(-v^k - \alpha_j^k + g^{jT} d^k) = \mu_j \left(\sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k - \sum_{j=1}^k \mu_j g^{jT} d^k - \alpha_j^k + g^{jT} d^k \right)$$

a que implica

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^k \mu_j(-v^k - \alpha_j^k + g^{jT} d^k) &= \sum_{j=1}^k \mu_j \left(\sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k - \sum_{j=1}^k \mu_j g^{jT} d^k - \alpha_j^k + g^{jT} d^k \right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k - \sum_{j=1}^k \mu_j g^{jT} d^k - \sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k + \sum_{j=1}^k \mu_j g^{jT} d^k \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

dado que, $\mu_j \geq 0$ e $-v^k - \alpha_j^k + g^{jT} d^j \leq 0$ para $j=1,2,\dots,k$,
então

$$\mu_j(-v^k - \alpha_j^k + g^{jT} d^j) = 0, \quad j=1,2,\dots,k$$

A outra relação é imediata. Portanto temos a equivalência. ■

Lema IV.1.4

Os multiplicadores $(\mu, \sigma) = (\mu(t), \sigma(t))$ em (IV.1.12)
e (IV.1.13) são solução do problema

$$\begin{aligned} \min_{\mu, \sigma} \frac{1}{2} \left\| \sum_{j=1}^k \mu_j g^j + \sum_{i=1}^m \sigma_i \nabla h_i(x^k) \right\|_2^2 + \frac{1}{t} \sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k - \\ - \frac{\beta}{t} \sum_{i=1}^m \sigma_i h_i(x^k) \end{aligned}$$

s. a.

$$\sum_{j=1}^k \mu_j = 1, \quad \mu_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,k$$

(IV.1.16)

Demonstração

Basta considerar o problema dual de (IV.1.8), substituindo-se as expressões ótimas $d(t)$ e $v(t)$, obtidas no lema anterior, na lagrangeana de (IV.1.8).

Lema IV.1.5

Suponha $\nabla h(x^k)$ de posto completo, então

$$\sigma = \frac{\beta}{t} \left[\nabla h(x^k)^T \nabla h(x^k) \right]^{-1} h(x^k) - \nabla h(x^k)^+ \sum_{j=1}^k \mu_j g^j \quad (\text{IV.1.17})$$

onde

$$\nabla h(x^k)^+ = \left[\nabla h(x^k)^T \nabla h(x^k) \right]^{-1} \nabla h(x^k)^T \quad (\text{IV.1.18})$$

Demonstração

Substituamos a expressão de $d(t)$ dada por (IV.1.12) nas restrições de igualdade (IV.1.7.b); obtemos:

$$-t \nabla h(x^k)^T \left[\sum_{j=1}^k \mu_j g^j + \nabla h(x^k) \sigma \right] = -\beta h(x^k)$$

de onde

$$\nabla h(x^k)^T \nabla h(x^k) \sigma = \frac{\beta}{t} h(x^k) - \nabla h(x^k)^T \sum_{j=1}^k \mu_j g^j$$

e portanto

$$\sigma = \frac{\beta}{t} \left[\nabla h(x^k)^T \nabla h(x^k) \right]^{-1} h(x^k) - \nabla h(x^k)^+ \sum_{j=1}^k \mu_j g^j$$

Corolário IV.1.6

Suponha h , ∇h , e $\left[\nabla h^T \nabla h \right]^{-1} \nabla h^T$, limitados em $\{x^k\} \forall k$, então σ é limitado, para cada $t > 0$

Corolário IV.1.7

Suponha $\nabla h(x^k)$ de posto completo; então (IV.1.18) é equivalente ao problema :

$$\begin{aligned} \min_{\mu} \frac{1}{2} & \left\| \left(I - \nabla h(x^k) \left[\nabla h(x^k)^T \nabla h(x^k) \right]^{-1} \nabla h(x^k)^T \right) \sum_{j=1}^k \mu_j g^j \right\|^2 + \\ & + \frac{\beta}{t} \left\| \nabla h(x^k) \left[\nabla h(x^k)^T \nabla h(x^k) \right]^{-1} h(x^k) \right\|_2^2 + \frac{1}{t} \sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k - \\ & - \frac{\beta}{t} \left[\nabla h(x^k)^T \nabla h(x^k) \right]^{-1} \nabla h(x^k)^T \sum_{j=1}^k \mu_j g^j \end{aligned}$$

s. a.

$$\sum_{j=1}^k \mu_j = 1, \quad \mu_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, k \quad (\text{IV.1.19})$$

Teorema IV.1.8

Sob as hipóteses do corolario (IV.1.6) a função $d : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Demonstração

Definamos:

$$W = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \beta h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)^T = 0, \quad i=1,2,\dots,m \right\}$$

(IV.1.20.a)

$$F(t,d) = \hat{f}(x^k,d) + \frac{1}{2t} \|d\|_2^2,$$

(IV.1.20.b)

onde $\hat{f}(x^k,d)$ foi definido em (IV.1.5).

Então, o problema (IV.1.8) se reescreve

$$\begin{aligned} & \min F(t,d) \\ & d \in W \end{aligned}$$

(IV.1.21)

Seja agora $t \rightarrow t^*$; devido às hipóteses e ao fato de que ∂f é limitado sobre conjuntos limitados, temos que para cada t , em uma vizinhança de t^* ($d(t)$), o conjunto das soluções de (IV.1.21), (que é não vazio), é limitado.

Podemos portanto supor que, para alguma subsequência, que notaremos da mesma forma,

$$d(t) \rightarrow d^*, \quad \text{se } t \rightarrow t^*$$

Dado que a função $F(\dots)$ é contínua e que o conjunto W é fechado, então:

$$F(t,d(t)) \rightarrow F(t^*,d^*), \quad \text{e } d^* \in W, \quad \text{se } t \rightarrow t^*.$$

Por otimalidade temos que $F(t,d(t)) \leq F(t,d(t^*))$, logo, usando a continuidade da função $F(\dots)$, temos:

$$F(t^*,d^*) \leq F(t^*,d(t^*)).$$

como o problema (IV.1.21) é convexo sendo sua função objetivo estritamente convexa para cada t , chegamos a

$$d^* = d(t^*)$$

Concluese que qualquer subsequência convergente converge para o valor da função d em t^* , portanto é contínua. ■

Da mesma forma que SCHRAMM-ZOWE (1987) consideremos todos os subconjuntos I^1, I^2, \dots, I^s , de $I = \{1, 2, \dots, k\}$, e definamos

$$T^j = \left\{ t \in (0, \infty) \mid I(t) = I^j \right\}, \quad j=1, 2, \dots, s, \quad (\text{IV.1.22})$$

onde $I(t)$ é o conjunto das restrições ativas veja (IV.1.14c)

É claro que $(0, \infty) = \bigcup_{j=1}^s T^j$.

Proposição IV.1.9

Sejam $t^1, t^2 \in T^j$ tais que $t^1 \leq t^2$, então

1) $[t^1, t^2] \subset T^j$. (T^j é convexo)

2) Se $\forall h(x^k)$ for de posto completo, então

$$d(\pi t^1 + (1-\pi)t^2) = \pi d(t^1) + (1-\pi)d(t^2), \quad \pi \in [0, 1]$$

Demonstração

A demonstração de 1) será semelhante à de SCHRAMM-ZOWE. Suponhamos que 2) se verifica, sejam

$t_\pi = \pi t^1 + (1-\pi)t^2$, e $d_\pi = \pi d^1 + (1-\pi)d^2$, $\pi \in [0,1]$
 onde $d^1 = d(t^1)$ e $d^2 = d(t^2)$ são as soluções de (IV.1.8)
 para $t = t^1$ e $t = t^2$ respectivamente. Nos temos que para to-
 do $p, q \in I^j$ e $r \in I^j$

$$g^{pT}d^i - \alpha_p^k = g^{qT}d^i - \alpha_q^k > g^{rT}d^i - \alpha_r^k, \quad i = 1,2, \quad (\text{IV.1.23})$$

A relação (IV.1.23) é também satisfeita se substituir-
 mos d^i por d_π . De fato,

$$\begin{aligned} & g^{pT}(\pi d^1 + (1-\pi)d^2) - \alpha_p^k - g^{qT}(\pi d^1 + (1-\pi)d^2) + \alpha_q^k = \\ & = \pi(g^{pT}d^1 - \alpha_p^k) - \pi(g^{pT}d^2 - \alpha_p^k) + g^{pT}d^2 - \alpha_p^k - \pi(g^{qT}d^1 - \alpha_q^k) \\ & \qquad \qquad \qquad + \pi(g^{qT}d^2 - \alpha_q^k) - (g^{qT}d^2 - \alpha_q^k) \\ & = 0 \end{aligned}$$

Para a desigualdade em (IV.1.23) deduzimos, usando o fato de
 que $p \in I^j$ e $r \in I^j$:

$$\begin{aligned} & g^{pT}(\pi d^1 + (1-\pi)d^2) - \alpha_p^k - g^{rT}(\pi d^1 + (1-\pi)d^2) + \alpha_r^k = \\ & \pi(g^{pT}d^1 - \alpha_p^k) - \pi(g^{pT}d^2 - \alpha_p^k) + g^{pT}d^2 - \alpha_p^k - \pi(g^{rT}d^1 - \alpha_r^k) + \\ & \qquad \qquad \qquad + \pi(g^{rT}d^2 - \alpha_r^k) - (g^{rT}d^2 - \alpha_r^k) \\ & = \pi \left[(g^{pT}d^1 - \alpha_p^k) - (g^{rT}d^1 - \alpha_r^k) \right] + (1-\pi) \left[(g^{pT}d^2 - \alpha_p^k) - (g^{rT}d^2 - \alpha_r^k) \right] \\ & \geq 0 \end{aligned}$$

Portanto temos 1).

Para a parte 2) temos, do lema IV.1.3

$$d(t) = -t \left[\sum_{j=1}^k \mu_j g^j + \sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla h_i(x^k) \right] = -t \left[\sum_{j=1}^k \mu_j g^j + \nabla h(x^k) \sigma \right] \quad (\text{IV.1.24})$$

Substituamos a expressão de σ obtida no lema IV.1.5

$$\begin{aligned} d(t) &= -t \left[\sum_{j=1}^k \mu_j g^j + \nabla h(x^k) \left(\frac{\beta}{t} \left[\nabla h(x^k)^T \nabla h(x^k) \right]^{-1} h(x^k) - \nabla h(x^k) + \sum_{j=1}^k \mu_j g^j \right) \right] \\ &= -t \left[\left(I - \nabla h(x^k) \nabla h(x^k)^+ \right) \sum_{j=1}^k \mu_j g^j + \frac{\beta}{t} \nabla h(x^k) \left[\nabla h(x^k)^T \nabla h(x^k) \right]^{-1} h(x^k) \right] \\ &= - \left(t A \sum_{j=1}^k \mu_j g^j + \beta C \right) \quad (\text{IV.1.25}) \end{aligned}$$

onde:

$$A = I - \nabla h(x^k) \nabla h(x^k)^+ ; \quad C = \nabla h(x^k) \left[\nabla h(x^k)^T \nabla h(x^k) \right]^{-1} h(x^k)$$

Definamos

$$\mu_{\pi} = \frac{1}{t_{\pi}} \left[\pi t_{\pi}^1 \mu_1^1 + (1-\pi) t_{\pi}^2 \mu_2^2 \right] ; \quad \text{onde } \mu^i = \mu(t^i), \quad i=1,2$$

temos que $\mu(t_{\pi}) = \mu_{\pi}$ satisfaz:

i) $\mu_j(t_{\pi}) \geq 0$, $j=1,2,\dots,k$.

$$\text{ii) } \sum_{j=1}^k \mu_j(t_\pi) = 1$$

$$\text{iii) } \mu_j(t_\pi) = 0 \iff \mu_j(t^1) = \mu_j(t^2)$$

portanto $I - I(t^1) = I - I(t^2) = I - I(t_\pi)$; dado que $I(t_\pi)$ e $I(t^i)$ $i=1,2$, são subconjuntos de I , então $I(t_\pi) = I(t^i)$.

Substituindo μ_π nas expressões de d e v (dado por (IV.1.25) e (IV.1.13) respectivamente), e usando a expressão para v obtida no lema IV.1.5, $(v(t_\pi), d(t_\pi))$ é solução do problema (IV.1.8) (veja lema IV.1.3). Além disso

$$\begin{aligned} -d(t_\pi) &= t_\pi \left[A \sum_{j=1}^k \mu_{\pi j} g^j \right] + \beta C \\ &= t_\pi A \frac{t^1}{t_\pi} \pi \sum_{j=1}^k \mu_j^1 g^j + t_\pi A \frac{t^2}{t_\pi} (1-\pi) \sum_{j=1}^k \mu_j^2 g^j + \beta C \end{aligned}$$

ou ainda:

$$-d(t_\pi) = \pi \left[t^1 A \sum_{j=1}^k \mu_j^1 g^j + \beta C \right] + (1-\pi) \left[t^2 A \sum_{j=1}^k \mu_j^2 g^j + \beta C \right]$$

$$\text{e portanto } d(t_\pi) = \pi d(t^1) + (1-\pi) d(t^2) \quad \blacksquare$$

Obsevação IV.1.10

Sem perda da generalidade podemos supor que no problema (IV.1.8) $h_i(x^k) \geq 0$ para $i=1,2,\dots,m$, já que se para algum i_0 , $1 \leq i_0 \leq m$ tivéssemos $h_{i_0}(x^k) < 0$, então mul-

tiplicando a i_0 -ésima equação de (IV.1.8) por (-1) o problema fica definido da seguinte maneira :

$$\begin{aligned} \min_{v, d} v &+ \frac{1}{2t} \|d\|_2^2 \\ \text{s. a.} \\ \alpha_j^k + g^{jT} d &\leq v && j=1,2,\dots,k \\ \beta \tilde{h}_i(x^k) + \tilde{\nabla} h_i(x^k)^T d &= 0 && i=1,2,\dots,m \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{\nabla} h_i(x^k) = \begin{cases} \nabla h_i(x^k) & \text{se } i \neq i_0 \\ -\nabla h_i(x^k) & \text{se } i = i_0 \end{cases}$$

$$\tilde{h}_i(x^k) = \begin{cases} h_i(x^k) & \text{se } i \neq i_0 \\ -h_i(x^k) & \text{se } i = i_0 \end{cases}$$

O próximo teorema, em conjunto com o lema (IV.1.2), teorema (IV.1.8) e proposição (IV.1.9) justificarão o nosso control indireto do raio por meio do parâmetro t .

Teorema IV.1.11

A função $\|d(\cdot)\|_2 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é monotonamente crescente

Demonstração

Utilizaremos a formulação (IV.1.21) do subproblema de determinação de direção $d(t)$

Sejam $0 < t^1 < t^2$ e $d^1 = d(t^1)$, $d^2 = d(t^2)$ tais que

$$d(t^i) = \operatorname{argmin} \left\{ F(t^i, d) \mid d \in W \right\}, \quad i=1,2.$$

Como β depende apenas do ponto x^k , um argumento de otimalidade leva a :

$$F(t^1, d^2) > F(t^1, d^1), \quad \text{e} \quad F(t^2, d^1) > F(t^2, d^2) \quad (\text{IV.1.26})$$

somemos membro a membro estas desigualdades, substituindo as expressão de F (veja IV.1.20.b):

$$\begin{aligned} \hat{f}(x^k, d^2) + \frac{1}{2t^1} \|d^2\|_2^2 + \hat{f}(x^k, d^1) + \frac{1}{2t^2} \|d^1\|_2^2 > \\ \hat{f}(x^k, d^1) + \frac{1}{2t^1} \|d^1\|_2^2 + \hat{f}(x^k, d^2) + \frac{1}{2t^2} \|d^2\|_2^2 \end{aligned}$$

que se simplifica em :

$$\frac{1}{2t^1} \left(\|d^2\|_2^2 - \|d^1\|_2^2 \right) - \frac{1}{2t^2} \left(\|d^2\|_2^2 - \|d^1\|_2^2 \right) > 0$$

ou ainda

$$\left(\frac{1}{2t^1} - \frac{1}{2t^2} \right) \left(\|d^2\|_2^2 - \|d^1\|_2^2 \right) > 0 \quad (\text{IV.1.27})$$

Como $t^1 < t^2$, concluímos que

$$\|d^1\|_2^2 < \|d^2\|_2^2$$

Portanto $\|d(\cdot)\|_2$ é monotonamente crescente.

Para $t^k > 0$ dado seja $(v^k, d^k) = (v(t^k), d(t^k))$ a solução do problema (IV.1.8) e $(\mu^k, \sigma^k) = (\mu(t^k), \sigma(t^k))$ o respectivo vetor de Kuhn-Tucker.

A função lagrangeana associada é

$$L(v, d, \mu, \sigma) = v + \frac{1}{2t^k} \|d\|_2^2 + \sum_{j=1}^k \mu_j \left[-\alpha_j^k + g^j \text{T} d - v \right] + \\ + \sum_{i=1}^m \sigma_i \left[\beta h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k) \text{T} d \right]$$

que tem $(v^k, d^k, \mu^k, \sigma^k)$ como ponto sela.

Retornemos ao problema inicial (P) ao qual associamos a função penalidade exata ϕ definida em (IV.0.2).

Ao problema (IV.1.8) associaremos analogamente a função penalidade

$$\hat{\phi}(d, c) = \hat{f}(x^k, d) + \frac{1}{2t} \|d\|_2^2 + c \sum_{i=1}^m |\beta h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k) \text{T} d| \quad (\text{IV.1.28})$$

Temos a seguinte proposição, semelhante a KIWIEL(1987):

Proposição IV.1.13

Para $t = t^k$ dado, seja $(v^k, d^k, \mu^k, \sigma^k)$ um ponto de Kuhn-Tucker do problema (IV.1.8). Então o d^k é solução de

$$\min_d \hat{\phi}(d, c) \quad \forall c \geq \tilde{c}^k = \sum_{i=1}^m |\sigma_i^k| \quad (\text{IV.1.29})$$

Demonstração

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(d^k, c) &= \hat{f}(x^k, d^k) + \frac{1}{2t} \|d^k\|_2^2 \\ &= v^k + \frac{1}{2t} \|d^k\|_2^2 + \sum_{j=1}^k \mu_j^k \left(-\alpha_j^k + g^{jT} d^k - v^k \right) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \sigma_i^k \left(\beta h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)^T d^k \right) \end{aligned}$$

Da propriedade de ponto sela obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(d^k, c) &\leq v + \frac{1}{2t} \|d\|_2^2 + \sum_j \mu_j^k \left(-\alpha_j^k + g^{jT} d - v \right) + \\ &\quad + \|d^k\|_\infty \sum_{i=1}^m |\beta h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)^T d| \\ &\leq v + \frac{1}{2t} \|d\|_2^2 + \sum_j \mu_j^k \left(-\alpha_j^k + g^{jT} d - v \right) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^m |\sigma_i^k| \sum_{i=1}^m |\beta h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)^T d| \end{aligned}$$

Lembremos que $\sum_{j=1}^k \mu_j^k = 1$ e definição de $\hat{f}(x^k, d)$ (IV.1.5) e da

hipótese sobre c para concluir que

$$\hat{\phi}(d^k, c) \leq \hat{f}(x^k, d) + \frac{1}{2t^k} \|d\|_2^2 + c \sum_{i=1}^m |\beta h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)^T d|$$

e portanto $\hat{\phi}(d^k, c) \leq \hat{\phi}(d, c)$, $\forall d \in \mathbb{R}^n$, $\forall c \geq \tilde{c}^k$ ■

Das expressões de $d(t)$ e $v(t)$ (IV.1.12) e (IV.1.13) deduz-se a relação

$$\begin{aligned} v(t^k) &= -t^k \left\| \sum_{j=1}^k \mu_j g^j + \sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla h_i(x^k) \right\|_2^2 - \sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k + \beta \sum_{i=1}^m \alpha_i h_i(x^k) \\ &\leq -\frac{1}{t^k} \|d^k\|_2^2 - \sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k + \beta \tilde{c}^k \sum_{i=1}^m |h_i(x^k)| \end{aligned}$$

que se reescreve, tendo em vista que $0 < \beta \leq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^k} \|d^k\|_2^2 + \sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k &\leq -v^k + c \sum_{i=1}^m |h_i(x^k)|, \quad \forall c \geq \tilde{c}^k \\ &\leq |v^k| + c \sum_{i=1}^m |h_i(x^k)|, \quad \forall c \geq \tilde{c}^k \end{aligned} \tag{IV.1.30}$$

Logo, se $|v^k| + c \sum_{i=1}^m |h_i(x^k)| < \varepsilon$, (IV.1.31)

então $\sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k < \varepsilon$, e $\|d^k\|_2^2 < \varepsilon$

A propriedade a seguir apresentada relaciona, para o caso de restrições afins, as convergências em d^k e em $f(x^k)$.

Proposição IV.1.14

Suponha que são satisfeitas as condições (IV.1.31) e que $h_i(x) = A_i^T x - b_i$, $i=1,2,\dots,m$.

É válida então a estrutura a seguir:

$$f(x) + c \sum_{i=1}^m |h_i(x)| \geq f(x^k) - \frac{1}{t} \sqrt{\varepsilon} \|x - x^k\|_2 - \varepsilon \left(2 - \frac{1}{c} \right) \quad (\text{IV.1.32})$$

Demonstração

Obteremos inicialmente a condição de otimalidade para o subproblema de cálculo de direção.

$$\text{De (IV.1.12)} \quad -d = -d(t) = t \sum_{j=1}^k \mu_j g^j + t \sum_{i=1}^m \sigma_i A_i,$$

onde $g^j \in \partial f(y^j)$, $j=1,2,\dots,k$,

Por outro lado, a propriedade III.3.2 e (IV.1.3) garantem que $g^j \in \partial_{\alpha_j^k} f(x^k)$, $j=1,2,\dots,k$. Desta relação e do fato de que $\sum_{j=1}^k \mu_j = 1$, $\mu_j \geq 0$, $j=1,2,\dots,k$, obtemos que (veja propriedade III.3.1)

$$t \sum_{j=1}^k \mu_j g^j \in \partial_{t \sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k} (tf)(x^k) \quad (\text{IV.1.33})$$

Por outro lado, como as funções h_i , ($i=1,2,\dots,m$) são afins, então

$$\partial(t\sigma_i h_i)(x^k) = \partial_{t\sigma_i h_i(x^k)} (t\sigma_i h_i)(x^k) = \langle t\sigma_i A_i \rangle, \quad i=1,2,\dots,m \quad (\text{IV.1.34})$$

Usando (IV.1.33), (IV.1.34), e a propriedade III.3.1, chegamos enfim à condição de otimalidade:

$$-d \in \partial_{t \left(\sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k + \sum_{i=1}^m h_i(x^k) \right)} \left(t \left[f + \sum_{i=1}^m \sigma_i h_i \right] \right) (x^k) \quad (\text{IV.1.35})$$

que é equivalente a

$$f(x) + \sum_{i=1}^m \alpha_i h_i(x) \geq f(x^k) + \sum_{i=1}^m \alpha_i h_i(x^k) + \frac{1}{t} \langle -d, x - x^k \rangle - \left[\sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j^k + \sum_{i=1}^m h_i(x^k) \right] \quad (\text{IV.1.36})$$

Usaremos agora as hipóteses (IV.1.31), e a desigualdade de Cauchy-Schwartz:

$$\begin{aligned} f(x) + \sum_{i=1}^m \alpha_i h_i(x) &\geq f(x^k) - \|\sigma\|_{\infty} \sum_{i=1}^m h_i(x^k) - \frac{1}{t} \|d\|_2 \|x - x^k\|_2 - \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon}{c} \right) \\ &\geq f(x^k) - \varepsilon - \frac{1}{t} \sqrt{\varepsilon} \|x - x^k\|_2 - \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon}{c} \right) \\ &\geq f(x^k) - \frac{1}{t} \sqrt{\varepsilon} \|x - x^k\|_2 - \varepsilon \left(2 + \frac{1}{c} \right) \end{aligned}$$

e portanto (IV.1.32) se verifica ■

Corolário IV.1.15

Se em (IV.1.31) $\varepsilon = 0$, então

$$f(x) \geq f(x^k), \quad \forall x \text{ tal que } h_i(x) = 0, \quad i=1,2,\dots,m.$$

IV. 2. ALGORITMO

INTRODUÇÃO

Neste capítulo descreveremos dois algoritmos, um algoritmo interno, que substituirá à busca linear e outro que gerará as duas seqüências $\langle x^k \rangle$, e $\langle y^k \rangle$.

Definamos a seguinte aproximação da função de penalidade ϕ do problema (P), dada em (IV.08) (veja também (IV.1.4))

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(x^k + d, c^k) = & \hat{f}(x^k, d) + \frac{1}{2t} \|d\|_2^2 + f(x^k) + \\ & + c^k \sum_{i=1}^m |\beta h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k) d| \end{aligned} \quad (\text{IV.2.1})$$

Nela, o termo em $\|d\|_2^2$ poderia ser visto como uma regularização, ligada através do coeficiente $\frac{1}{t}$ ao parâmetro "de proximidade" β da aproximação linear da restrição.

(lembramos que $d = d(t)$). A redução real observada será então definida por:

$$w^k = w^k(t) = \bar{\phi}(x^k + d^k(t), c^k) - \phi(x^k, c^k) \quad (\text{IV.2.2})$$

Lema IV.2.1

$$1) \quad w^k = \tilde{v}^k - c^k \sum_{i=1}^m h_i(x^k), \quad \text{onde } \tilde{v}^k = v^k + \frac{1}{2t} \|d\|_2^2$$

$$2) \quad w^k \leq \tilde{v}^k$$

$$3) \quad w^k \leq 0$$

Demonstração

1) Como d^k é viável nas restrições deslocadas e $h_i(x^k) \geq 0$

$$w^k = \hat{f}(x^k, d^k) + \frac{1}{2t} \|d^k\|_2^2 + f(x^k) - f(x^k) - c^k \sum_{i=1}^m h_i(x^k)$$

portanto $w^k = \tilde{v}^k - c^k \sum_{i=1}^m h_i(x^k)$

2) Direto de 1)

3) Consequência de (IV.1.33) (use a não negatividade dos erros de linearização) ■

A seguir apresentaremos o algoritmo que nós permitirá variar t até que, um passo sério ou passo nulo seja conseguido. Neste algoritmo, interno, o super índice k correspondente à k ésima iteração permanecerá fixo.

ALGORITMO (INTERNO) IV.2.2

PASSO 0

Sejam \underline{t} , \bar{t} (pequenos) e M constantes dadas tais que $0 < \underline{t} \leq \bar{t}$, $0 < M < 1$, e sejam ϑ , ξ reais (pequenos) positivos, $j=1$

PASSO 1

Escolha $t_1 = t_1^k \in [\underline{t}, \bar{t}]$ (a eleição de t_j para t_{j+1} será feita da mesma forma que SCHRAMM-ZOWE (1987) através da bissecção). Diagrama 1

PASSO 2

Compute $d_j^k = d(t_j^k)$, $v_j = v(t_j^k)$, solução do problema

$$\begin{aligned} & \min_{v, d} v + \frac{1}{2t_j} \|d\|_2^2 \\ & \text{s. a} \\ & -\alpha_s^k + g^{sT} d \leq v \quad s=1, 2, \dots, k \\ & \beta^k h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)^T d = 0 \quad i=1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{IV.2.3})$$

e calcule os multiplicadores associados $(\mu_i(t_j^k), \sigma_i(t_j^k))$;

$$w_j^k = \tilde{v}_j^k - c_j^k \sum_{i=1}^m h_i(x^k) \quad (\text{IV.2.4})$$

$$c_j^k = \begin{cases} c^{k-1} & \text{se } \tilde{c}_j^k \leq c^{k-1} \\ \text{máx} \left\{ \tilde{c}_j^k, 2c^{k-1} \right\} & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{IV.2.5})$$

$$\text{onde } \tilde{c}_j^k = \sum_{i=1}^m |\sigma_i^k(t_j^k)|$$

ponha $y_j^{k+1} = x^k + d_j^k$, compute $g_j^{k+1} \in \partial f(y_j^{k+1})$, e

$$\tilde{w}_j^k = \tilde{v}_j^k - c_j^k \sum_{i=1}^m h_i(y_j^{k+1}) \quad (\text{IV.2.6})$$

PASSO 3

a) PASSO SÉRIO SE

$$1) \phi(y_j^{k+1}, c_j^k) - \phi(x^k, c_j^k) \leq M w_j^k \quad (\text{IV.2.7.a})$$

$$2) g_j^{(k+1)T} d_j^k \geq \tilde{w}_j^k, \text{ ou } \bar{t} - t_j^k \leq \vartheta \quad (\text{IV.2.7.b})$$

Neste caso, faça:

$$x^{k+1} := y_j^{k+1}; y_j^{k+1} := y_j^{k+1}; g^{k+1} := g_j^{k+1} \text{ e PARE.}$$

b) PASSO NULO SE

$$1) \phi(y_j^{k+1}, c_j^k) - \phi(x^k, c_j^k) > M w_j^k \quad (\text{IV.2.8.a})$$

$$2) f(x^k) - f(y_j^{k+1}) + g_j^{(k+1)T} d_j^k \leq \xi, \text{ ou } t_j^{k+1} - \underline{t} \leq \vartheta \quad (\text{IV.2.8.b})$$

Neste caso, faça:

$$x^{k+1} := x^k; y_j^{k+1} := y_j^{k+1}; g^{k+1} := g_j^{k+1} \text{ e PARE.}$$

3) Se no passo 3 ,a), e b) não forem satisfeitos então escolhemos um melhor t_{j+1}^k , (como no diagrama 1) e vá ao passo 1.

Observemos que se ocorrer um passo sério, e que se para algum i , $h_i(x^k) \neq h_i(x^{k+1})$, então a direção dada pelo problema

$$\begin{aligned} & \min_{v, d} v + \frac{1}{2t_j^{k+1}} \|d\|_2^2 \\ & \text{s. a} \end{aligned}$$

$$-\alpha_s^{k+1} + g^{sT} d \leq v \quad s=1, 2, \dots, k+1$$

$$\beta^{k+1} h_i(x^{k+1}) + \nabla h_i(x^{k+1})^T d = 0 \quad i=1, 2, \dots, m$$

será em princípio diferente da direção dada pelo passo 2 do algoritmo IV.2.2, devido a que os sistemas de equações dados pelas restrições de igualdades são diferentes.

Por outro lado temos que se x^{k+1} for viável, isto é,

$$h_i(x^{k+1}) = 0 \quad i=1, 2, \dots, m, \text{ então } \tilde{w}_j^k = \tilde{v}_j^k, \text{ e}$$

$$-\alpha_{k+1}^{k+1} + g_j^{(k+1)T} d^k \geq \tilde{v}_j^k \geq \tilde{v}_j^k, \text{ devido a que } \alpha_{k+1}^{k+1} = 0$$

Observemos que:

$$i) \bar{t} - t_j^k \leq \vartheta \iff \bar{t} \leq t_j^k + \vartheta$$

implica que t_j^k não deve ser muito grande (e assim evitar ter muitos passos nulos).

$$ii) t_j^k - \underline{t} \leq \vartheta \iff t_j^k \leq \underline{t} + \vartheta$$

implica que t_j^k não deve ser muito pequeno (e assim evitar ter muitos passos sérios com um pequeno deslocamento).

$$iii) \text{ a relação } \phi(y_j^{k+1}, c_j^k) - \phi(x^k, c_j^k) \leq M w_j^k$$

diz que y_j^{k+1} produz um decréscimo razoável na função mérito ϕ , o que se traduz num possível decréscimo na função f e numa aproximação para a região viável do problema (P).

O diagrama seguinte mostrará como fazer a escolha de t_j^k via a bisseção partendo de um $t_1^k \in [\underline{t}, \bar{t}]$

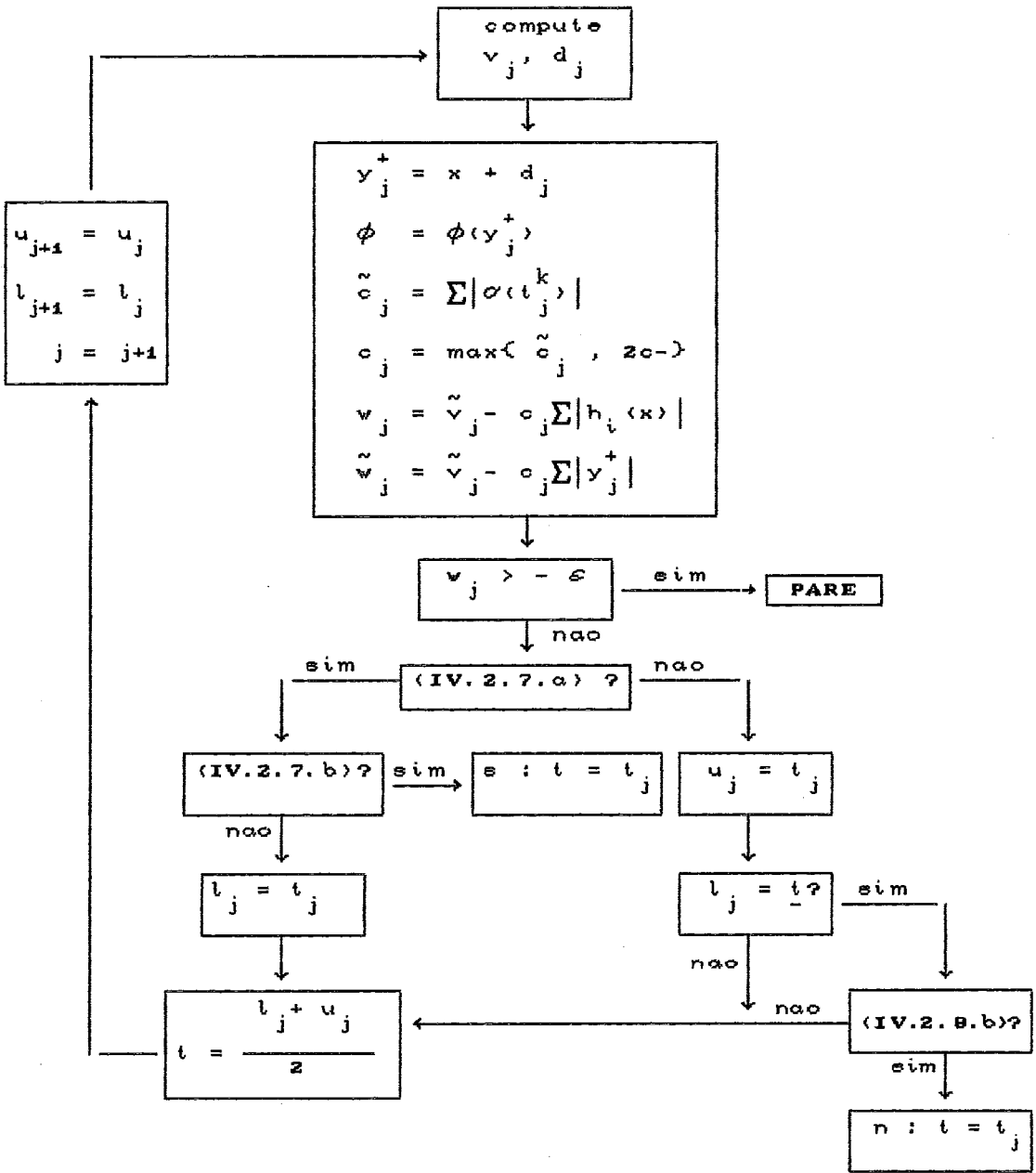


DIAGRAMA 1

$y_j^+ = y_j^{k+1}$; $c^- = c^{k-1}$; $l_1 = \underline{t}$; $u_1 = \bar{t}$; $j=1$; $\epsilon > 0$

t_1 dado, s: passo serio; n: passo nulo.

Teorema IV.2.3 (generalização do teorema de SCHRAMM-ZOWE)

A iteração no diagrama 1 conduz, num número finito de passos , ou a um passo sério ou a um passo nulo , ou para com a informação de que x^k é uma solução aproximada.

Demonstração

Suponhamos, por absurdo, que o algoritmo não termine e consideremos os três casos seguintes:

- 1) $l_j = \underline{t}$, para todo j
- 2) $u_j = \bar{t}$, para todo j
- 3) não acontece 1) nem 2)

Suponhamos que se dê 1). Neste caso se terá, se (IV2.8.b) não for verificado

$$t_{j+1} = \frac{\underline{t} + u_j}{2} = \frac{\underline{t} + t_j}{2} \quad \forall j, \text{ e então } t_j \geq \underline{t}, \text{ e}$$

$$\phi(y_j^{k+1}, c_j^k) - \phi(x^k, c_j^k) > M w_j^k \quad \forall j$$

Assim, para j suficientemente grande (IV.2.8.b) se satisfaz através de $t_j^{k+1} - \underline{t} \leq \vartheta$ e o algoritmo termina em um passo nulo.

Suponha agora a hipóteses 2). Então permaneceremos do lado esquerdo do diagrama, caso contrario $u_j = t_j^k < \bar{t}$.

Teremos, se (IV.2.7.b) não se realizar,

$$t_{j+1} = \frac{l_j + \bar{t}}{2} = \frac{t_j + \bar{t}}{2} \quad \forall j, \text{ e então } t_j \nearrow \underline{t}, \text{ e}$$

$$\phi(y_j^{k+1}, c_j^k) - \phi(x^k, c_j^k) \leq M w_j^k \quad \forall j,$$

Portanto para j suficientemente grande (IV.2.7.b) se satisfaz o algoritmo termina em um passo sério.

Suponhamos finalmente o caso 3), então existirão infinitos j para os quais $l_j \neq \underline{t}$ e $u_j \neq \bar{t}$. Do diagrama 1, temos (para estes j) $\underline{t} < l_j < u_j < \bar{t}$, portanto para j suficientemente grande $l_j \rightarrow t^*$ e $u_j \rightarrow t^*$ para algum $t^* \in (\underline{t}, \bar{t})$. Pelo teorema (IV.1.8) $d(\cdot)$ é contínua, que justamente com a expressão de $d(t)$ (IV.1.25) e de σ (lema (IV.1.5)) permitem concluir que $\sigma(\cdot)$ é contínua. Consequentemente,

$\tilde{c}^k(\cdot) = \sum_{i=1}^m |\sigma_i^k(\cdot)|$, é uma função contínua em t . Assim podemos definir

$$\lim_{t \rightarrow t^*} c^k(t) = c_*^k = \begin{cases} c^{k-1} & \text{se } \tilde{c}^k(t) \leq c^{k-1} \quad \forall t \\ \max \{c_*^k, 2c^{k-1}\} & \text{senão} \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow t^*} w^k(t) = w_*^k = \tilde{v}_*^k - c_*^k \sum_{i=1}^m |h_i(x^k)| \quad (\text{IV.2.9})$$

Temos agora que o teorema (IV.1.8) e as relações (IV.2.7.a), (IV.2.8.a), e (IV.2.9) implicam em

$$\phi(x^k + d_*^k, c_*^k) - \phi(x^k, c_*^k) = M w_*^k \quad (\text{IV.2.10})$$

Sejam $\{g_{j(i)}\}$, $i=1,2,\dots$, respectivamente $\{d_{j(i)}\}$,

$\{w_{j(i)}\}$, $\{\tilde{w}_{j(i)}\}$, as seqüências possivelmente finitas para as quais $t_{j(i)} = 1_{j(i)}$. Como $1_j \rightarrow t^*$, e $\{g_{j(i)}\}$ possui no mínimo um ponto de acumulação g_* , a semicontinuidade superior de $\partial f(\cdot)$ (propriedade III.1.1) nós leva a seguinte inclusão:

$$g_* \in \partial f(x^k + d_*)$$

$$\text{isto é } f(x^k) \geq f(x^k + d_*) - g_*^T d_* \quad (\text{IV.2.11})$$

De (IV.2.10), e dos fatos de que $w_*^k \leq 0$ (lema IV.2.1), e $M < 1$ (passo 0 do algoritmo) temos :

$$f(x^k + d_*) - f(x^k) + c_*^k \sum_{i=1}^m |h_i(x^k + d_*)| - c_*^k \sum_{i=1}^m |h_i(x^k)| > w_*^k \quad (\text{IV.2.12})$$

Das relações (IV.2.11), (IV.2.12), e da definição de w_*^k chega-se à desigualdade :

$$g_*^T d_* \geq \tilde{w}_*^k$$

Portanto, para i suficientemente grande

$$g_{j(i)}^T d_{j(i)} \geq \tilde{w}_{j(i)}^k,$$

e o algoritmo termina com um passo sério. ■

Obs: Este teorema é válido para qualquer restrição que possa ter aproximação na forma linear, por exemplo, $h_i \in C^2$

A seguir apresentaremos o algoritmo geral

ALGORITMO (GERAL) IV.2.4

PASSO 0 (inicialização)

Escolha constantes \underline{t} , \bar{t} , M , ϑ , ξ tais que $0 < \underline{t} < \bar{t}$, $M \in (0,1)$, $\vartheta, \xi \in \mathbb{R}^+$ (pequenos), uma tolerância $\varepsilon \geq 0$, $q \in \mathbb{N}$ número máximo de passos nulos consecutivos, e um ponto x^1 com $h_i(x^1)$. Faça $x^1 = y^1$, determine $g^1 \in \partial f(y^1)$. Ponha $c^0 = 0$, $\alpha_1^1 = 0$ e os contadores, $k = 1$, $l = 0$
 $k(0) = 1$.

PASSO 1

a) Se $\|h(x^k)\|_2 \geq 1$, faça

$$\beta = \frac{\underline{t}}{\|h(x^k)\|_2} \text{ e vá ao passo 2)}$$

b) Se $\underline{t} < \|h(x^k)\|_2 \leq 1$, faça $\beta = \underline{t}$ e vá ao passo 2)

c) Se $\|h(x^k)\|_2 \leq \underline{t}$, faça $\beta = 1$ e vá ao passo 2)

PASSO 2

Compute x^{k+1} , y^{k+1} , g^{k+1} como no ALGORITMO INTERNO.

PASSO 3 (atualização do parâmetro de penalidade)

$$c^k = \begin{cases} c^{k-1} & \text{se } \tilde{c}_j^k \leq c^{k-1} \\ \text{máx} \left\{ \tilde{c}_j^k, 2c^{k-1} \right\} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{onde } \tilde{c}_j^k = \sum_{t=1}^m |o_i^k(t_j)|$$

PASSO 4 (criterio de parada)

$$\text{Calcule } w_j^k = \tilde{v}_j^k - c_j^k \sum_{t=1}^m h_t(x^k); \text{ se } w_j^k \geq -\varepsilon \text{ termine.}$$

PASSO 5

Compute

$$\alpha_s^{k+1} = f(x^{k+1}) - f_s(x^{k+1}) \quad s=1,2,\dots,k+1.$$

$$\tilde{w}_j^k = \tilde{v}_j^k - c_j^k \sum_{t=1}^m |h_t(y_j^{k+1})|$$

Faça $k := k + 1$. Se $x^{k+1} \neq x^k$ ponha $k(l+1) = k + 1$,

$l := l + 1$ e vá ao passo 1

Caso contrario:

Se $k+1-l < q$ vá ao passo 1.

Se $k+1-l \geq q$ faça $\beta^{k+1} = 1$

e vá ao passo 2.

Lema IV.2.5

A solução d^k do subproblema quadrático passo 2) do algoritmo IV.2.4, verifica a seguinte condição de ε -otimalidade:

$$p_j^k = -d_j^k \in \partial_{\varepsilon_j^k} \left\{ t_j^k f + t_j^k c_j^k \sum_{i=1}^m h_i \right\} (x^k) \quad (\text{IV.2.12.a})$$

onde

$$\varepsilon_j^k = t_j^k \left[\sum_{l=1}^k \mu_l(t_j^k) \alpha_l^k + c_j^k \sum_{i=1}^m h_i(x^k) - \sum_{i=1}^m \sigma_i(t_j^k) h_i(x^k) \right] \quad (\text{IV.2.12.b})$$

Demonstração

Primeiro provaremos que $\varepsilon_j^k \geq 0$. Com efeito a propriedade $\sum_{j=1}^k \mu_j = 1$ (IV.1.9), a positividade dos $\mu_j \geq 0$ e dos erros de linearização levam a

$$t_j^k \sum_{l=1}^k \mu_l(t_j^k) \alpha_l^k \geq 0$$

Da definição de c_j^k no passo 4 é evidente que:

$c_j^k \geq \sigma_i(t_j^k)$, para $i=1,2,\dots,m$. Temo agora :

$$t_j^k \left[c_j^k \sum_{i=1}^m h_i(x^k) - \sum_{i=1}^m \sigma_i(t_j^k) h_i(x^k) \right] = t_j^k \left[\sum_{i=1}^m (c_j^k - \sigma_i(t_j^k)) h_i(x^k) \right] \geq 0$$

que junto à desigualdade anteriormente obtida, prova a positividade de ε_j^k .

Recordemos a expressão de d (IV.1.12):

$$p_j^k = -d(t_j^k) = t_j^k \left[\sum_{l=1}^k \mu_l(t_j^k) g^l + \sum_{i=1}^m \alpha_i(t_j^k) \nabla h_i \right] (x^k)$$

Das relações (IV.1.33) e (IV.1.34)

$$p_j^k \in \partial_{t_j^k \left(\sum_{l=1}^k \mu_l(t_j^k) \alpha_l^k \right)} \left\{ t_j^k \left[f + \sum_{i=1}^m \alpha_i(t_j^k) h_i \right] \right\} (x^k)$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} t_j^k f(x) + t_j^k \sum_{i=1}^m \alpha_i(t_j^k) h_i(x) &\geq t_j^k f(x^k) + t_j^k \sum_{i=1}^m \alpha_i(t_j^k) h_i(x^k) + \\ &+ \langle p_j^k, x - x^k \rangle - t_j^k \sum_{j=1}^k \mu_j(t_j^k) \alpha_j^k \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} t_j^k f(x) + t_j^k c_j^k \sum_{i=1}^m h_i(x) &\geq t_j^k f(x^k) + t_j^k c_j^k \sum_{i=1}^m h_i(x^k) + \langle p_j^k, x - x^k \rangle - \\ &- t_j^k \left(\sum_{l=1}^k \mu_l(t_j^k) \alpha_l^k + c_j^k \sum_{i=1}^m h_i(x^k) - \sum_{i=1}^m \alpha_i(t_j^k) h_i(x^k) \right) \end{aligned}$$

logo

$$p_j^k = -d_j^k \in \partial_{\varepsilon_j^k} \left\{ t_j^k f + t_j^k c_j^k \sum_{i=1}^m h_i \right\} (x^k)$$

Lema IV.2.6

w_j^k no passo 5) do algoritmo (IV.2.4) é dado por

$$w_j^k = - \left[\frac{1}{2t_j^k} \|d_j^k\|_2^2 + \sum_{l=1}^k \mu_l(t_j^k) \alpha_l^k + c_j^k \sum_{i=1}^m h_i(x^k) - \beta \sum_{i=1}^m \alpha_i(t_j^k) h_i(x^k) \right] \quad (\text{IV.2.14})$$

Demonstração

Das expressões de d e v ((IV.1.12), (IV.1.16)) e do lema IV.2.1.-1 temos, sucessivamente:

$$w^k = \tilde{v}^k - c^k \sum_{i=1}^m h_i(x^k)$$

$$w_j^k = -t_j^k \left\| \sum_{l=1}^k \mu_l(t_j^k) g^l + \sum_{i=1}^m \alpha_i(t_j^k) \nabla h_i(x^k) \right\|_2^2 - \sum_{l=1}^k \mu_l(t_j^k) \alpha_l^k +$$

$$+ \beta \sum_{i=1}^m \alpha_i(t_j^k) h_i(x^k) + \frac{1}{2t_j^k} \|d\|_2^2 - c^k \sum_{i=1}^m h_i(x^k)$$

$$= - \left[\frac{1}{2t_j^k} \|d_j^k\|_2^2 + \sum_{l=1}^k \mu_l(t_j^k) \alpha_l^k + c_j^k \sum_{i=1}^m h_i(x^k) - \beta \sum_{i=1}^m \alpha_i(t_j^k) h_i(x^k) \right]$$

Lema IV.2.7

A sequência $\{c^k\}$ de parâmetros de penalidade gerada pelo passo 3) do algoritmo (IV.2.4) é não decrescente, e para k suficientemente grande ela é constante.

Demonstração

Por construção temos $c^k = c^{k-1}$, ou $c^k \geq 2c^{k-1}$.

Isto significa $c^k \geq c^{k-1}$, que é a primeira parte do lema.

Por outro lado o conjunto $\langle c^k \rangle$ é limitado porque \tilde{c}_j^k o é. Este a sua vez satisfaz esta mesma propriedade devido a sua definição dada no passo 3), dependente de σ_j^k , que é limitado (ver corolário IV.1.6.).

Suponhamos agora que

$$c^k = \left\{ \tilde{c}^k, 2c^{k-1} \right\}$$

acontecesse um número infinito de vezes, isto é

$$c^{k(l)} = \max \left\{ \tilde{c}^{k(l)}, 2c^{k(l)-1} \right\}, \quad l=1,2,\dots,$$

Neste caso $c^{k(l)} \geq 2c^{k(l-1)} > 2^{l-1} c^{k(1)}$, $l=1,2,\dots$,

Assim $\langle c^{k(l)} \rangle$ não é limitado, o que é uma contradição. ■

IV.3. A CONVERGENCIA

As demonstrações a seguir serão adaptações das feitas por KIWIEL (1985), para a convergência de algoritmos com busca linear, as quais são a sua vez adaptações das demonstrações de WOLFE (1975) e MIFFLIN (1977-1979).

Lema IV.3.1

Seja $\{x^k\}$ a sequência gerada pelo algoritmo, e suponha que :

- 1) Existe \hat{x} tal que para todo k

$$f(\hat{x}) + c^k \sum_{i=1}^m |h_i(\hat{x})| \leq f(x^k) + c^k \sum_{i=1}^m |h_i(x^k)|,$$

- 2) $\nabla h(x^k)$ tem posto completo.

- 3) As hipóteses do corolário (IV.1.6) são satisfeitas.

Então

$$1) \quad \|\hat{x} - x^k\|_2^2 \leq \|\hat{x} - x^n\|_2^2 + \sum_{i=n}^k \left(\|x^{i+1} - x^i\|_2^2 + 2\varepsilon^i \right) \quad \forall k \geq n \geq 1 \quad (\text{IV.3.1})$$

$$2) \quad \sum_{i=n}^{\infty} \left(\|x^{i+1} - x^i\|_2^2 + 2\varepsilon^i \right) \longrightarrow 0 \quad \text{se } n \longrightarrow \infty \quad (\text{IV.3.2})$$

- 3) Existe \bar{x} tal que $x^k \longrightarrow \bar{x}$ se $k \longrightarrow \infty$, e \bar{x} é um ponto

viável, isto é, $h_i(\bar{x}) = 0$, $i=1, \dots, m$.

Demonstração

Pelo lema (IV.2.7) $c^k = c$ para k suficientemente grande nas relações

$$\phi(y^{k+1}, c^k) - \phi(x^k, c^k) \leq Mw^k \quad (\text{IV.3.3})$$

(passo sério)

$$p^k = -d^k \in \partial_{\varepsilon^k} \left\{ t^k f + t^k c^k \sum_{i=1}^m h_i \right\} (x^k) \quad (\text{IV.3.4})$$

(lema IV.2.5)

onde

$$\varepsilon^k = t^k \left[\sum_{l=1}^k \mu_l(t^k) \alpha_l^k + c^k \sum_{i=1}^m h_i(x^k) - \sum_{i=1}^m \sigma_i(t^k) h_i(x^k) \right] \quad (\text{IV.3.5})$$

A relação (IV.3.4) implica

$$t^k f(x) + t^k c^k \sum_{i=1}^m |h_i(x)| \geq t^k f(x^k) + t^k c^k \sum_{i=1}^m |h_i(x^k)| + \langle p^k, x - x^k \rangle - \varepsilon^k, \quad \forall x.$$

Esta desigualdade para $x = \hat{x}$, junto à hipótese 1, estabelece que:

$$0 \geq t^k f(\hat{x}) + t^k c^k \sum_{i=1}^m |h_i(\hat{x})| - t^k f(x^k) - t^k c^k \sum_{i=1}^m |h_i(x^k)| \geq$$

$$\langle p^k, \hat{x} - x^k \rangle - \varepsilon^k$$

e, conseqüentemente $\langle p^k, \hat{x} - x^k \rangle \leq \varepsilon^k$

(IV.3.6)

Substituamos $p^k = -d^k = -(x^{k+1} - x^k)$:

$$- \langle x^{k+1} - x^k, \hat{x} - x^k \rangle \leq \varepsilon^k \quad (\text{IV.3.7})$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \|\hat{x} - x^{k+1}\|_2^2 &= \|\hat{x} - x^k - (x^{k+1} - x^k)\|_2^2 \\ &= \|\hat{x} - x^k\|_2^2 + \|x^{k+1} - x^k\|_2^2 - 2 \langle x^{k+1} - x^k, \hat{x} - x^k \rangle \end{aligned} \quad (\text{IV.3.8})$$

Por (IV.3.7) e (IV.3.8)

$$\|\hat{x} - x^{k+1}\|_2^2 \leq \|\hat{x} - x^k\|_2^2 + \|x^{k+1} - x^k\|_2^2 + 2\varepsilon^k \quad (\text{IV.3.9})$$

1 segue de (IV.3.9)

2) Pelo lema (IV.2.7) existe \bar{k} tal que $\forall k, k \geq \bar{k} \quad c^k = c$. Como $M > 0$ e $w^k \leq 0$, a definição de ϕ e a relação implicam que $\left\{ f(x^k) + c \sum_{i=1}^m h_i(x^k) \right\}$ é decrescente $\forall k \geq \bar{k}$. Além disto, através de sucessivas somas e subtrações de termos adequados, podemos escrever:

$$\begin{aligned} - f(x^k) - c \sum_{i=1}^m h_i(x^k) &= f(x^{\bar{k}}) + c \sum_{i=1}^m h_i(x^{\bar{k}}) - f(x^{\bar{k}}) - \\ &\quad - c \sum_{i=1}^m h_i(x^{\bar{k}}) + f(x^{\bar{k}+1}) + c \sum_{i=1}^m h_i(x^{\bar{k}+1}) - \\ &\quad - f(x^{\bar{k}+1}) - c \sum_{i=1}^m h_i(x^{\bar{k}+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ f(x^{k-1}) - c \sum_{i=1}^m h_i(x^{k-1}) - f(x^{k-1}) - \\
 &- c \sum_{i=1}^m h_i(x^{k-1}) - f(x^k) - c \sum_{i=1}^m h_i(x^k)
 \end{aligned}$$

Agrupando convenientemente os termos, e utilizando (IV.3.5) chega-se a:

$$\sum_{i=\bar{k}}^k (-M w^i) \leq f(x^{\bar{k}}) - c \sum_{i=1}^m h_i(x^{\bar{k}}) - f(x^k) - c \sum_{i=1}^m h_i(x^k)$$

Da hipóteses 1) existe T tal que

$$T \leq f(x^k) + c \sum_{i=1}^m h_i(x^k) \quad \forall k > \bar{k}.$$

Esta majoração é utilizada na desigualdade anterior, fornecendo:

$$\sum_{i=\bar{k}}^k (-w^i) \leq \frac{f(x^{\bar{k}}) - c \sum_{i=1}^m h_i(x^{\bar{k}}) - T}{M} \quad (\text{IV.3.10})$$

Substituamos agora o valor de w^i dado pelo lema IV.2.6, observando que c_j^k é constante. Obtemos:

$$\sum_{i=\bar{k}}^k \left[\frac{1}{2t^i} \|p^i\|_2^2 + \sum_{j=1}^i \mu_j \alpha_j^i + c \sum_{j=1}^m h_j(x^i) - \beta \sum_{j=1}^m \alpha_j h_j(x^i) \right] \leq$$

$$\frac{f(x^{\bar{k}}) - c \sum_{i=1}^m h_i(x^{\bar{k}}) - T}{M}$$

(IV.3.11)

Seja k_1 tal que $\beta^k = 1, \forall k \geq k_1$ (a existência de k_1 é

garantida pela definição de β .

Seja $\tilde{k} = \max \left\{ \bar{k}, k_1 \right\}$. De (IV.3.11) temos então,

$$\sum_{i=\tilde{k}}^k \left[\frac{1}{2t^i} \|p^i\|_2^2 + \sum_{j=1}^i \mu_j \alpha_j^i + c \sum_{j=1}^m h_j(x^i) - \sum_{j=1}^m \sigma_j h_j(x^i) \right] \leq$$

$$\frac{f(x^{\tilde{k}}) - c \sum_{j=1}^m h_j(x^{\tilde{k}}) - T}{M}, \quad \forall k \geq \tilde{k}$$

(IV.3.12)

Observe que $\beta \leq 1$ por definição (veja (IV.0.1))

A série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2t^i} \|p^i\|_2^2 + \sum_{j=1}^i \mu_j \alpha_j^i + c \sum_{j=1}^m h_j(x^i) - \sum_{j=1}^m \sigma_j h_j(x^i) \right] \text{ converge.}$$

Assim como a série abaixo:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\bar{t}}{2t^i} \|p^i\|_2^2 + \bar{t} \left(\sum_{j=1}^i \mu_j \alpha_j^i + c \sum_{j=1}^m h_j(x^i) - \sum_{j=1}^m \sigma_j h_j(x^i) \right) \right]$$

Dado que $t^i \in [\underline{t}, \bar{t}]$, o teorema de comparação de séries garante que também

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \|p^i\|_2^2 + t^i \left(\sum_{j=1}^i \mu_j \alpha_j^i + c \sum_{j=1}^m h_j(x^i) - \sum_{j=1}^m \sigma_j h_j(x^i) \right) \right]$$

converge. Substituindo os valores de ε^i (IV.3.5) e p^i , nesta expressão segue-se que

$$\sum_{i=n}^{\infty} \left[\|x^{i+1} - x^i\|_2^2 + 2\alpha^i \right] \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty$$

3) Os resultados 1) e 2) garantem que existe $A(n)$ tal que $\|\hat{x} - x^k\|_2^2 < A(n)$, $\forall k, k \geq n$. Fixemos n . É imediato que

$$\|x^k\|_2^2 = \|x^k - \hat{x} + \hat{x}\|_2^2 \leq \|\hat{x} - x^k\|_2^2 + 2\|\hat{x} - x^k\|_2 \|\hat{x}\|_2 + \|\hat{x}\|_2^2$$

Desta desigualdade conclui-se que $\{x^k\}$ é uma sequência limitada, logo tem no mínimo um ponto de acumulação. Seja este \bar{x} .

Usando a desigualdade (IV.2.13) a definição de c^k e Cauchy-Schwartz tem-se

$$\begin{aligned} f(x) + c^k \sum_{i=1}^m h_i(x) &\geq f(x) + \sum_{i=1}^m \sigma_i(t_j^k) h_i(x) \\ &\geq f(x^k) + c^k \sum_{i=1}^m h_i(x^k) - \left\{ \frac{1}{t^k} \|p^k\|_2 \|x - x^k\|_2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^k \mu_l \alpha_l^k + c^k \sum_{i=1}^m h_i(x^k) - \sum_{i=1}^m \sigma_i h_i(x^k) \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV.3.13})$$

Usando o fato de c^k ser constante para k suficientemente (lema IV.2.7) e a relação (IV.3.10) deduzimos que $w^k \longrightarrow 0$, se $k \longrightarrow \infty$. Logo se $k \longrightarrow \infty$, a expressão de w_j^k (IV.2.14) nos leva, por um argumento de positividade, a

$$\|p^k\|_2 \longrightarrow 0, \text{ e } \left\{ \sum_{l=1}^k \mu_l \alpha_l^k + c^k \sum_{i=1}^m h_i(x^k) - \sum_{i=1}^m \sigma_i h_i(x^k) \right\} \longrightarrow 0 \quad (\text{IV.3.14})$$

(veja demonstração do lema IV.2.5).

Portanto, de (IV.3.13) e (IV.3.14)

$$f(x^k) + c \sum_{i=1}^m |h_i(x^k)| \geq f(\bar{x}) + c \sum_{i=1}^m |h_i(\bar{x})|, \quad \forall k \quad (\text{IV.3.5})$$

Usando os resultados anteriores 1) e 2) se deduz que para $\delta > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\bar{x} - x^k\|_2^2 \leq \|\bar{x} - x^n\|_2^2 + \frac{\delta}{2}, \quad \forall k > n > n_1 \quad (\text{IV.3.16})$$

Por outro lado dado que \bar{x} é um ponto de acumulação podemos escolher $\tilde{n} > n_1$, tal que

$$\|\bar{x} - x^{\tilde{n}}\|_2^2 < \frac{\delta}{2} \quad (\text{IV.3.17})$$

Como $\delta > 0$ é arbitrário, (IV.3.16) e (IV.3.17) levam à convergência $x^k \rightarrow \bar{x}$. $h_i(\bar{x}) = 0$ é uma consequência de (IV.3.14): da convergência da expressão entre colchetes temos

$$\sum_{i=1}^k \mu_i^k \alpha_i^k \rightarrow 0 \text{ e } \sum_{i=1}^m (c^k - \alpha_i) h(x^k) \rightarrow 0, \text{ com } c^k - \alpha_i > 0$$

Agora, para provar a convergência do algoritmo é suficiente demonstrar que $w^k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Usa-se aqui de novo, argumento de positividade nos termos da expressão de w_j^k (lema IV.2.6). Ademais da mesma forma que WOLFE (1975), MIFFLIN (1977-1979), e KIWIEL (1985) será suficiente analisar a relação

$$u^k = -w^k = \left[\frac{1}{2t^k} \|p^k\|_2^2 + \sum_{j=1}^k \mu_j^k \alpha_j^k + c^k \sum_{j=1}^m h_j(x^k) - \beta \sum_{j=1}^m \sigma_j^k h_j(x^k) \right]$$

(IV.3.18)

Lema IV.3.2

Na k -ésima iteração do algoritmo IV.2.4 $\frac{u^k}{t^k}$ corresponde ao valor ótimo do subproblema

$$\begin{aligned} \min_{\mu, \sigma} \quad & \frac{1}{2} \left\| \sum_{j=1}^k \mu_j^k g_j^k + \sum_{i=1}^m \sigma_i^k \nabla h_i(x^k) \right\|_2^2 + \frac{1}{t^k} \sum_{j=1}^k \mu_j^k \alpha_j^k + \\ & \frac{c^k}{t^k} \sum_{i=1}^m h_i(x^k) - \frac{\beta}{t^k} \sum_{i=1}^m \sigma_i^k h_i(x^k) \end{aligned}$$

s. a.

$$\sum_{j=1}^k \mu_j^k = 1, \quad \mu_j^k \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, k$$

$$\sum_{i=1}^m |\sigma_i^k| \leq c^k$$

(IV.3.19)

Demonstração

A função objetivo do problema (IV.1.15) do lema IV.1.4 e do problema (IV.3.19) diferem somente no termo constante $\frac{c^k}{t^k} \sum_{i=1}^m h_i(x^k)$, e dado que para $t = t^k$

$$\mu(t^k) = (\mu_1^k, \mu_1^k, \dots, \mu_k^k), \quad \sigma(t^k) = (\sigma_1^k, \sigma_2^k, \dots, \sigma_m^k),$$

correspondem à solução do problema (IV.1.15), então

$$\sum_{j=1}^k \mu_j^k = 1, \mu_j^k \geq 0, j=1,2,\dots,k \text{ e } \sum_{i=1}^m |\sigma_i^k| \leq c^k \text{ (pelo algoritmo)}$$

logo $(\mu(t^k), \sigma(t^k))$ é um ponto viável para (IV.3.19).

Usando o fato de que (lema IV.1.3)

$$p^k = t^k \left(\sum_{j=1}^k \mu_j^k g^j + \sum_{i=1}^m \sigma_i^k \nabla h_i(x^k) \right)$$

se segue que a função verifica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \sum_{j=1}^k \mu_j^k g^j + \sum_{i=1}^m \sigma_i^k \nabla h_i(x^k) \right\|_2^2 &+ \frac{1}{t^k} \sum_{j=1}^k \mu_j^k \alpha_j^k + \frac{c^k}{t^k} \sum_{i=1}^m h_i(x^k) - \\ &- \frac{\beta}{t^k} \sum_{i=1}^m \sigma_i^k h_i(x^k) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2(t^k)^2} \|p^k\|_2^2 + \frac{1}{t^k} \sum_{j=1}^k \mu_j^k \alpha_j^k + \frac{c^k}{t^k} \sum_{i=1}^m h_i(x^k) - \frac{\beta}{t^k} \sum_{i=1}^m \sigma_i^k h_i(x^k)$$

$$= \frac{u^k}{t^k},$$

onde utilizamos a definição (IV.3.18) de u^k

Definamos

$$\tilde{\alpha}^k = \sum_{j=1}^k \mu_j^k \alpha_j^k + c^k \sum_{i=1}^m h_i(x^k) - \beta \sum_{i=1}^m \sigma_i^k h_i(x^k) \quad (\text{IV.3.20})$$

Deste modo

$$-w^k = \frac{u^k}{t^k} = \frac{1}{2(t^k)^2} \|p^k\|_2^2 + \frac{\tilde{\alpha}^k}{t^k} \quad (\text{IV.3.21})$$

Para provar convergência vamos supor no algoritmo IV.2.4 que a tolerância final do algoritmo $\varepsilon = 0$. Também suporemos

