UMA CONTRIBUIÇÃO AO PROBLEMA DE MÚLTIPLOS OBJETIVOS EM REDES

Lorena del Carmen Pradenas Rojas

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE POS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Prof. Nelson Maculan Filho, D. Habil.
(Presidente)

Profa. Dina Feigenbaum, D.Sc.

Prof. Luis Satoru Ochi, D.Sc.

Prof. Jose Eugenio Leal, D.Ing.

Prof. Claudio Bornstein, Dr.Rer.Nat.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
AGOSTO DE 1990

PRADENAS ROJAS, LORENA DEL CARMEN

Uma Contribuição ao Problema de Múltiplos Objetivos em Redes [Rio de Janeiro], 1990.

VII, 110 p. 29.7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1990).

Tese - Universidade Federal de Rio de Janeiro, COPPE.

1. Problemas de Múltiplos Objetivos, Problemas de Múltiplos Objetivos em Redes, Problema de Fluxos em Redes, Problemas de Programação Linear, Problemas De Redes, Programação Matemática.

I. COPPE/UFRJ II. Título (Serie).

RESUMO DA TESE APRESENTADA A COPPE UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSARIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIENCIAS (D.Sc.)

UMA CONTRIBUIÇÃO AO PROBLEMA DE MÚLTIPLOS OBJETIVOS EM REDES

Lorena del Carmen Pradenas Rojas

Agosto de 1990

ORIENTADOR: Prof. Nelson Maculan Filho
PROGRAMA : Engenharia de Sistemas e Computação.

Existem muitas aplicações da pesquisa operacional (por exemplo em transporte) que tradicionalmente tem sido modeladas através da teoría de fluxos em redes, considerando somente a otimização de um objetivo determinado. Contudo, os problemas reais desta área, na maioría das vezes, envolvem varios objetivos a serem considerados para adotar uma solução. Do um ponto de vista puramente matemático, salvo raras exceções, não existem algoritmos específicos que considerem as vantagems que proporciona a matriz de incidência nó-arco. Nesta tese propõe-se um método para determinar o conjunto exato de soluções não dominado de um problema de vetor mínimo formulado sobre uma rede. O método é implementado e testado numéricamente para uma serie de redes geradas aleatóriamente.

ABSTRACT OF THESES PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR DEGREE OF DOCTOR OF SCIENCE (D.Sc).

CONTRIBUTIONS TO THE MULTIOBJECTIVE NETWORK PROBLEM

Lorena del Carmen Pradenas Rojas
August,1990

THESIS SUPERVISOR: Prof. Nelson Maculan Filho
DEPARTMENT: System Enginnering and Computer Science

There are many operations research applications (for instance in transportation), which traditionally are modeled using networks flow theory to optimize one objective. However the real problems of this area generally state several objectives simultaneously from which a solution must be obtained. But for this problem, up to few exceptions there are no specific algorithms taking advantage of the nodes-arcs incidence matrix. This study presents a method to determine the set of nondominated solutions for a network vector minimum problem. The method is implemented and numerical results are discussed.

ÍNDICE

CAPÍTULO I.
Introdução.....1

CAPÍTULO II.
Téoria e Métodos da Programação Linear com Múltiplos Objetivos.....4

II.1 Formalização do Problema e não Dominância...6
II.2 Condições de Karusch Kuhn Tucker.....7
II.3 Tipos de Funções Objetivos.....10
II.4 Métodos de Solução.....11
II.4.1 Método dos Pesos.....14
II.4.2 Método da Restrição ε.....17
II.4.3 Método Múltiobjetivo Linear de Zeleny...21

CAPÍTULO III.
Problemas Lineares de Fluxos em Redes.....30

III.1 Problema Mono Objetivo.....31
III.1.1 Formulação.....31
III.1.1.1 Definições Básicas.....31
III.1.1.2 Problema de Fluxo de Custo Mínimo.32
III.1.1.3 Problema de Caminho Mínimo.....34
III.1.1.4 Problema de Fluxo de Circulação de Custo Mínimo.....35
III.1.2 Métodos de Solução.....37
III.1.2.1 Método Simplex na Rede.....37
III.1.2.2 Método Out of Kilter.....42
III.1.2.3 Método de Incremento de Custo Mínimo.....46
III.1.2.4 Método para o Problema de Caminho Mínimo.....47
III.1.2.5 Alguns Antecedentes Numéricos.....51
III.2 Problemas de Múltiplos Objetivos.....53
III.2.1 Formulação.....53
III.2.1.1 Definições Básicas.....53
III.2.1.2 Forma Geral.....53

III.2.2 Métodos de Solução.....55
III.2.2.1 Método de Climaco.....55
III.2.2.2 Método de Hansen.....59
III.2.2.3 Método de Malhotra.....62

CAPÍTULO IV.
Método Proposto para o Problema de Múltiplos Objetivos em Redes.....64

IV.1 Uso de Variáveis Limitadas.....64
IV.2 Particularização de Resultados Teóricos para Redes.....70
IV.3 Subproblema da não Dominância.....72
IV.3.1 Formulação.....72
IV.3.2 Método Dual.....73
IV.3.3 Método dos Custos Atuais.....79
IV.4 Algoritmo Proposto.....83

CAPÍTULO V.
Resultados Numéricos.....87

CAPÍTULO VI.
Discussão.....89

CAPÍTULO VII
Conclusões e Recomendações.....93

Referências Bibliográficas.....95
Apéndice I.....104
Apéndice II.....110

CAPITULO I.

INTRODUÇÃO.

O problema de múltiplos objetivos tem a sua origem na modelagem de uma grande variedade de situações reais, sendo comumente utilizado na tomada de decisões de: sistemas de transportes, saude, produção, administração, operação e controle de empresas produtivas, operação de redes, etc. (COHON, 1978; IGNIZIO, 1982; GOICOECHEA, 1982; ZELENY,1974: ROYeVINCKE,1981; HWANG e MASUD,1979; EVANS,1984, e outros) Antes do aparecimento da analise múltiobjetivo, os problemas de decisão que modelavam-se mediante Programação Linear, consideravam a existência de uma única função objetivo, que tem a vantagem de gerar soluções mediante um algoritmo eficiênte, embora muitas vezes não representando exatamente a realidade. De fato, a comparação de varias decisões possíveis dificilmente são feitas seguindo somente um ponto de vista.

Em particular, os problemas que surgem na área de planejamento em transporte envolvem intrinsicamente várias decisões as vezes conflitantes. Neste problema devem-se ter em conta, custos, tempos de viagems, demanda, nível de serviço, responsabilidades sociais, relações com o trabalho industrial, etc. Na pratica, tem-se utilizado na maioria dos casos a teoria dos fluxos em redes com uma única função objetivo para modelar tais problemas, considerando os critérios restantes como restrições. Uma das principaes razões para isto é o fato que tem-se dado pouca atenção ao problema múltiobjetivo em redes. É esta conclusão à que se chega depois de fazer uma rigorosa pesquisa bibliográfica da qual surgem apenas três trabalhos. O do P. HANSEN(1980) que faz uma análise teórica de dez problemas bicriteriais numa rede considerando principalmente a sua complexidade; estudo de J.CLIMACO e E. MARTINS(1982) para o problema do caminho mínimo com dois objetivos e o de R. MALHOTRA e M. C. PURI(1984) que faz uma abordagem teórica do problema de custo mínimo com dois objetivos utilizando conceitos do

algoritmo de "Out-of-Kilter". Portanto, nenhuma abordagem tem sido feita, de nosso conhecimento considerando o caso de três o mais objetivos.

Por outro lado, a particularização da Programação Linear para os problemas de redes aproveita a esparsidade da matriz de incidencia nó-arco gerando algoritmos eficientes para resolve-los. Essa área tem sido amplamente estudada e uma de suas aplicações mais importantes é a que considera a familia de problemas de roteamento de veículos (L. SATORU, 1989), D. PHILLIPS e A. GARCIA, 1981).

A diferença básica entre um problema de programação mono objetivo e um problema de múltiplos objetivos é que neste último se procura um conjunto de soluções viáveis, não tendo mais sentido o termo solução ótima e dando origem ao conceito de soluções não dominadas.

Para resolver o problema de múltiplos objetivos existem técnicas exatas e aproximadas de geração do conjunto de soluções não dominadas sendo que, os mais utilizados são os aproximados e dentre eles podemos destacar o método dos pesos e o método da restrição . Em relação com as técnicas exatas, vários pesquisadores tem-se preocupado em estudar métodos de geração que não dependam da conversão em um problema mono objetivo (como os aproximados), Para trabalhar isto alguns algoritmos tem sido desenvolvidos que operam diretamente com o problema de múltiplos objetivos mas, sem muito sucesso. Desta classe, uns dos mais conhecidos é o de M. ZELENY(1974) no qual o conjunto de soluções não dominadas é gerado com uma métodologia baseada no simplex e utilizando um tableau de múltiplos objetivos, que corresponde a uma versão aumentada do tradicional tableau simplex. No simplex múltiplos objetivos movimenta-se de um ponto extremo não dominado a pontos extremos não dominados adjacentes até que todas as soluções não dominadas sejam encontradas.

Com o objetivo de prencher a lacuna existente na área

de fluxos em redes para problemas de múltiplos objetivos, o objetivo desta tese é gerar um método exato para obter soluções não dominadas e verificar numéricamente à eficiência deste método para diversas redes. Para isto a tese é organizada da seguinte maneira: No capítulo II se faz uma análise do problema de múltiplos objetivos clássicos. No capítulo III é apresentada uma formulação para a família de problemas a estudar. No capítulo V o comportamento do nosso método é analisado a través de varios testes numéricos gerados aleatóriamente. Finalmente, nos capítulos posteriores são apresentadas a discusão e conclusões deste trabalho.

CAPÍTULO II

TEORIA E MÉTODOS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR COM MÚLTIPLOS OBJETIVOS (MOLP)

Neste capítulo são abordados os conceitos da programação linear de múltiplos objetivos essenciais para a compreensão, tanto dos métodos existentes como do método proposto neste trabalho.

O problema de Programação Linear de múltiplos objetivos (COHON, 1978; IGNIZIO, 1982; GOICOECHEA, 1982; ZELENY 1974; ROY e VINCKE, 1981; HWANG e MASUD, 1979; EVANS, 1984, etc.) tem a sua origem na modelagem de uma grande variedade de situações reais, sendo comumente usados em planejamento de: alocação de recursos da produção industrial, sistemas de transportes urbano, sistemas de saúde, uso de solos, produção e distribuição de energia, administração, operação e controle de empresas, teoría de portafolios, sistemas agrícolas operação de redes, produção de gado, etc.

Uma diferença fundamental entre um Problema de Programação Linear de Mono Objetivo (SOLP) e um Problema com Múltiplos Objetivos é que nesse último se procura um conjunto de soluções viáveis, não tendo mais sentido usar o termo "solução ótima" , dando origem ao conceito de solução não dominada.

Para explicar esse conceito considere um caso em que existem duas funções objetivos lineares (z_1 e z_2) e uma região viável limitada por um conjunto de restrições lineares em $\mathbb{R}^2$, esquematizada na figura II.1. Para este caso pode-se construir um gráfico que represente as variações das funções objetivos na região viável. Isto determina uma "região objetivo" mostrada na figura II.2. Note que existe uma correspondência entre os pontos a,b,c,d,e e f em ambas regiões .

Considere os pontos sobre os segementos de retas [e,d],

[d-c] e [c,b].

Na região objetivo não existe nenhum ponto (z_1, z_2) que seja "melhor" que aqueles sobre os segementos de retas anteriormente mencionadas, ou seja não existe nenhum ponto que melhore uma função sem piorar a outra. Tais pontos definendefinen o conjunto das soluções "não dominadas".

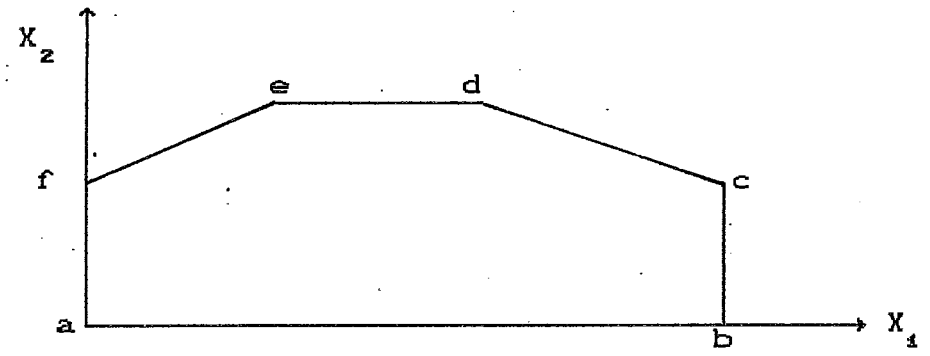


FIGURA II.1 Região viável

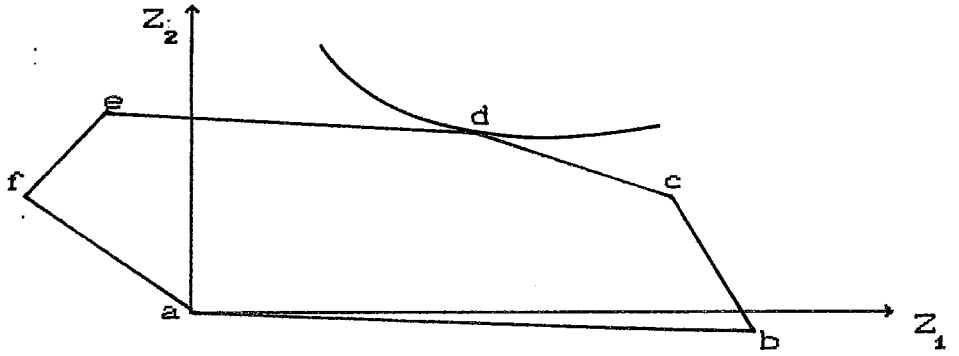


FIGURA II.2 Região objetivo de max Z_1 e max Z_2

Assim, as soluções do conjunto não dominado são incomparaveis entre si, de modo que devemos ter uma informação adicional deve se ter em conta para escolher uma delas. Isto é comumente feito com base numa função de utilidade e tal solução recebe o nome de solução de "melhor compromisso",que corresponde ao ponto d da figura II.2 (FISHBURN, 1970; KEENEY e RAIFFA , 1976), e é determinada pelo ponto onde a função de utilidade é tangente ao conjunto não dominado.

II.1 FORMALIZAÇÃO DO PROBLEMA E NÃO DOMINÂNCIA.

Formalmente o problema de múltiplos objetivos pode ser formulado como :

$$\text{Max} \quad Z(x) = (z_1(x),\ldots,z_p(x)) \qquad \text{II.1a}$$

s.a :

$$x \in X \qquad \text{II.1b}$$

onde :

$$X = \{\, x \in \mathbb{R}^n,\ A\,x = b,\ x \geq 0 \,\} \qquad \text{II.1c}$$

sendo A uma matriz de ordem m * n de posto completa e b $\in \mathbb{R}^m$.

Por outro lado a definição formal do conjunto de soluções não dominadas para o problema II.1 é dada por :

Uma solução viável $x \in X$ é não dominada se não existe nehum $x' \in X$ tal que :

$$z_q(x') > z_q(x) \text{ para algum } q \in P \qquad \text{II.2a}$$

$$\text{e} \quad z_r(x') \geq z_r(x) \ \forall\, r \neq q \qquad \text{II.2b}$$

onde $P = \{1,\ldots,p\}$ é o conjunto de índices do vetor Z(x), S é o conjunto de soluções não dominadas. O resto dos pontos viáveis $x \in X$ e $x \notin S$ são identificados por soluções dominadas. É prática comum identificar o conjunto de não dominância como não dominado (pelos matemáticos),eficiente (pelos estatisticos) ou ótimo de pareto (pelos economistas e pessoal da saude).

Deve ser notado que a definição do conjunto S permite estabelecer comparações entre soluções viáveis dominadas e não dominadas, porém é implicitamente definida a imcomparabilidade entre soluções não dominadas .Para visualizar isto com mais clareza considere-se um vetor com dois objetivos , $Z(x) = (z_1(x), z_2(x))$ e duas soluções x^1 e

x^2 a serem comparadas $Z(x^1) = (z_1(x^1), z_2(x^1))$ e $Z(x^2) = (z_1(x^2), z_2(x^2))$ x^1 é melhor que x^2 sse :

$$z_1(x^1) > z_1(x^2) \text{ e } z_2(x^1) \geq z_2(x^2) \qquad \text{II.3a}$$

ou $$z_1(x^1) \geq z_1(x^2) \text{ e } z_2(x^1) > z_2(x^2) \qquad \text{II.3b}$$

Quando que : $z_1(x^1) > z_1(x^2)$ e $z_2(x^1) < z_2(x^2)$ neste caso nada pode-se concluir das soluções x^1 e x^2, em quanto a dominância de uma sobre a outra.

Portanto resolver um problema de otimização de múltiplos objetivos consiste em determinar o seu conjunto de S das soluções não dominadas .

II.2 CONDIÇÕES DE KARUSH KUHN TUCKER

As condições necessárias e suficentes para otimalidade do problema mono objetivo apresentadas por KUHN e TUCKER (1951) foram tambem estabelecidas as condições necessárias para um ponto $x^* \in X$ ser uma solução não dominada. Assim para o problema II.1 tais condições são:

Existem multiplicadores μ_i, $i = 1,\ldots,m$ irrestritos e $v_j \geq 0$, $j = 1,\ldots, m$ e $\omega_k \geq 0$ $k = 1,\ldots,p$ tais que :

$$x^* \in X \qquad \text{II.4a}$$

$$v_j \, x_j^* = 0, \qquad j = 1,\ldots,m \qquad \text{II.4b}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \omega_k \nabla z_k(x^*) - A^T\mu - v = 0 \qquad \text{II.4c}$$

Em (II.4c), o primeiro termo é uma combinação linear não negativa dos gradientes das p funções objetivos. Quando p=1 as condições II.4 são as condições de K.K.T. para um problema mono objetivo.

As relações (II.4) são necessarias para o ponto x^* ser

não dominado e também são suficientes se as funções $z_k(x)$ são concavas (para k = 1,...,p) e o conjunto X convexo.

A terceira condição de Kuhn-Tucker apresentada na equação (II.4c) pode ser deduzida utilizando o conceito de cone , que é apresentado no apéndice II e definido (ZADEH,1963) :

Considere o ordenamento parcial definido em $\mathbb{R}^n$ e asociando com cada $x \in \mathbb{R}^n Q$ os seguintes três conjuntos disjuntos :

a) Subconjunto denotado por $S^{>}(x)$, de todos os vetores em $\mathbb{R}^n$ que dominan x (neste conjunto x não é incluido).

b) Subconjunto denotado por $S^{\leq}(x)$, de todos os vetores em $\mathbb{R}^n$ que são iguais ou Q dominados por x.

c) Subconjunto denotado por $S^{\sim}(x)$, de todos os vetores em $\mathbb{R}^n$ que não são comparáveis com x.

Note-se que qualquer ponto viável pertence a algum dos subconjuntos acima e portanto a união deles gera todo o espaço $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{R}^n = (S^{>}(x)) \cup ((S^{\leq}(x)) \cup ((S^{\sim}(x)) \qquad \text{II.5}$$

Desta forma, uma solução viável $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ é uma solução não dominada se a interseção de x e $S^{>}(x)$ é vazia isto é, $x \cap S^{>}(x) = \phi$.

Notar que o cone polar* (apéndice II) indica direções nas quais é possivel melhorar todos os objetivos simultaneamente, ou seja : $S^{>}(x) = c^*$.

A partir do tamanho do cone é possível obter algumas informações tais como, de que um cone pequeno apresenta grandes conflitos nos objetivos (COHON, 1978). Outras relações entre cones e o conjunto não dominada podem ser

encontradas em YU (1974). PHILIP (1972), utiliza o cone formado pelos gradientesdas funções objetivos para identificar soluções não dominadas ao longo da fronteira da região viável. Pontos na fronteira são identificados como soluções não dominadas de um hiperplano que passa através dos pontos separando o cone e a região viável, contudo o método é computacionalmente trabalhoso e não tem sido aplicado à problemas de grande porte.

Considere-se o exemplo cuja região viável é dada na figura II.3 com duas funções objetivos $z_1(x)$ e $z_2(x)$ com c^1 e c^2 sendo os gradientes de tais funções. Por a definição o ponto e é não dominada pois a interseção de $S^>(x^*)$ e X é vazia, o cone não inclue tal ponto ou seja : $x^* \notin S^>(x^*)$.

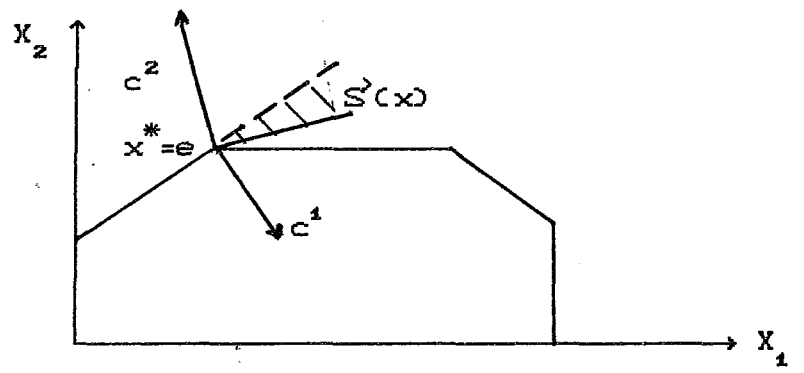


FIGURA II.3 Solução não dominada.

Quando a região viável é convexa, um ponto na fronteira $x \in X$ é uma solução não dominada se é possivel passar um hiperplano através de X separando X e $S^>(x)$. Seja γ o vetor normal ao hiperplano separador em x^* na direção ao longo da região viável no mesmo espaço ao qual $S^>(x)$ pertence,então, γ fica no cone polar de $S^>(x^*)$ visto que γ forma um ângulo agudo com todos os vetores em $S^>(x^*)$ e,γ é uma combinação linear não negativa de c^1 e c^2.

$$\gamma = \omega_1 c^1 + \omega_2 c^2 \qquad \text{II.6a}$$

$$\omega_1, \omega_2 \geq 0 \qquad \text{II.6b}$$

Igualmente a componente negativa da normal $-\gamma$ pertence

ao cone gerado pelos gradientes negativo das uniões das restrições : $g_3(x) = 0$ e $g_2(x) = 0$.

$$-\gamma = \lambda_3(-\nabla g_3(x^*)) + \lambda_2(-\nabla g_2(x^*)) \qquad \text{II.7a}$$

$$\lambda_3, \lambda_2 \geq 0 \qquad \text{II.7b}$$

Combinando as relações (II.7) tem-se :

$$\omega_1 \nabla z_1(x^*) + \omega_2 \nabla z_2(x^*) - \lambda_3 \nabla g_3(x^*) - \lambda_2 \Delta g_2(x^*) = 0 \qquad \text{II.8}$$

A relação II.8 é condição necessaria para que o ponto x^* seja uma solução não dominada e a generalização para p objetivos e m restriçoés proporciona a terceira condição de Kuhn Tucker.

II.3 TIPOS DE FUNÇÕES OBJETIVOS.

É interesante analisar os tipos de relação que podem existir entre as funcões objetivo de um problema a começar pelo caso de objetivos simples.

a) MONO OBJETIVO

Quando existe uma unica função objetivo, existe um único gradiente que compõe a única componente do cone do gradiente. O cone formado é um raio simples e $S^>(x)$ é um espaço definido pelo hiperplano ao qual ∇z é ortogonal. O hiperplano corresponde ao contorno da função objetivo, (figura II.4a).

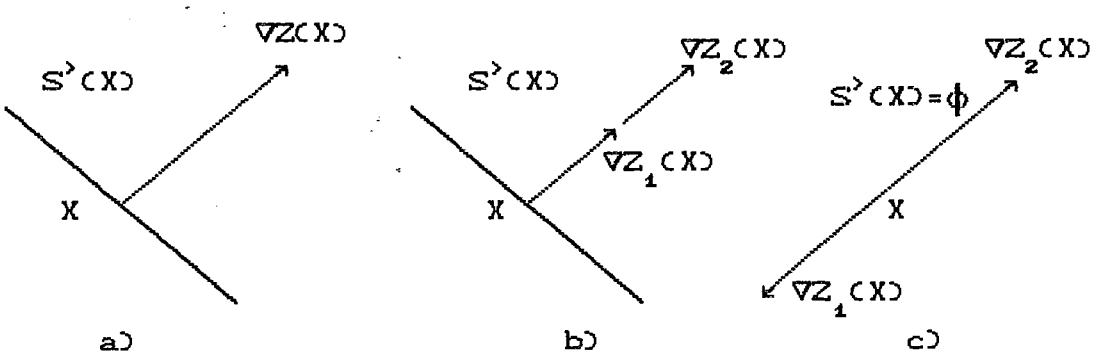


FIGURA II.4 Tipos de funções objetivos

b) OBJETIVOS COLINEARES SEM NENHUM CONFLITO.

Neste caso os gradientes da função objetivo apontam na mesma direção. $S^{>}(x)$ é um espaço definido pelo hiperplano no qual $\nabla z_1(x)$ e $\nabla z_2(x)$ são ortogonais. Esta situação é identica ao caso anterior ou seja, quando os objetivos não são conflitantes e o problema é equivalente ao problema com único objetivo, figura II.4b.

c) OBJETIVOS COLINEARES COM CONFLITO COMPLETO.

Se os objetivos são diametralmente opostos, o conjunto $S^{>}(x)$ é vazio, isto quer dizer que a interseção de $S^{>}(x)$ com x é também vazía para qualquer $x \in X$. Conclue-se que toda solução viável é nãodominada,a partir disto pode-se dizer que quando existem objetivos conflitantes o compromisso é impossivel, Figura II.4c.

Os dois ultimos casos podem ser generalizados para objetivos dependentes.

Se o gradiente de uma função objetivo pode ser expresso como uma combinação linear dos outros objetivos restantes.

$$\nabla z_r(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^{p} \alpha_k \nabla z_k(x) \qquad \text{II.9}$$

Então,alguma das duas seguintes condições acontece :

a) Se $\alpha_k \geq 0, \forall\ k$ logo,o objetivo r pode ser eliminado.

b) Se o somatório anterior é negativo e $\alpha_k \neq 0\ \forall\ k \neq r$ então, toda solução viável é não dominada (caso II.4c).

II.4 MÉTODOS DE SOLUÇÃO

As caraterísticas dos processos de tomada de desições que são utilizados para definir os métodos de MOLP são : os

fluxos de informação e o contexto da tomada de decisões. Os primeiros são importantes pois determinan as funções que o analista tem no processo de planejamento. Os segundos definem as metas das análises.

Os dois tipos de fluxos de informação são : desde os decisores para os analistas(" top-down ") e dos analistas para os decisores(" bottom-up "). Neste ultimo tem-se resultados do conjunto não dominado, alternativas não dominadaes, e seus impactos nos objetivos . O primeiro ocorre quando os tomadores de decisão explicitamente articulam preférencias de modo que, a solução de " best-compromise " possa ser identificada. Existem muitos métodos que leva em conta somente um tipo de fluxos de informação mas, outros (métodos iterativos) utilizam ambos os fluxos no desncolvimento da solução.

Em relação ao contexto das tomadas de decisões, podem existir dois tipos de problemas : de multiplos objetivos e problemas de múltiplas decisões. No primeiro tenta-se incluir aquelas situações nas quais existe um planejador ou um conjunto de planejadores que distribui similarmente objetivo se preferências e gerando um problema com muitos objetivos as vezes conflitantes. No segundo é dirigido à àqueles casos nos quais existem muitos planejadores ou grupos interessados, cada um dos quais tem seus próprios objetivos conflitantes. Na tomada de decisões de multiplos objetivos a meta analítica é a solução de "best-compromise ",que é procurada através da resolução dos conflitos internos daqueles que tomam as decisões. No outro caso, quem decide deve resolver conflitos internos entre objetivos e estando consciente dos conflitos existentes com outros planejadores.

É difícil distinguir os diferentes contextos da tomada de decisões, de fato, os dois não são mutuamente exclusivos e portanto muitos problemas na tomada de decisões são tratados como simples problemas de múltiplos objetivos.

Os métodos analíticos são divididos em três tipos dependendo da tomada de decisões e do fluxo de informação: esses são : métodos de geração , métodos que incorporam preferências e métodos de múltiplos planejadores.

No presente estudo analisam-se somente os métodos de geração por serem os que o analista deve desenvolver. A meta analitica não é uma análise política senão, a geração e avaliação de alternativas viáveis .

Neste caso o fluxo de informação é do tipo "bottom-up". O analista aplica uma técnica de geração para procurar uma representação exata ou aproximada do conjunto não dominada no espaco de decisão e no espaço objetivo. Tais resultados são apresentados aos encarregados de tomar decisões e eles escolhem a solução de "best- compromise". Note-se que as preferências não são articuladas explicitamente embora, o proceso de escolha não possa ser colocado sem as considerações das preferências dos objetivos por parte de quem decide.

As preferências podem ser articuladas de diversas maneiras ; assumidas pelos analistas , eles podem ser previamente informados para o estabelecimento delas e os "tradeoff" entre os objetivos ou, podem ser articuladas progressivamente através da interação com o computador e o analista.

As preferências podem ser representadas por: esquemas de pesos, restrições , metas, funções utilidade , etc.

Todos os métodos baseados nas preferências tem em conta o objetivo de identificar a solução de "best-compromise" e alguns destes métodos precisam de :

a) Estabelecimento a priori dos pesos.

b) Definição geométrica da solução de"best-compromise". Neste caso, primeiramente define-se uma solução ideal e com

métodos computacionais procuram-se soluções viáveis que se aproximem da ideal. O método mais importante deste tipo denomina-se "Goal Programming" (G P) e foi proposto por CHARNES e COOPER , 1961. Nos últimos anos estos métodos tem sido muito estudados (IGNIZIO, 1982; ROMERO, 1986). IGNIZIO (1983) resolve o problema de GP (problema de programação linear de simples objetivo) , utilizando a teoria de redes generalizadas GLOVER, 1978; GLOVER, 1979 neste caso o problema é representado como uma rede com ganhos.

c) Técnicas interativas, os métodos mais classicos são: método STEP (BENAYOUN et alii , 1971), iterativos G P (DYER , 1972), métodos de GEOFFRION et alii (1972), métodos de ZIONTS e WALLENIUS (1976), STEUER (1977), FICHEFET (1976), ZIONTS e WALLENIUS (1983), STEUER e SHULER (1978), MARCOTTE e SOLAND (1985), SLOWINSKI e WARCZYNSKI (1984). Todos os métodos interativos são baseados no mecanismo formal no qual o planejador interage diretamente com o computador ou com o analista. Aqui o procedimento consiste em sair de uma solução não dominada até outra em direções definidas pelo planejador e acaba quando ele fica satisfeito ou quando não se pode continuar. SHIN e RAVINDRAN (1987) apresentam uma completa revisão dos métodos.

Por outro lado também existem métodos nos quais o analista serve simultaneamente a vários clientes (nos métodos anteriores existe só um cliente) e ainda com objetivos conflitantes. Neste caso o analista deve ser sensível para os múltiplos interesses e denominam-se problemas de "Multiple-Decisions-Maker".

II.4.1 METODO DOS PESOS.

Designar pesos aos objetivos para obter soluções não dominadas é a técnica de solução de múltiplos objetivos mais antiga. O método se origina na condição necessária de não dominância desenvolvida por karush Kuhn Tucker (1951). GASS e SAATY (1955) mostraram como soluções

não dominadas podem ser geradas para problemas com dois objetivos variando paramétricamente os coeficentes da função objetivo. ZADEH (1963) foi o primeiro a recomendar a utilização dos pesos para aproximar o conjunto não dominado MARGLIN (1969) e MAYOR (1969) discutiram a utilidade dos pesos em problemas de múltiplos objetivos de investimento público, um exemplo encontra-se em BANA e COSTA (1988). Uma aplicação para o problema de determinar o caminho de menor custo que atende a maior demanda é apresentado por CUXRRENT et alii (1985).

Depois que pesos são designados aos objetivos eles são combinados numa função mono objetivo, variando paramétricamente os pesos e gerando o conjunto de soluções não dominadas.

Matemáticamente este procedimiento é formulado como :

$$\text{Max} \quad z(x) = \omega_1 z_1(x) + \ldots + \omega_p z_p(x) \qquad \text{II.10a}$$

s.a :

$$x \in X \qquad \text{II.10b}$$

Neste caso o problema de MOLP foi transformado num problema de SOLP para o qual existem métodos de solução. O coeficente ω_i operando na i-esima função objetivo $z_i(x)$ é denominado peso e pode ser interpretado como : "o peso relativo ou valor " de um objetivo quando comparado com os outros . Se os pesos dos diversos objetivos são interpretados como representando as preférencias relativas de quem toma decisões então,a solução para o problema (II.10) corresponde à solução de "best-compromise" e portanto é uma solução não dominada se todos os pesos são positivos (probl. de max.) figura II.5 mostra um exemplo do método dos pesos no espaço decisão.

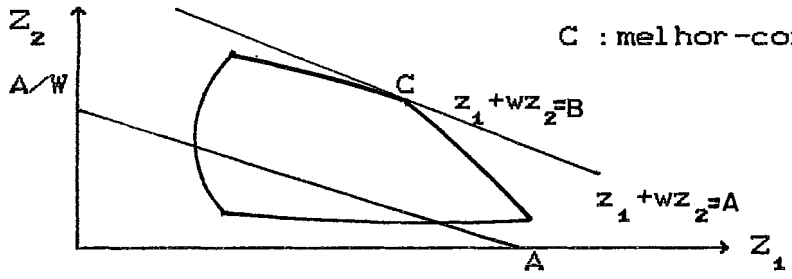


FIGURA II.5 Método dos pesos

O conjunto não dominado aproximado obtido com o método dos pesos aparece na figura II.6, observa-se que os os pontos na linha segmentada BD (aproximação) são viáves mas, dominados por pontos do conjunto não dominada real.

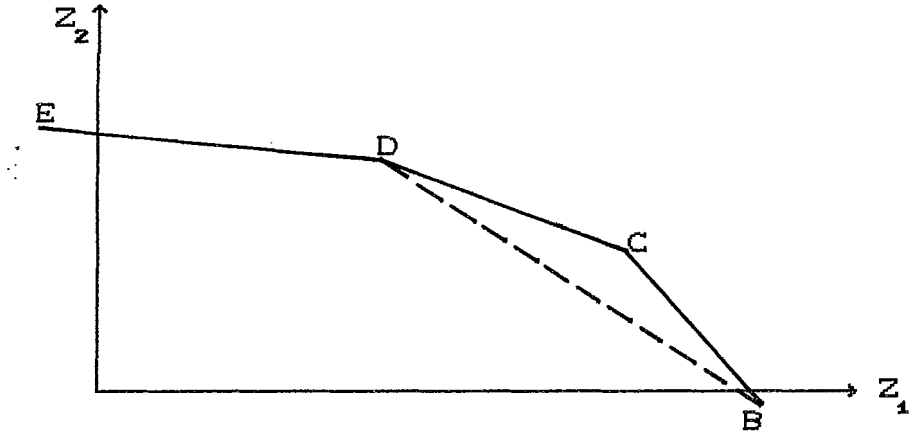


FIGURA II.6 Conjunto não dominado aproximado

Geralmente para utilizar o método requer-se um grande conjunto de pesos para obter uma bôa representação das soluções não dominadas. Para começar é recomendavel otimizar cada objetivo individualmente e depois resolver problemas ponderados com pessos iguais a : (1,0,0,...,0), (0,1,0,...,0),(0,0,1,...,0),...,(0,0,0,...,1).Isto determina pontos terminais do conjunto não dominado.

Cada peso pode variar de zero até um "upper-bound" conhecido, de acordo com un certo tamanho de passo e para cada novo conjunto de pesos uma solução não dominada é encontrada .Portanto, cada vez deve ser resolvido um novo problema linear. Isto pode ser acelerado utilizando

programação paramétrica.

Se existe um x que satisfaz as condições de Karush kuhn Tucker então deve ser solução ótima do problema :

$$\text{Max} \quad Z(x,\omega) = \sum_{k=1}^{p} \omega_k z_k \qquad \text{II.11a}$$

s.a.:

$$x \in X \qquad \text{II.11b}$$

De fato :

$$\nabla z(x,\omega) = \sum_{k=1}^{p} \omega_k \nabla z_k(x) \qquad \text{II.12}$$

As condições de Kuhn Tucker para mono objetivo tambem são satisfeitas.

A motivação do método dos pesos provém da seguinte observação :

Se um problema de pesos do tipo II.11 é resolvido com $w_k=1$ e $w_j=0, \forall\ j\neq k$, com solução ótima x então, para ser não dominada devemos ter $w_k > 0, \forall\ k$.

II.4.2 MÉTODO DA RESTRIÇÃO ε .

Dos métodos de geração ,o método da restrição é o mais intuitivo , opera otimizando um objetivo enquanto os outros são restritos a um valor fixo.

$$\text{Max} \quad z_h(x) \qquad \text{II.13a}$$

s. a:

$$x \in X \qquad \text{II.13b}$$

$$z_k(x) \geq \varepsilon_k, \qquad k = 1,\ldots,h-1,h+1,\ldots p \qquad \text{II.13c}$$

O h-ésimo objetivo foi arbitrariamente escolhido para maximização do problema (II.13) que corresponde a uma

formulação de único objetivo, podendo ser resolvido por métodos convencinais (simplex). A soluçãoótima é uma solução não dominada para o problema original de múltiplos objetivos . Os valores de ε_k devem ser escolhidos de modo que o problema de simples objetivo tenha solução viável . Outra condição na escolha dos ε_k é que todas as restrições correspondentes a funções objetivo deven estar ativas na solução ótima do problema restrito. Se não fôr assim e se existe ótimo alternativo para o problema restrito então algumas soluções ótimas podem ser soluções dominadas para o problema de múltiplos objetivo original. Essa situação é equivalente a se ter peso algum zero no método dos pesos.

Assim como o método dos pesos é uma ferramenta computacional que pode ser utilizada para incorporar pesos aos diferentes objetivos, o método da restrição ε permite ao analista especificar limites para os objetivos de maneira sequencial mas o método se dirige até uma solução dominada para o problema original se as condições previas são satisfeitas.

Vários autores tem utilizado este método ou variações em diversas situações: problemas de investimento público planejamento e administração de águas, etc.

No simplex que os custos reduzidos para as variáveis de folga indicam a mudança na função objetivo que podería acontecer se uma ou mais unidades dos recursos representados pela restrição estão disponíveis. Tais custos reduzidos são denominados variáveis duais ou preços sombras para a restrição na qual a variável de folga é associada.

Seja a restrição no k-ésimo objetivo do problema II.1

$$z_k(x) \geq \varepsilon_k \qquad \text{II.14}$$

acrescentando-le variáves de folga $x' \geq 0$ tem-se :

$$Z_k(x) - x' = \varepsilon_k \qquad \text{II.15}$$

Quando o problema restrito, é resolvido e a relação (II.14) é ativa, a variável de folga x' = 0 (variável de folga não está na base), sendo o seu custo reduzido w_k não negativo posto que corresponde à solução ótima de um problema de maximização. Se o anterior fosse possível, ter x' negativo, poderia ser interessante diminuir x' até algum valor negativo aumentando com isto o valor da função objetivo $z_h(x)$. Isto é equivalente a reduzir ω_k . Assim ω_k indica a quantidade na qual $z_h(x)$ podería aumentar para uma diminuição de uma unidade de $z_k(x)$.

Observa-se que se ε_k é utilizado no problema restrito (onde z_hé maximizado) e o preçosombra resultante é ω_k então, ω_k pode ser utilizadono problema dos pesos (com ω_k=1) para obter a mesma solução não dominada. Isto mostra que existe uma estreita relação entre ambos os métodos.

Ao contrario do método dos pesos que pode ser descrito em poucos passos, o método da restrição é mais elaborado portanto, um algoritmo formal é apresentado (COHON ,1978).

ALGORITMO (método da restrição ε)

PASSO 1 : Seja o dominio $X \subset \mathbb{R}^n$ das soluções viáveis.

Passo 2 : Otimizar cada objetivo individual. Seja x^k tal que :

$$z_k(x^k) = \max_{x \in X} z_k(x)$$

define-se :

$E = (x^k,\ k \in I\ [1,p])$=(conj. max. individual)

$$z_k(x)_{min} = \min_{x \in E} z_k(x)$$

PASSO 3 : Definimos o intervalo de variação ε_k por :

$$z_k(x)_{min} \leq \varepsilon_k \leq z_k(x^k)$$

PASSO 4 : Escolher r : numero de valores diferentes de ε_k a serem utilizados na geração.

PASSO 5 : Determinar os r valores de ε_k de cada objetivo, segundo

$$E_k = z_k(x)_{min} + [t/(r-1)] * [z_k(x^k) - z_k(x)_{min}]$$

$t = 0,1,\ldots,r-1$

PASSO 6 : Para cada combinação possivel dos valores de ε^k , $k = 1,\ldots,l,l+1,\ldots,p$, resolver o problema (II.13)
(existem r^{p-1} combinações).

PASSO 7 : Verificar a viabilidade de cada uma das soluções do passo anterior. Se existe viabilidade e se todas as restrições objetivos são ativas então uma solução não dominada deve existir .

Observa-se que cada um dos r^{p-1} problemas restritos requer a solução de um problema linear mono objetivo.

Os ótimos de cada um dos p problemas individuais representam "pontos terminais" do conjunto não dominado do MOLP . Tal aproximação garante a viabilidade e não dominância do problema restrito . Um caso de dois objetivos é mostrado na figura II.7 á seguir :.

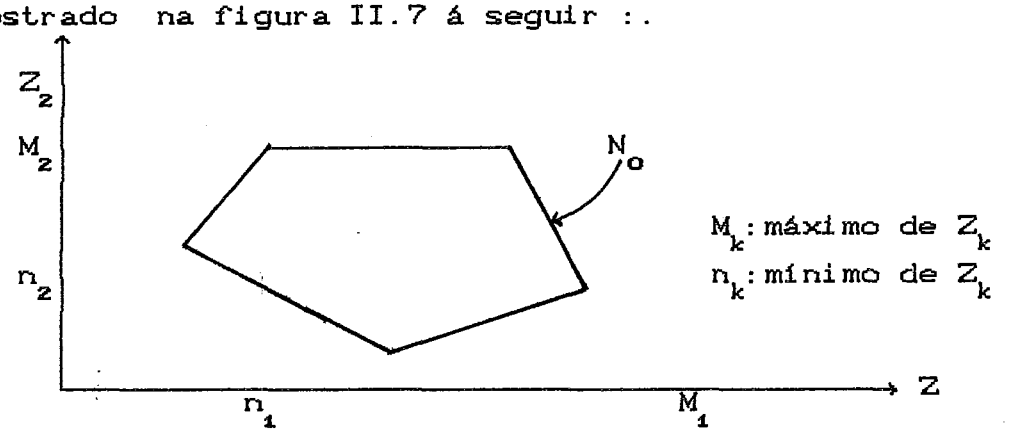


FIGURA II.7 Método da restrição ε

A seguir apresenta-se a base teórica para o método à partir das condições de Kuhn Tucker, a terceira condição na solução não dominada x^*, é descrita na forma :

$$\omega_h \nabla z_h(x^*) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{p} \omega_k \nabla z_k(x^*) - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0 \qquad \text{II.16a}$$

$$\omega_k \geq 0 \ , k = 1, \ldots, p \qquad \text{II.16b}$$

$$\mu_i \geq 0 \ , i = 1, \ldots, m \qquad \text{II.16c}$$

Supondo que $\omega_h > 0$ então (II.16) pode ser interpretada como a condição de otimalidade para o problema SOLP:

$$\text{Max} \quad \omega_h z_h(x) \qquad \text{II.17a}$$

s.a :

$$Ax = b \qquad \text{II.17b}$$

$$x \geq 0 \qquad \text{II.17c}$$

$$z_k(x) \geq \varepsilon_k \qquad \text{II.17d}$$

ω_h é positiva portanto o problema fica inalterado se :

$$\text{Max} \quad z_h(x) \qquad \text{II.18a}$$

s.a :

II.7b , II.7c, II.7d II.18b

Esta formulação corresponde ao problema da restrição.

II.4.3 MÉTODO MULTIOBJETIVO LINEAR DE ZELENY

Muitos pesquisadores tem-se preocupado em estudar métodos de geração que não dependem da conversão em um problema de mono objetivo, para isto alguns algoritmos tem sido desenvolvidos para operarem diretamente com o problema de múltiplos objetivos mas, até agora isto não tem sido conseguido plenamente.

PHILIP (1972), ECKER e KOUADA (1975) apresentaram

uma caracterização matemática de soluções não dominadas e elaboraram as bases para algoritmos que identifiquem tais soluções. HOLL (1973) VANS e STEWER (1973) e ZELENY (1974) tem criados algoritmos baseados no simplex para a geração de soluções não dominadas.

A seguir apresenta-se o método mais conhecido daqueles mencionados anteriormenteque é o método de ZELENY.

CONCEITUAÇÃO MATEMÁTICA

Este método gera uma representação exata do conjunto não dominado. Isto é realizado movimentando-se matemáticamente de um ponto extremo não dominado para pontos extremos não dominados adjacentes até que todas as soluções sejam encontradas.

O método utiliza o tableau de múltiplos objetivos que é a versão aumentada do tableau de simples objetivo, figura (II.8) com (n+m) variáveis de decisão , (sendo m variáveis de folga) n restrições e p objetivos.

	a_1	a_2	...	a_n	a_{n+1}	...	a_{n+m}	a_o
c_j^1	c_1^1	c_2^1	...	c_n^1	0	...	0	0
c_j^2	c_1^2	c_2^2	...	c_n^2	0	...	0	0
.	.	.		.	.		.	.
.	.	.		.	.		.	.
.	.	.		.	.		.	.
c_j^p	c_1^p	c_2^p	...	c_n^p	0	...	0	0
linhas associadas às colunas básicas								
f_j^1	f_1^1	f_2^1	...	f_n^1	f_{n+1}^1	...	f_{n+m}^1	$f_o^1 = z_1$
f_j^2	f_1^2	f_2^2	...	f_n^2	f_{n+1}^2	...	f_{n+m}^2	$f_o^2 = z_2$
.	.	.		.	.		.	.
.	.	.		.	.		.	.
.	.	.		.	.		.	.
f_j^p	f_1^p	f_2^p	...	f_n^p	f_{n+1}^p		f_{n+m}^p	$f_o^p = z_p$

FIGURA II.8 Tableau múltiplos objetivos

Na figura(II 8) as linhas associadas às colunas básicas aparecem em branco para evitar deixar confuso o tableau.

Cada variável tem um conjunto de custo reduzidos asociados : f_j .

$$f_j = [\, f_j^1 , \ldots , f_j^p \,]^T \qquad \text{II.19}$$

Ao introduzir uma variável (x_j) não básica na base x tem-se uma mudança no objetivo k ,dado por :

$$z_k' = z_k - \theta\, f_j^k \qquad \text{II.20}$$

A relação anterior estabelece que se x_j (que é atualmente igual a zero) é aumentada em θ e o objetivo k muda em ($-\theta\, f_j^k$), x_j incrementa o ojetivo k somente se $f_j^k < 0$ pois θ é maior que zero na viabilidade.

No tableau as linhas de custos reduzidos proporcionam informações que podem ser utilizada para determinar a não dominância da base atual e das bases vizinhas.

A seguir apresentam-se três teoremas formulados por ZELENY (1974), que utilizam as linhas de custos reduzidos do tableau. Seja B a matriz das colunas básicas.

TEOREMA II.1

Seja uma base viável atual. Se existe uma coluna não básica a_j, $j \notin B$, de maneira que $f_j^k \leq 0$, $k = 1,\ldots,p$ e $f_j^k < 0$ para ao menos um objetivo k então, a solução básica viável atual é DOMINADA.

O teorema revela que uma variável x_j pode ser trazida até a base com um valor positivo de maneira que todos os objetivos aumentem (caso de maximização) simultaneamente(ou ao menos um deles aumente sem prejudicar os outros) então, a solução atual x é dominada ao colocar a coluna x_j na base.

DEMONSTRAÇÃO :

Seja x a solução básica atual. Introduzindo a j-ésima coluna na base obtém-se a nova solução adjacente x' e : $z_k'(x') = z_k(x) - \theta f_j^k$ mas, devido que $\theta > 0$ e $f_j^k \leq 0$ com $f_j^k < 0$ para ao menos um k, isto implica que $z_k'(x') \geq z_k(x)$ para todo k e $z_k'(x') > z_k(x)$ para ao menos um $k=\bar{k}$, portanto, x' domina a x.

TEOREMA II.2

Seja uma solução básica viável atual. Se existe uma coluna não basica a_j, $j \notin B$ de modo que $f_j^k \geq 0$ com $k = 1,\ldots,p$ e $f_j^k > 0$ para ao menos um objetivo k então, a introdução de a_j na base produz uma solução dominada.

O teorema estabelece que se uma variável não básica entra na base e todos os objetivos se mantem ou diminuir em

(caso de maximização) simultaneamente, ou diminuir alguns objetivos sem incrementar os outros nestes casos, a nova solução seria pior que a atual, ou seja, a nova solução seria DOMINADA.

DEMONSTRAÇÃO :

Novamente, acrescentando a j-ésima coluna na base, o novo ponto extremo adjacente é obtido e: $z'_k(x') = z_k(x) - \theta f^k_j$. Dado que $\theta > 0$ e $f^k_j \geq 0$ com $f^k_j > 0$ para ao menos um k. Portanto, x' domina a x.

Para o teorema seguinte, se existem duas variáveis (x_j, x_q) não básicas a serem consideradas e θ_j o valor que a variável x_j poderia assumir se ela for introduzida na base e θ_q o valor de x_q . A relação (II.20) é :

$$z'_k = z_k - \theta_j f^k_j \qquad \text{II.21}$$

TEOREMA II.3

Seja uma solução viável atual, se existem duas colunas não básicas diferentes : a_j e a_q , com $j,q \notin B$ se :

$$\theta_j f^k_j \leq \theta_q f^k_q \;, \; k = 1,\ldots,p \qquad \text{II.22}$$

Então a solução básica viável resultante ao introduzir a_q na base atual seria DOMINADA em relação a base formada por a_j .

DEMONSTRAÇÃO :

Seja x a solução atual, introduzindo a j-ésima coluna obtém-se a solução x'' tal que : $z''_k(x'') = z_k(x) - \theta_j f^k_j$, acrescentando a q-ésima coluna tem -se uma solução x' tal que : $z'_k(x') = z_k(x) - \theta_q f^k_q$ e como $-\theta_j f^k_j \geq -\theta_q f^k_q$ com $-\theta_j f^k_j > -\theta_q f^k_q$ para ao menos um $k=\bar{k}$, $z''_k(x'') \geq z'_k(x')$ com $z''_k(x'') > z'_k(x')$ para ao menos um k. Portanto x'' domina x'.

Observa-se que os teoremas II.1 e II.2 relacionam a solução básica viável atual e seus vizinhos , teorema II.3 relaciona dois vizinhos da solução atual.

Os três teoremas constituen a base para o algoritmo de Zeleny que requer adicionalmente um subproblema para determinar a não dominância de uma solução básica viável.

No subproblema procura-se uma solução viável que melhore ao menos um dos objetivo sem prejudicar os outros. Se esta solução viável existe, então a solução atual é dominadae em caso contrario seria não dominada (em relação à solução atual).

Definem-se n+m variáveis de decisão da solução atual $(x'_1, \ldots, x'_{n+m})$, $x'_j > 0, j=1,\ldots,m$ e $x'_j = 0$, $j = m+1,\ldots,n+m$. As restrições para o subproblema são :

$$x \in X \qquad \text{II.23a}$$

$$z_k(x) \geq z_k(x'), \qquad k = 1,\ldots,p \qquad \text{II.23b}$$

Onde a primeira, requer que as restrições do problema original sejam satisfeitas e a segunda que a nova solução viável melhore ao menos um objetivo sem prejudicar os outros, $z_{\bar{k}}(x) > z_{\bar{k}}(x')$ para algum $k = \bar{k}$.

O subproblema tem como objetivo melhorar o máximo possível cada objetivo de seu atual nível. Equivalentemente isto pode ser feito transformando a última restrição numa igualdade.

$$z_k(x) - \delta_k = z_k(x'), \qquad k = 1,\ldots,p \qquad \text{II.24}$$

onde :

$\delta_k \geq 0$; k-ésima variável de folga.

Logo o subproblema é :

$$\text{Max } V = \sum_{k=1}^{p} \delta_k \qquad \text{II.25a}$$

s.a :

$$x \in X \qquad \text{II.25b}$$

$$z_k(x) - \delta_k = z_k(x'), \quad k = 1,\ldots,p \qquad \text{II.25c}$$

$$\delta_k \geq 0, \qquad k = 1,\ldots,p \qquad \text{II.25d}$$

A solução básica viável do problema múltiplos objetivos original x' é não dominada se V =0 é a solução ótima do subproblema. Isto quer dizer que não existe nenhuma outra solução viável que melhore o valor objetivo (δ_k>0) de alguma função z_k objetivo sem prejudicar os outros.

ALGORITMO DE ZELENY (Problema de maximização)

INICIALIZAÇÃO :

Determinar uma base viável : B

Se base viável não existe : STOP.

Senão : h = 1, r = 0

PASSO 1 :

Determinar x^h (sol. atual)

PASSO 2 :

Verificar se a solução atual aumenta algum objetivo :

Se $f_j^k \geq 0$ para algum k, $\forall$ j GO TO PASSO 14

Senão :

PASSO 3 :

Verificar se existe alguma coluna não básica com todos os custos reduzidos negativos :

Se $f_j \leq 0$ para algum $j \notin B^h$ (sol. atual é dominada) GO TO PASSO 13

Senão :

PASSO 4 :

Verificar se solução atual é não dominada, resolver subproblema de não dominância e :

Se x^h é dominada GO TO PASSO 6

Senão :

PASSO 5 :

Solução atual é não dominada ,logo incrementar contador :

r = r + 1

PASSO 6 :

Procura-se direção para continuar (TEOREMA 3) logo,verifica-se se existe coluna dominante para entrar na base :

Se $\theta_j f_j \leq \theta_q f_q$, $\forall\ q \in B^h$ e algum j GO TO PASSO 13

Senão :

PASSO 7:

Se nenhuma coluna não básica domina :

Se x^h é não dominada GO TO PASSO 11

Senão :

PASSO 8:

Se r ≠ 0 GO TO PASSO 11

PASSO 9:

Existe qualquer coluna não basica f_j não comparavel com zero :

Se não existe f_j GO TO PASSO 11

Senão :

PASSO 10:

Armazenar toda coluna j que leve até uma base não explorada.

PASSO 11:

Verificar seguimento de toda as direções promissórias :

Se não existe outra base armazenada : STOP

Senão :

PASSO 12:

Introduzir a_j na base B^{h+1} ,h = h +1

GO TO PASSO 1

PASSO 13 :

Se a_j leva a base não explorada GO TO PASSO 12

Senão GO TO PASSO 11

PASSO 14 :

Se x é unica (todos os custos reduzidos das variáveis não básicas são estritamente positivo) GO TO PASSO 5

Senão : go to passo 15

PASSO 15 :

existe ótimo altermativo. Procurar não dominada maximo de z_k, GO TO PASSO 5.

CAPITULO III

PROBLEMAS LINEARES DE FLUXOS EM REDES

A teoría de fluxos em redes tem sido útil para modelar uma série de situações que se apresentam em diversas áreas de engenharía, como por exemplo em engenharía de:transporte, produto, ou elétrica. A característica comum a todas elas é que uma rede é considerada para representar as ligações possíveis que unem o conjunto de elementos do sistema(nós),entre as quais "fluem" uma ou várias modalidades (pessoas ,veículos,etc). Em qualquer caso funções são associadas a cada ligação representando diversos tipos de custos ou lucros de utilização. Assim por exemplo num caso de fluxo de veículos numa rua (ligação) pode ser considerada uma função que indique o prejuizo causado ao meio ambiente. No caso geral tais funções podem ter estrutura não linear.

Em particular, quando é considerada somente uma função não linear para cada ligação,surgem os problemas de programação não linear em redes, que não são abordados nesse estudo e que tem sido extensamente estudados para o caso de fluxos em redes de transporte (ver por exemplo os trabalhos de SHEFFI,1985 e POTTS & LIVER, 1972).

Para o caso em que as funções das ligações são lineares tem-se os problemas de múltiplos objetivos, que embora tenham sido amplamente estudados para o caso geral (ver capitulo II),pouquisima atenção tem sido dada ao caso particular de redes, limitando-se apenas a uns poucos estudos sobre o Problema de Caminhos Minimos quando são consideradas duas funções (Programação Bi-Objetivo).

Por último, o caso mais simples, isto é ,quando existe uma única função,tem-se familias de problemas tal é o caso por exemplo, dos problemas de roteamento sobre os quais existem centenas de estudos (SATORU,1989) ou o Problema de Transporte Clássico e suas variantes proposto

inicialmente por HITCHOCK (1941) e que hoje em dia pode ser encontrado em um texto de Programação Linear (ver por exemplo, BAZARAA & JARVIS, 1977, MACULAN & PEREIRA , 1980; SYSLO, DEO & KOWALIK, 1983 ou TAHA, 1980), etc.

Nesse capitulo são estudados os problemas de objetivo simples (seção III 1.1) para os quais o presente estudo pretende apresentar a generalização para múltiplos objetivos tanto na formulação, como nos métodos de solução existente.

III 1 PROBLEMA MONO OBJETIVO .

III 1.1 FORMULAÇÃO

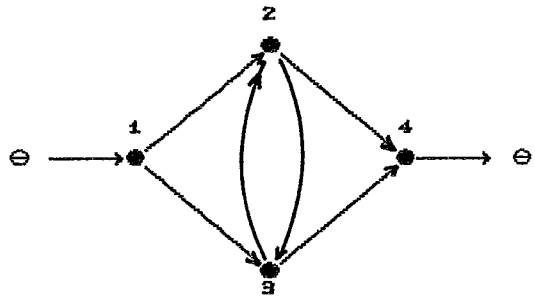
Nesta seção são estudados os problemas de fluxo de custo mínimo, caminho mínimo, fluxo de circulação de custo mínimo iniciando com uma revisão dos conceitos básicos.

III 1.1.1 DEFINIÇÕES BASICAS

Seja o digrafo formado por um conjunto de nós $N = \langle 1,\ldots,m\rangle$ e um conjunto de arcos direcionados $A = \langle (i,j), (k,l), \ldots s,t)\rangle$ que unem pares de nós de N, tal que $|A| = n$. A variável x_{ij} $\forall$ $(i,j) \in A$ representa o fluxo de algum ítem que passa pelo arco (i,j) e c_{ij} denota o seu custo unitário. Associado a cada nó da rede a variável b_i $\forall$ $i \in N$, indica a demanda de um item (no caso de $b_i < 0$) ou a oferta do item (no caso de $b_i > 0$). Quando $b_i = 0$ para algum $i \in N$ neste nó não existe nem oferta nem procura pelo ítem. Por outro lado é de interese determinar fluxos não negativos nos arcos, isto é , $x_{ij} \geq 0$ $\forall$ $(i,j) \in A$. Supõe-se adicionalmente que.

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = 0 \qquad \text{III.1}$$

Na figura III. 1 é representada uma rede com quatro nós.



N={1,2,3,4}; A={(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4)}
m=4, n=6.

FIGURA III.1 Exemplo de rede G = (N,A)

Dado um digrafo G = (N,A) tem -se as seguintes definições :

Caminho : Um caminho entre dois nós i_o e i_n se define como uma sequência de arcos da forma :

$$P = \{(i_o,i_1), (i_1,i_2),\ldots,(i_{n-1},i_n)\}$$

Cadeia : Se define uma cadeia entre os nós i_o e i_n como uma sequência de arcos não necessariamente todos direcionados no mesmo sentido.

Circuito : É um caminho em que o nó inicial é tambem o nó final, isto é um caminho fechado do tipo:

$$P_c = \{(i_o,i_1), (i_1,i_2),\ldots,(i_{n-1},i_o)\}$$

Ciclo : É uma cadeia fechada.

Arvore : É um grafo conexo e sem nenhum ciclo.

Arvore geradora : É uma árvore que inclue todos os nós do digrafo.

III.1.1.2 PROBLEMA DE FLUXO DE CUSTO MINIMO (PFCM)

Com base nas definições e suposições anteriores, pode-se formular o problema de fluxo de custo minimo como (BAZARAA,1979; KENNINGTON,J. e HELGASON, R. 1980)

$$\text{Mininizar} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, x_{ij} \qquad \text{III.2a}$$

s. a:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{j=1}^{m} x_{ji} = b_i, \qquad i = 1,\ldots,m \qquad \text{III.2b}$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad \forall (i,j) \in A \qquad \text{III.2c}$$

Que consiste em determinar uma distribuição de uma quantidade de fluxo θ que passa através da rede, entrando por um nó inicial s (nó 1 da figura III.1) e sai pelo nó t (nó 4 da rede da figura III.1). Notar que os somatórios em III.2b e em III.2a devem ser tomados sobre os arcos da rede.

A função objetivo do problema III.2 é o custo total da rede. As restrições III.2a são as chamadas Equações de Conservação de Fluxo em cada nó. Assim no caso de $b_i < 0$ o fluxo incidente ao nó i é dominada pelo fluxo que deixa o nó isto, porque esse é um nó consumidor. Uma análise contrária pode ser feita para o caso em que $b_i > 0$. Para o caso em que $b_i = 0$, todo o fluxo que chega ao nó deve ser igual ao fluxo que o abandona.

Problema III.2 é um problema de programação linear e portanto pode ser resolvido pelo método simplex clássico ou bem por algum método de ponto interior (KARMARKAR, 1984). Contudo o interesse do estudo se concentra em algoritmos que aproveitam a esparsidade da matriz de restrições III.2b, que de modo geral é o centro de qualquer estudo de fluxos em redes. Tal matriz, denominada de incidencia nó - arco (B) tem algumas carateristicas relevantes :

a) É composta de elementos 0,1 e -1.Isto pode ser visto diretamente na estrutura das restrições. Assim por exemplo para a rede da figura III.1, é dada por :

$$B = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} (1,2) & (1,3) & (2,3) & (2,4) & (3,2) & (3,4) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) Rank (B) = m-1

c) B é totalmente unimodular

III 1.1.3 PROBLEMA DE CAMINHO MINIMO (PCM).

O problema de encontrar o caminho mais curto é dos mais importantes em otimização,dado que ,uma grande variedade de situações podem ser formulados e resolvidos dessa maneira. Por outro lado, vários problemas complexos são comumente resolvidos utilizando métodos de caminho minimo como subrotinas.

O problema de caminho mínimo consiste em determinar o caminho unindo um determinado par de nós, que tenha o menor custo na rede G = (N ,A). Sendo que o custo do caminho é a soma dos custos dos arcos que o compõem.

Esse problema pode ser pensado em termos da formulação dada nas equações III.2. Assim determinar o caminho mínimo na rede G =(N,A) entre os nós s e t,é quivalente a enviar um fluxo unitário desde nó s ao t com minimo custo . Assim o vetor b da formulação III.2 deve ser tal que, b_s=1, b_t =-1 é b_j = 0 $\forall$ j $\neq$ s,t $\in$ N. Logo a formulação matemática é :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \qquad \text{III.3a}$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{j=1}^{m} x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = s \qquad \text{III.3b} \\ 0 & \text{se } i \neq s \text{ ou } t \qquad \text{III.3c} \\ -1 & \text{se } i = t \qquad \text{III.3d} \end{cases}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \quad \forall (i,j) \in A \qquad \text{III.3e}$$

Os somátorios em III.3a e III.3b devem ser considerados somente para arcos da rede .

A variável binaria para esse caso, indica se o arco (i,j) está ou não no caminho mínimo. Contudo, como a matriz de restrições é totalmente unimodular a solução inteira para o problema está garantida mesmo relaxando as restrições III.3e para $x_{ij} \geq 0 \ \forall (i,j) \in A$.

III.1.1.4 PROBLEMA DE FLUXO DE CIRCULAÇÃO DE CUSTO MINIMO (PFCCM).

Esse problema consiste em determinar o fluxo que circula numa rede fechada, isto é quando em cada nó da rede não existe nem demanda nem oferta pelo item estudado, ou em termos matemáticos quando o vetor b é nulo obtendo portanto a formulação :

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \qquad \text{III.4a}$$

s.a :

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{j=1}^{m} x_{ji} = 0 \quad \forall \ i = 1,\ldots,m \qquad \text{III.4b}$$

$$\mu_{ij} \geq x_{ij} \geq l_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A \qquad \text{III.4c}$$

O problema anterior é uma generalização tanto dos problemas apresentados na seção III.1.1.2 e III.1.1.3 como de outros problemas de fluxos em redes não considerados nesse estudo como o Problema de Fluxo Máximo e o Problema de Fluxo Viável (NGUYEN,1984). Neste caso são considerados límites sobre as variáveis de fluxo, isto é, limíte inferior l_{ij} e superior μ_{ij}.

Para colocar o problema de fluxo de custo mínimo desta maneira, um arco artificial deve ser adicionado nà

rede unindo o nó final t ao nó inicial s, com custo nulo e limíte inferior igual a zero. Para o exemplo da rede da figura III.1 tal arco aparece mostrado na figura III.2.

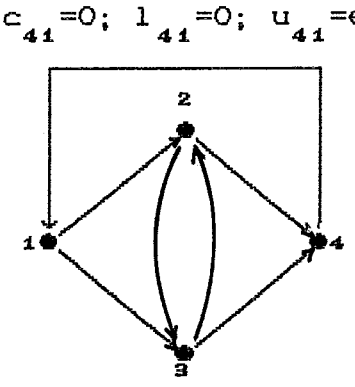


FIGURA III.2 Arco artificial para transformar PFCM em PFCCM.

O fato de designar um custo nulo no arco de retorno garante que na solução esse arco necessáriamente apresenta o fluxo total Θ circulando.

Para colocar o problema de caminho mínimo desde o nó s até o nó t da forma do III.4.a, tambem deve ser criado um arco artificial na rede unindo t com s e análogamente ao caso anterior com :

$$l_{ts} = \mu_{ts} = 1, \; c_{ts} = 0$$

Na figura III.3 é apresentada a situação para determinar o caminho mínimo unindo os nós 1 e 4.

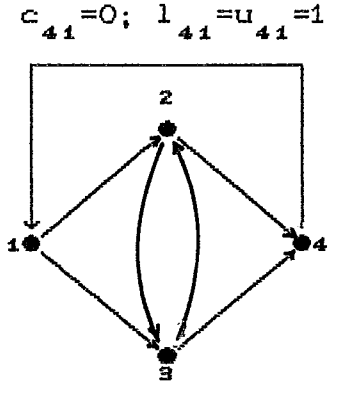


FIGURA III.3 Arco artificial para transformar PCM em PFCCM.

III.1.2 MÉTODOS DE SOLUÇÃO.

Nessa seção são analizados os métodos de solução tradicionalmente utilizados para resolver os problemas formulados na seção anterior. Primeiramente são estudados métodos aplicáveis na resolução dos problemas de fluxo(de custo mínimo e de circulação) e na segunda parte são abordados os métodos classicos relevantes na determinação dos caminhos mínimos.

III.1.2.1 MÉTODO SIMPLEX NA REDE

O primeiro método a estudar é adaptação do método simplex primal clássico para a solução de problemas de fluxo que é tambem uma extensão natural do trabalho de KOOPMANS (1949) que estuda o problema de transporte e suas relação com a programação linear .

Os passos gerais de método simplex consistem em primeiramente determinar uma solução básica inicial, depois calculam-se os custos reduzidos para cada variável não básica . Se o critério de otimalidade não é satisfeito (existe pelo menos um custo reduzido positivo ,no caso do problema ser de minimização), se escolhe a variável não básica para entra na base.Mantendo a viabilidade,é escolhida posteriormante a variável, que deixa a base atual. A nova base é estabelecida afetuando uma operação de pivoteamento tipo Gauss, tanto nas restrições como na função objetivo.

Esse método quanto aplicado ao problema de fluxo de custo mínimo formulado em equações III.2, assume várias características interessantes dadas a seguir :

a) Posto da Matriz

A matriz de restrições tem rank(B) = m-1 e portanto uma

variável artificial deve ser utilizada (lembrando que para uma matriz A (m*n) o método simplex normalmente supõe que rank (A=m). Essa variável pode ser considerada como um arco que sai de algum nó da rede e não tem destino, tal como mostrado na figura III.4 .

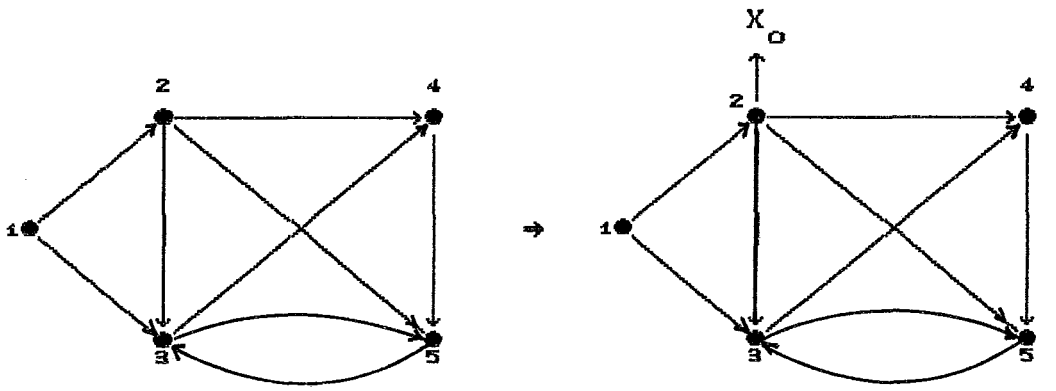


FIGURA III.4 Acréssimo de uma variável (arco) artificial.

b) O subgrafo básico.

Toda base para o problema é um conjunto de arcos formado por uma árvore geradora e o arco artificial. A figura III.5 mostra uma base para a rede da figura III.4 composta dos arcos {(1,2),(2,4),(2,5),(3,4),arco artificial}.

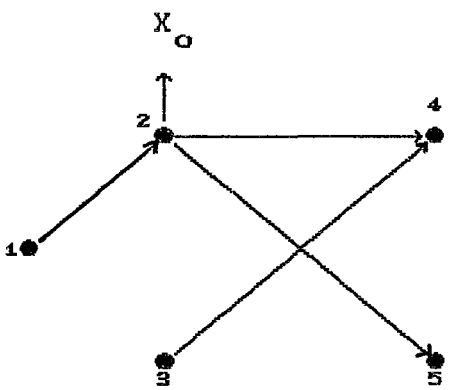


FIGURA III.5 Subgrafo básico.

c) Matriz Básica

A matriz composta das colunas correspondentes á árvore geradora e ao arco artificial é triangular inferior. Para o exemplo da figura III.5, essa matriz é.

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} (2,5) & (3,4) & (2,4) & (1,2) & x_o \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \text{nó} \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

d) Variáveis Básicas

Dada uma base, o valor das variáveis básicas calculadas no método simplex resolvendo o sistema B x_B = b, podem ser diretamente determinadas a partir de inspeção do subgrafo básico, começando pelo nó em que existe só um arco incidente ligando-o ao subgrafo, seja de entrada ou de saída. Isto porque a matriz básica é triangular inferior e o sistema pode ser resolvido recursivamente. Na matriz B do ítem c,os nós iniciais são 5 e 1 (figura III.5).

e) Custos Reduzidos.

Os custos reduzidos das variáveis não básicas no mêtodo simplex são calculados por $z_j - c_j$ ou $z_{ij} - c_{ij} = \omega\, a_{ij} - c_{ij}$, onde ω é o Qvetor de variáveis duais (um por cada nó), a_{ij} é a coluna não básica e c_{ij} o custo do arco (i,j). Para calcular ω resolve-se o sistema : $\omega B = c_B$, onde c_B é o vetor de custos das variáveis básicas. Esse sistema linear pode ser facilmente determinado pois dada as características da matriz, pode ser equivalentemente colocado como :

$$\omega_i - \omega_j = c_{ij},\ \forall\ (i,j) \text{ não básico} \qquad \text{III.5}$$

Assim como o sistema linear (III.5) possui n-m+1 variáveis e n-m restrições, podemos fixar $\omega_k = 0$, sendo k o nó do qual sai o arco artificial e ω_j para todos os nós j adjacentes ao nó k. E de essa maneira recursiva, podem ser determinados todos os elementos do vetor ω.

Com o vetor ω conhecido, os custos reduzidos dos arcos não básicos podem ser obtidos substituindo na expressão :

$$z_{ij} - c_{ij} = \omega^T a_{ij} - c_{ij} = \omega_i - \omega_j - c_{ij} \qquad \text{III.6}$$

f) O arco que entra na base

O critério continua igual que no método simplex original, isto é entra o arco (k,l) tal que :

$$z_{kl}-c_{kl}=\max\{w_i-w_j-c_{ij};\ w_i-w_j-c_{ij}\},\ 0\ \forall(i,j)\ \text{não básico} \qquad \text{III.7}$$

g) O arco que sai da base.

O arco que entra na base forma um ciclo com algum ou todos os arcos da base atual. Por outro lado é sabido que ao alterar adequadamente o fluxo na mesma quantidade em todos os arcos do ciclo ,a conservação de fluxo na rede se mantém. Portanto a variável que sai é aquela cujo fluxo se torna nulo mais "rápidamente", isto também determina a quantidade na qual os arcos serão alterados no ciclo. Assim por exemplo, suponha que na figura III.5 o arco no básico (4,5) entra na base, isto é, esse arco é identificado a partir da equação (III.7). O ciclo formado com tal arco é {(2,4),(4,5),(2,5)} e o fluxo é aumentado numa quantidade $\theta > 0$, em todos os arcos no mesmo sentido de (4,5) é diminuindo em θ para aqueles arcos que tem sentido oposto no ciclo, tal como mostrado na figura III.6.

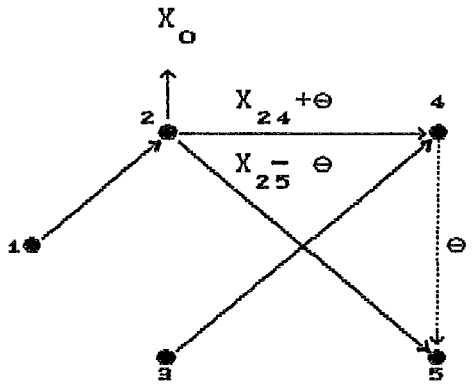


FIGURA III.6 Determinação do arco que sai da base.

Assim, identificando por (r,s) o arco que entra na base e por P_{rs} o conjunto de arcos no sentido oposto a (r,s) no ciclo formado, a quantidade $\theta = x_{rs}$ é determinada por. :

$$\theta = \text{mínimo}(x_{ij}, \forall (i,j) \in P_{rs}) \qquad \text{III.8}$$

e o arco que sai :

$$(t,u) \in P_{rs} \; ; \quad x_{tu} - \theta = 0 \qquad \text{III.9}$$

h) Solução Inicial.

Quando não se dispoe de uma solução inicial, o método das duas fases pode ser utilizado para determiné-la. As variáveis artificiais agregadas ao problema formam uma matriz com um +1 e um -1 em cada coluna e o resto dos elementos nulos. Portanto essa matriz pode ser interpretada como uma matriz de incidencia nó - arco . Equivalentemente no dígrafo um conjunto de novos arcos são agregados unindo cada um dos nós a um novo nó artificial. Assim a I fase é aplicada, determinando uma solução básica inicial para o problema original. Este método foi implementado na linguagem Pascal em microcomputador , com geração de redes aleatorias com algums resultados númericos apresentados no apéndice III.

III.1.2.2 MÉTODO OUT OF KILTER.

O método foi originalmente desenvolvido por FULKERSON (1961), para resolver o problema de fluxo de circulação de custo mínimo formulado sobre uma rede G = (N,A) e definido em equações III.4. O método se baseia numa otimização primal -dual.

Associam -se variáveis as restrições de conservação de fluxo; h_{ij} para restrições do tipo $x_{ij} \leq \mu_{ij}$ e v_{ij} para restrições de limite inferior $x_{ij} \geq l_{ij}$. Assim o problema dual é formulado por :

$$\text{Max} \quad Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} l_{ij}\, v_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \mu_{ij}\, h_{ij} \qquad \text{III.10a}$$

s.a :

$$w_i - w_j + v_{ij} - h_{ij} = c_{ij} \quad i,j = 1,\ldots,m \qquad \text{III.10b}$$

$$h_{ij}, v_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in A \qquad \text{III.10c}$$

$$w_i \text{ irrestrito } \forall\, i \in N \qquad \text{III.10d}$$

O problema dual tem uma solução que pode facilmente ser determinada por simples inspeção . Para isto, escolhe-se um vetor fixo ω, de modo que III.10b e III.10c podem ser colocadas como :

$$v_{ij} = h_{ij} + (c_{ij} - w_i + w_j),\ h_{ij} \geq 0,\ v_{ij} \geq 0 \ \forall (i,j) \in A \qquad \text{III.11}$$

Essa corresponde à região viável do problema dual que num plano v_{ij} vs h_{ij}, é uma linha reta com declive igual a 1 e interseção com o eixo igual a $k_{ij} = \omega_i + \omega_j$, tal como mostrado na figura III.7.

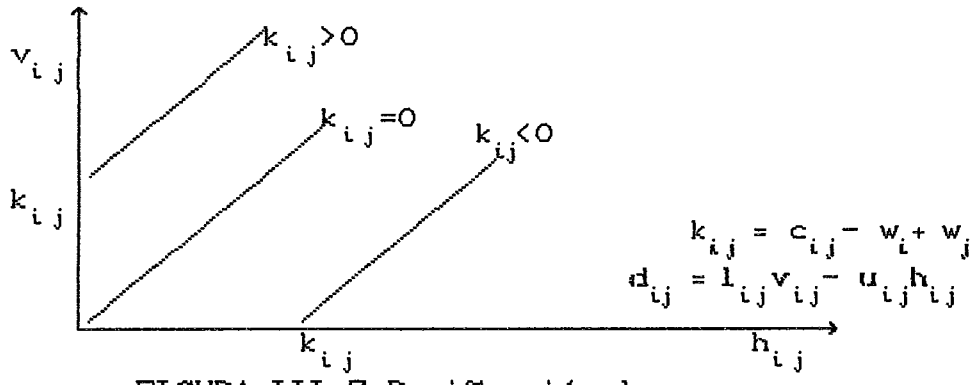


FIGURA III.7 Região viável

Assim, a solução h^*_{ij} , v^*_{ij} para o problema dual com o vetor ω fixo, é dada por :

$$v^*_{ij} = \text{máximo}(0 \ , \ c_{ij} - \omega_i + \omega_j \ ) \qquad \text{III.12a}$$

$$h^*_{ij} = \text{máximo} \ \{ \ 0, - (c_{ij} - \omega_i + \omega_j) \} \qquad \text{III.12b}$$

Por outro lado a condição de folga complementar para os problemas primal e dual no ponto $(x^*_{ij} \ , \ h^*_{ij} \ , \ v^*_{ij} \ )$ é dado por :

$$(x^*_{ij} - l_{ij}) v^*_{ij} = 0 \qquad \forall (i,j) \in A \qquad \text{III.13a}$$

$$(\mu_{ij} - x^*_{ij}) h^*_{ij} = 0 \qquad \forall (i,j) \in A \qquad \text{III.13b}$$

Definindo $z_{ij} - c_{ij} \equiv \omega_i - \omega_j - c_{ij} \ \forall (i,j) \in A$ as equações (III.12) se transformam em :

$$v^*_{ij} = \text{maximo} \ \{ \ 0 \ , \ - (z_{ij} - c_{ij}) \ \} \qquad \text{III.14a}$$

$$h^*_{ij} = \text{maximo} \ \{ \ 0, \ z_{ij} - c_{ij} \ \} \qquad \text{III.14b}$$

Combinando as equações (III.13) e (III.14), obtem-se as condições de otimalidade do problema dadas por :

$$z_{ij} - c_{ij} < 0 \quad \Rightarrow \quad v^*_{ij} > 0 \quad \Rightarrow \quad x^*_{ij} = l_{ij} \ , \forall (i,j) \in A \qquad \text{III.15a}$$

$$z_{ij} - c_{ij} > 0 \quad \Rightarrow \quad h^*_{ij} > 0 \quad \Rightarrow \quad x^*_{ij} = \mu_{ij} \ , \forall (i,j) \in A \qquad \text{III.15b}$$

$$z_{ij} - c_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad l_{ij} \leq x^{*}_{ij} \leq \mu_{ij} \ , \forall \ (i,j) \in A$$

III.15c

Essas condições podem ser representadas graficamente para cada arco, tal como na figura III.8

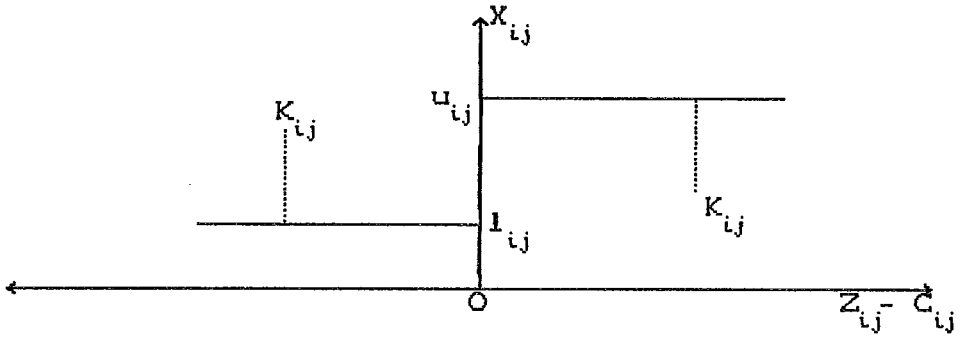


FIGURA III.8 Condições de otimalidade

Daqui se definem dois estados em que cada arco pode estar, isto é :

- Estado " in kilter " : No caso em que o arco tem um fluxo sobre as retas de otimalidade da figura III.8, ou equivalentemente que satisfaz equações (III.15).

- Estado " out of kilter " : no caso em que o arco não está em estado "in kilter ".

Logo, dado um fluxo viável $\hat{x} = (\hat{x}_{11} \ , \ \ldots \ , \hat{x}_{st})$, o algoritmo out of kilter consiste em empurrar todos os arcos até a condição de otimalidade, ou em outras palavras, passar aqueles arcos que já estão " in kilter " inalterados. Para atingir esse objetivo se define o número kilter para cada arco, que expresa o grau de afastamento da otimalidade, ou a alteração necessária que deve ser feita no fluxo de cada arco para atingir a otimalidade (condição III.15).

A convergência do algoritmo é garantida se em cada etapa os números kilter não são piorados. A estratégia do algoritmo é a seguinte.

Inicio

Fluxo inicial viável $x = 0 \ \forall (i,j) \in A$

Variáveis duais viável $\omega = 0 \ \forall \ j \in N$

Identificar o estado de cada arco (In kilter ou out of kilter)

Enquanto exista pelo menos um arco out of kilter, faça

Escolha um arco em estado out of kilter;

Executar fase primal : Determinar todas as alterações de fluxo possíveis de ser feitas nos arcos que não prejudique nenhum numero Kilter;

Executar fase dual : Determinar novas variáveis duais ω_i, $\forall$ i $\in$ N que garantam que os números kilter de cada arco não pioram;

Fim enquanto;

Fim.

FASE PRIMAL

Dado um arco numa rede, é possivel produzir uma troca nos fluxos dos arcos, mantendo a conservação de fluxo na rede desde que tal troca seja efetuado num ciclo que contenha esse arco. Nesse caso então, se constrói um ciclo que contenha o arco out of kilter e os fluxos são alterados de acordo com o maximo permitido e de maneira que nemhum fluxo se torne negativo. Para determinar essa quantidade deve se ter em conta o gráfico da figura III.8 para cada arco. Assim por exemplo numa etapa k, um arco out of kilter no qual $z_{ij} - c_{ij} > 0$ e $x_{ij} < \mu_{ij}$, a maxima alteração é dada por $(\mu_{ij} - x^k_{ij})$ pois o $x^{k+1} = x^k_{ij} + (\mu_{ij} - x^k_{ij}) = \mu_{ij}$. Para garantir que o número kilter aproximar o arco do estado "in kilter ", arcos sobre a linha da figura III.8, tem o seu fluxo diminuido e arcos por baixo dessa linha tem seu fluxo aumentado.

FASE DUAL

Quando não é possivel encontrar um ciclo contendo um arco "out of kilter " na fase primal, os valores de $\omega_j \ \forall \ j \in N$ devem ser alterados . A técnica para fazer isto sem piorar nenhum K_{ij} é escolher w_j de maneira a movimentar o estado dos arcos horizontalmente na figura III.8 .

Um limite superior para a complexidade do algoritmo é O(Kn) onde : $K = \sum_{(i,j)\in A} K^{o}_{ij}$ ou, seja a soma dos numeros kilter iniciais.

III.1.2.3 MÉTODO DE INCREMENTOS DE CUSTO MÍNIMO.

Esse algoritmo foi desenvolvido por BUSACKER e GOWEN (1965) para resolver um problema no formato daquele formulado em equações (III.2), para enviar um fluxo entre um nó origem s e um nó destino t, de modo que o vetor b assuma a forma :

$$b_i = \begin{cases} \theta & \text{para } i = s \\ -\theta & \text{para } i = t \\ \phi & \forall\ i \neq s,t \in N \end{cases}$$

A idéia do método é tentar enviar o fluxo θ por etapas, considerar em cada etapa o envio através da rota mais "barata " entre o nó s e t. Assim, na primeira etapa é enviada a maior quantidade de fluxo que for possivel pela rota mais barata da rede. O restante deve ser enviado numa segunda etapa que será mais cara que a primeira. No processo em cada etapa se faz necessário determinar uma cadeia incremental de fluxo (rota). Tal cadeia corresponde a um caminho numa rede auxiliar G=(N,A') construida com base na rede G = (N,A) para um fluxo dado x. Considere u_{ij} capacidade do arco $(i,j) \in A$ e u'_{ij} capacidade na rede G'. Analogamente para o custo (c_{ij} e c'_{ij}). A rede G'(N',A') é construida da seguinte maneira :

$N' = N$

$A' = A$

Se $(i,j) \in A$; $x_{ij} > 0 \Rightarrow \exists (j,i) \in A$ com $c'_{ji} = -c_{ij}$

e $u'_{ji} = x_{ij}$

Se $(i,j) \in A$; $x_{ij} < u_{ij} \Rightarrow \exists (i,j) \in A'$ com $c'_{ij} = c_{ij}$

e $u'_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$

Se $(i,j) \in A$; $x_{ij} = u_{ij} \Rightarrow \exists (i,j) \in A'$ com $c'_{ij} = \infty$

e $u'_{ij} = u_{ij} - x_{ij} = 0$

Logo encontrando o caminho mínimo (de custo mínimo) em G', P_{st} se determina a quantidade de fluxo que pode passar pelo caminho com :

$$\delta^k = \text{minimo} \{ u'_{ij} ; \forall (i,j) \varepsilon P_{st} \} \qquad \text{III.16}$$

O procedimento continua até que todo o fluxo é "enviado " de s a t . Quando utilizado o algoritmo Moore Dijkstra para calcular os caminhos mínimos a complexidade do método é $O(m^2 n)$.

III.1.2.4 MÉTODOS PARA O PROBLEMA DE CAMINHO MINIMO

O problema de caminho mínimo pode ser resolvido, utilizando quaisquer dos métodos antes apresentados. Contudo métodos mais eficientes ainda, tem sido formulados. Dado que para tais métodos existe uma extensa literatura (GONDRAN e MINOUX, 1984; KENNINGTON e HELGASON, 1980,etc) nessa seção é apresentada apenas uma breve síntese dos antecedentes necessários para a melhor compreensão de seções posteriores.

Diversas situações, tem sido diferentemente abordados nos métodos. Essas se caracterizam pela existéncia ou não de arcos com custos negativos, pela existencia de circuitos na rede e pelo fato de determinar o caminho mínimo entre um par de nós ou entre todos os pares de nós da rede. A seguir são

apresentados os algoritmos clássicos ,supondo em todos os casos que não existem circuitos com custos total negativos (soma dos custos dos arcos que compõem).

a) ALGORITMO DE MOORE & DIJKSTRA

Uns dos primeiros métodos utilizados na resolução de problema para uma rede G = (N,A) foi o algoritmo formulado primeiramente por MOORE (1957) e quase simultaneamente por DIJKSTRA (1959),que permite determinar o caminho mínimo entre um nó origem e todos os outros quando os custos dos arcos são não negativos. O algoritmo procede em m-1 iterações (lembrando que m é o número de nós), identificando uma partição do conjunto de nós em "permanentes " P e "temporarios" T. Os nós que pertencem ao conjuno P são aqueles para os quais já foi calculado o custo do caminho mínimo entre o nó origem (s) e esse nó. Inicialmente, somente o nó origem está no conjunto P. Os nós restantes estão em T. O algoritmo finaliza quando o conjunto é vazío e todos os nós da rede estão no conjunto P.

ALGORITMO B

INICIO

$P \longleftarrow \{s\}$, $T \longleftarrow N - \{s\}$;

$\pi_s \longleftarrow 0$;

$$\pi_j \longleftarrow \begin{cases} c_{sj} & (s,j) \in A \\ \infty & \text{c.c.} \end{cases} ;$$

Enquanto $T \neq \phi$ faça

Encontrar $k \in T$ tal que $\pi_k = \min_{j \in T} \{\pi_j\}$;

$P \longleftarrow P \cup \{k\}$;

$T \longleftarrow T - \{k\}$;

$\pi_j \longleftarrow$ minimo $\{ \pi_j , \pi_k + c_{kj} \}$ $\forall j \in T$ tal que $(k,j) \in A$;

Fim enquanto ;

Fim.

O algoritmo B, apresenta o seguinte procedimento. Em cada etapa é escolhido um nó k, desde o conjunto T e

colocado no conjunto P. π_j denota o custo do caminho desde o nó origem até o nó j a cada vez que um nó k passa a ser permanente o custo é atualizado, para os restantes nós temporários.

O algoritmo tem complexidade $O(m^2)$ que pode ser reduzida para redes esparsas em até $O(n \log m)$.

b) MÉTODO DE FORD & BELLMAN

Esse método pode ser atribuido a FORD(1956) e BELLMAN (1958) e aceita a existência de arcos com custos negativos. Consiste básicamente em resolver as equações de Bellman para a rede (G = N,A), sendo o nó 1 o origem, tais equações são :

$$\pi_1 = 0 \qquad \text{III.17a}$$

$$\pi_j = \text{minimo} \{ \pi_i + c_{ij} \} \qquad j= 2,3,\ldots,n \qquad \text{III.17b}$$

A solução das equações (III.17) fornece o custo dos caminhos da origem até nó j. Para resolvê-las pode se utilizar um método de aproximações sucessivas, para o qual a condição inicial requerida é :

$$\pi_1^1 = 0 \text{ e } \pi_j^1 = c_{1j},\ j = 2,3,\ldots,m \text{ se } \exists (1,j) \in A \qquad \text{III.18}$$

Em qualquer etapa k os valores das variáveis π podem ser estimadas por :

$$\pi_j^{k+1} = \text{mínimo} \{\pi_j^K , \text{mínimo}_{i \neq j} \{\pi_i^k + c_{ij}\}\}$$

$$\forall\ j=1,\ldots,m, \text{se } \exists_{i \neq j}(i,j) \in A \qquad \text{III.19}$$

Claramente pode ser visto na equação (III.19) que :

$$\pi_j^1 \geq \pi_j^2 \geq \pi_j^3 \ldots \quad \forall\ j = 1,\ldots,m \qquad \text{III.20}$$

Isto é, o valor da variável nunca aumenta em cada nó e portanto o algoritmo converge. A equação (III.19), tenta

diminuir o custo até um determinado nó j, encontrando o nó antecessor através do qual se chega mais "rápido" (menor custo) em j . No final do processo cada variável π armazena custo do caminho mínimo até esse nó,desde o nó origem,neste caso o nó 1. O procedimento é mostrado no algoritmo C.

ALGORITMO C

INICIO

$\pi_i^0 \longleftarrow 0$; $\pi_j = \infty \quad \forall\, i \neq 1 \in N$;

$k^1 \longleftarrow 0$;

Enquanto $\pi_j^k \neq \pi_j^{k-1} \quad \forall\, j \in N$, e $K \leq m-1$ faça

$\pi_1^{k-1} \longleftarrow 0$;

$\pi_j^{k-1} \longleftarrow$ mínimo $(\pi_j^k$, mínimo $(\pi_j^k + c_{ij}))$

$\forall\, j = 2,\ldots,m$,se $\exists\, (i,j) \in A$;

$K \longleftarrow K + 1$;

Fin enquanto

Se $k = m \Rightarrow \exists\, (i,j)$ circuito de custo negativo

Fim

A complexidade do algoritmo é $O(m^3)$.

C) Método de Floyd & Warshall

Os métodos anteriores permitem obter o caminho de circuito mínimo desde um nó até todos os outros quando não existem circuitos de custo total negativo. O algoritmo de FLOYD (1962) e WARSHLL (1962) permite obter o caminho entre todos os pares de nós da rede em $O(n^3)$ etapas. A idéia do algoritmo é simples: Seja μ_{ij}^k o custo do caminho mínimo desde o nó i até o nó j, sujeito a condição que o caminho não passa pelos nós h,h+1,...,n (exceto i e j). Assim um caminho P_{ij} que não passa pelos nós h+1,h+2,...,n pode ter duas situações :

i) P_{ij} não passa pelo nó h $\Rightarrow \mu_{ij}^{h+1} = \mu_{ij}^h$ III.21a

ii) P_{ij} passa pelo nó h $\Rightarrow \mu_{ij}^{h+1} = \mu_{ih}^h + \mu_{hj}^h$ III.21b

Assim :

$$\mu_{ij}^{h+1} = \text{mínimo} \langle \mu_{ij}^{h},\ \mu_{ih}^{h} + \mu_{hj}^{h} \rangle \quad \forall\ i \neq j \neq h \qquad \text{III.22a}$$

Claramente μ_{ij}^{h+1} é o custo do caminho mínimo entre i ej. O procedimento é formalizado no algoritmo D,onde o resultado é armazenado na propia matriz de custo.

ALGORITMO D

INICIO

$c_{ii} \longleftarrow 0;\ \forall\ i \in N$

$c_{ij} \longleftarrow = \infty\ ;$ se $(i,j) \notin A$

Para k :=1 até m faça

Para i := 1 até m faça

Para j:= 1 até m faça

$t \longleftarrow c_{ik} + c_{kj}$

Se $t < c_{ij}$ custo $c_{ij} \longleftarrow t_{ij}$

Fim ;

Fim.

III.1.2.5 ALGUNS ANTECEDENTES NUMÉRICOS

Em todo problema de rede a estrutura de dados se torna importante para avaliações numéricas dos algoritmos. Este aspecto é detalhadamente estudado por GONDRAN e MINOUX (1984) e HOROWITZ E SAHNI (1987) para o caso geral. Para uma descrição detalhada nesse sentido, em relação ao algoritmo simplex na rede se recomenda o trabalho de BRADLEY et alii (1977).

Existem na literatura diversos trabalhos, mostrando programas computacionais para os diversos problemas antes apresentados, é o caso do estudo de PHILLIPS e GARCIA _ DIAZ (1982) que apresenta rotinas em linguagem FORTRAN para os algoritmos Out of Kilter, Moore- Dijkstra e Floyd & Warshol, ou bem o estudo de SYSLO, DEO e KOWALIK (1983) que apresenta rotinas em linguagem Pascal para os algoritmos de incrementos de custo mínimo,Moore Dijkstra e Ford - Bellman.

Problemas em Fortran para problemas de fluxo tambem podem ser encontrados em KENNINGTON e HELGASON (1980). Em linguagem Algol, existe o estudo de BRAY e WITZGALL (1969) para problemas de fluxo de custo mínimo.

Comparações numéricas entre os algoritmos de fluxo (GLOVER et ali,1974) parecem mostrar que o método simplex na rede é geralmente o mais aficiente. Por outro lado o algoritmo de Custo Incremental proporciona resultados com tempos de operação pequenos quando aplicados a redes de grande porte densas e com 80 até 100 nós (SYSLO et alii, 1984).

Os algoritmos de caminho mínimo da seção anterior (A,B,C) tal como apresentados obtêm o caminho de custo mínimo entre um nó origem e todos os outros nós da rede. contudo esse também podem ser utilizados par obter os caminhos entre todos os pares de nós da rede, simplesmente fefinindo cada um dos nós como nó inicial para o algoritmo. Feito isso e comparados numéricamente os três algoritmos (SYSLO et alii, 1983) em redes densas o algoritmo de de Moore - Dijkstra é mais eficiente enquanto ao tempo de execução, da ordem de 8 segundos (rede 100 nós) num computador Amdahl 470 V/8.

III.2 PROBLEMAS DE MULTIPLOS OBJETIVOS

III.2.1 FORMULAÇÃO

Nesta seção são estudados os métodos de solução existentes na literatura para problemas de múltiplos objetivos em redes e primeiramente se faz sua formulação.

III.2.1.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

Seja o digrafo G = (N,A) formado por um conjunto de nós N =(1,...,m) e um conjunto de arcos direcionados A = ((i,j), (k,l),...(s,t)) que unem pares de nós tal que |A| = n, a variável x_{ij} $\forall$ (i,j) $\in$ A representa o fluxo de algum item que passa pelo arco (i,j) e onde: $c^1_{ij}, c^2_{ij}, \ldots c^k_{ij}$ (P = 1,...,k; onde :P é o numero de objetivos) denota os custos unitários relacionados aos k objetivos. Em cada nó da rede a variável $b_i \forall$ i $\in$ N (tal como no caso de III.1) indica a demanda de um item se $b_i < 0$ ou bem a oferta no caso de $b_i > 0$. Quando $b_i = 0$ para algum i $\in$ N nesse nó não existe nem oferta nem procura pelo item i, mantendo-se apenas a conservação de fluxo. Por outro lado, é de interesse determinar fluxos não negativos nos arcos, isto é, $x_{ij} \geq 0$ $\forall$ (i,j) $\in$ A e respeitando a capacidade dos arcos, $x_{ij} \leq u_{ij}$. Sopõe-se adicionalmente que :

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = 0$$

As definições de rede mencionadas na seção III.1 tais como: caminho,cadeia,circuito, ciclo, árvore e árvore geradora são igualmente válidas aqui.

III.2.1.2 FORMA GERAL

Em geral o problema de objetivos múltiplos em redes com n variaveis de decisão, m restrições e p objetivos pode ser formulado como:

$$\text{Min} \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}^{1} x_{ij}, \ \ldots, \ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}^{p} x_{ij} \right] \qquad \text{III 23a}$$

s.a. :

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{j=1}^{m} x_{ji} = b_i, \qquad i = 1, \ldots, m \qquad \text{III.23b}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A \qquad \text{III.23c}$$

onde :

$\sum\sum c_{ij}^{1} x_{ij}, \ldots, \sum\sum c_{ij}^{p} x_{ij}$; são as p funções objetivos consideradas.

O conjunto de fluxos viáveis, isto é, que satisfazem as equações III.23b e III.23c é denotado por "X".

Pode-se observar que as funções objetivos individuais na relação (III.23a) são somente listadas, elas não são somadas, multiplicadas nem combinadas.

Em alguns casos práticos os objetivos podem até ser conflitantes isto quer dizer que, enquanto se minimiza um, pode-se querer maximizar outros.

Assim como no caso dos problemas mono objetivo em ótima redes (SOR) onde afinalidade é a de identificar a solução sendo esta única, no problema de múltiplos objetivos em redes (MOR), tenta-se determinar um conjunto de soluções dado que as soluções que minimizam um objetivo, geralmente não minimizam outros.

O objetivo de otimizar em MOR é encontrar o conjunto de soluções não dominadas (não inferiores), lembrando que por definição uma solução é definida não dominada se não existe alguma outra solução viável que proporcione uma melhora em algum objetivo sem prejudicar os outros.

Neste trabalho para gerar soluções não dominadas utiliza-se um procedimento baseado no SOR. O método gera uma representação exata do conjunto não dominada, que é atingido avançando desde um ponto extremo não dominada até pontos extremos não dominadas adjacentes , até que todos os pontos extremos dominadas tenham sido visitados.

III.2.2 MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Nesta seção são apresentados alguns métodos de solução existentes na literatura para diversos problemas de fluxos em redes e no capítulo seguinte é descrito o método proposto

III.2.2.1 MÉTODO DE CLÍMACO (CLÍMACO e MARTINS, 1982)

É um método para resolver um problema de caminhos mínimos com dois objetivos (bi-objetivo); uma primeira função expressando custos e uma outra que expressa tempo na rede.

O método utiliza um esquema de etiquetasmúltiplas para obter o conjunto de soluções não dominadas resolvendo uma sequencia de k-caminhos mínimos. A eficiênciado método depende fundamentalmente da rotina escolhida para o subproblemaedo número de caminhos mínimos pesquisados (o teste de parada é baseado nesse número de caminhos)

Para entender o método com mais detalhe consideram-se as seguintes definições:

Seja a rede G(N,A) definida em III.2.1.1 e então :

t_{ij} : Tempo necessário para deslocar-se do vertice i até o vértice j no arco (i,j),corresponde a um valor inteiro positivo.

c_{ij} : Custo associado ao arco (i,j) é também correspondendo a um valor inteiro positivo.

l : Caminho direto sem circuito para ir do vértice i_1 até o vertice i_2 segundo :

$$l = \langle (i_1, i_k), \ldots (i_z, i_2) \rangle$$

$\bar{L}$: Conjunto de todos os caminhos existentes entre i_1 e i_2, onde i_1 e $i_2 \in N$. Se $i_1 = 1$ e $i_2 = n$ o conjunto é denominado L.

$$c(l) = \sum_{(i,j) \in l} c_{ij} \qquad \text{III.24}$$

$$t(l) = \sum_{(i,j) \in l} t_{ij} \qquad \text{III.25}$$

$$l_1 : \langle\ l \in L \in \arg \min_{l \in L} t(l)\ \rangle$$

$$l_2 : \langle\ l \in L \in \arg \min_{l \in L} c(l)\ \rangle$$

Onde :

$\arg \min_{l \in L} t(l)$: conjunto dos caminhos $l \in L$ no qual $t(l)$ é minimo.

$\arg \min_{l \in L} c(l)$: conjunto dos caminhos $l \in L$ no qual $c(l)$ é minimo.

Seja a função f uma função vetorial de $\bar{L} \longrightarrow E$ definida como :

$$f(l) = (c(l), t(l)) \qquad \text{III.26}$$

Denota-se por L_N o conjunto de caminhos não dominadas, matematicamente para este caso :

$$L_N = \langle l \in L \mid \text{se } f(q) \leq f(l) \Rightarrow q \in \bar{L} - L \rangle \qquad \text{III.27}$$

Os valores associados a tais caminhos são :

$$V_N = \{ f(l) \mid l \in L_N \} \qquad \text{III.28}$$

Sejam adicionalmente :

$$\hat{c} = \min_{l \in L_1} c(l) \qquad e \qquad \hat{t} = \min_{l \in L_2} t(l) \qquad \text{III.29}$$

Do capitulo II sabe-se que :

$$(\hat{c}, \min_{l \in L} t(l)) \in V_N$$

$$(\min_{l \in L} c(l), \hat{t}) \in V_N$$

Os autores demonstram que se $(c(l), t(l)) \in V_N$ então $c(l) \leq \hat{c}$ e $t(l) \leq \hat{t}$

ALGORITMO D

Passo 0 : $l_N = \emptyset$.
determinar caminho mais rapido p'_1 e $\hat{c} = c(p'_1)$
determinar o caminho mais barato p_1
Se $t(p_1) = t(p'_1)$ faça $\hat{c} = c(p_1)$
$\delta = \{p_1\}$, $f_1 = c(p_1)$, $f_2 = t(p_1)$
$j = 2$

Passo 1 : Escolher o j-esimo caminho mais barato p_j
se $t(p_j) = t(p'_j)$ faça $\hat{c} = \min \{c(p_j), \hat{c}\}$

Passo 2 : Se $c(p_j) = f_1$ go to passo 4

Passo 3 : Se $t(p_j) \geq f_2$ go to passo 5
Senão :
$l_N = l_N \cup \delta$
$\delta = \{p_j\}$
$f_1 = c(p_j)$, $f_2 = t(p_j)$
go to passo 5

Passo 4 : se $t(p_j) > f_2$ faça $j = j + 1$ go to passo 1
Se $t(p_j) < f_2$ faça $\delta = \{p_j\}$, $f_2 = \{p_j\}$ go to passo 5
Se $t(p_j) = f_2$ faça $\delta = \delta \cup \{p_j\}$, $j = j + 1$ go to passo 1

Passo 5 : Se $c(p_j) \leq \hat{c}$ faça $j = j + 1$ go to passo 1
Senão

$l_N = l_N \cup \delta$
STOP

O algoritmo contém duas fases principais. Na primeira uma rotina de K caminhos mínimos determina o conjunto de caminhos mais baratos (caminhos de custo mínimo , passo 1), neste conjunto encontram-se o conjunto de caminhos não dominadas aproximados procurado. Dois vetores são formados; um vetor de custos (ordenados de maneira não decrescente) e outro vetor contendo os caminhos que geram tais custos.

O algoritmo efetua uma revisão ordenada do vetor de caminhos de maneira a estabelecer aqueles que geram um par $(c(p_j), t(p_j))$ não dominado. Desse modo o primeiro par encontrado corresponde ao primeiro caminho do vetor (que tem os custos dos caminhos mínimos entre s e t), e que é identificado por a letra A da figura III.9. Os outros pares não dominadas são obtidos afetuando comparações para verificar a condição de não dominância (passo 3).

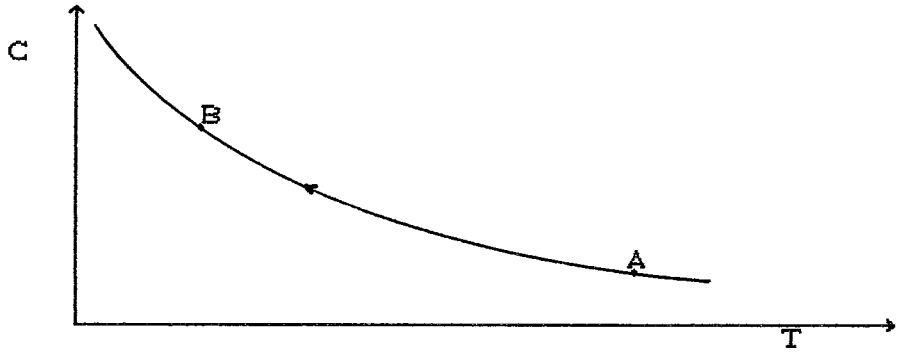


FIGURA III.9 Trajectória do algoritmo de custo

Ao se ter mais de um caminho com o mesmo custo (passo 2) , aquele que apresentar o menor tempo é candidato a ser não dominada. Na realidade ele será um caminho não dominado se e somente se, seu tempo é dominada ao menor tempo dos caminhos que pertencem ao conjunto não dominada na iteração correspondente. Isto é verificado no passo 4 do algoritmo.

O critério de parada (passo 5) do algoritmo corresponde

a verificar se o custo do j-ésimo caminho do vetor na iteração é superior ao custo do caminho de mínimo tempo identificado como o ponto B da figura III.9.

Um algoritmo semalhantepode ser obtido utilizando a rotina de k caminhos mínimos, para obter os caminhos mais rápidos (caminhos de tempo mínimo) e neste caso os vetores formados são: vetor de tempos (ordeados de maneira não decrescentes) e o vetor de caminhos que geram tais tempos. A procura dos caminhos não dominados é realizada do mesmomodo e o teste de parada é relativo ao tempo ou seja, quandoo tempo do caminho p_j é superior ao tempo do caminho de custo mínimo da rede . Isto é equivalente a avançar no sentido contrário da seta na figura III.9.

O algoritmo D apresenta o detalhe das diferentes etapas do algoritmo.

Redes aleatórias são geradas com 100,200,300,400 e 500 nós a distância e o tempo asociado a cada arco tambem forám obtidos aleatoriamente. Utiliza-se o algoritmo de Dijkstra (1959) para obter os k caminhos minimos e resultados numéricos são apresentados.

III.2.2.2 MÉTODO DE HANSEN (HANSEN, 1980)

O trabalho de Hansen aborda uma série de dez problemas bicriteriais numa rede analisando principalmente a sua complexidade. As duas funções objetivos surgem de uma combinação dos seguintes :

Minsum : $\underset{l \in L}{\text{Minimizar}} \sum_{(i,j) \in l} d_{ij}$ (caminho mínimo)

Maxsum : $\underset{l \in L}{\text{Maximizar}} \sum_{(i,j) \in l} d_{ij}$ (caminho máximo)

Minmax : $\underset{l \in L}{\text{Minimizar}} \underset{(i,j) \in L}{\text{Máximo}} d_{ij}$ (caminho mínimo com o "maior arco")

Maxmin : Maximizar $\min_{(i,j)\in L} d_{ij}$ $\min_{l\in L}$ (caminho máximo com o "menor arco ")

Minproduct : Minimizar $\prod_{(i,j)\in l} d_{ij}$ $\min_{l\in L}$ (caminho com o menor produto de arcos)

Maxproduct : Maximizar $\prod_{(i,j)\in L} d_{ij}$ $\min_{l\in L}$ (caminho com o maior produto de arcos)

Para os problemas bicriteriais que resultam de tal combinação tem-se os seguintes resultados téoricos para a complexidade:

	criterio 1		criterio 2	complexidade
1	Maxmin	-	Maxmin	$O(m^2 \log n)$
2	Minmax	-	Maxmin	"
3	Minmax	-	Minmax	"
4	Minsum	-	Maxmin	"
5	Minsum	-	Minmax	"
6	Minsum	-	Minsum	Intratáveis*
7	Maxsum	-	Minsum	"
8	Maxsum	-	Maxsum	"

* O termo intratável é usado para indicar que tais problemas para serem resolvidos requerem no pior caso um número de operações que cresce exponencialmente com o tamanho.

Um método é proporcionado para resolver os casos 1 até 5. Para o caso Minsum - Minsum o autor propõe um algoritmo pseudo - polinomial, que em alguns casos podería requerer um número extremamente grande de operações. Esse método é uma generalização do algoritmo de Dijkstra apresentado na seção anterior. Para o caso bicriterial tal algoritmo requer armazenamento de uma lista de pares não dominados em cada nó da rede. Tambem deven ser estendidas as definições dos conjuntos de nós temporários e permanentes. Tais definições

são:

R_j : Indices de marcas não dominadas do nó j.

I_j : Indices da lista de pares não dominados do nó j.

i : Um elemento da lista; $i \in I_j$

T : Conjunto de nós com R_j que é $\neq \phi$

s : nó origem do caminho

t : nó destino do caminho

j : número de nó T : vértices com $R_j \neq \phi$

V : vértices com $j \in T$ ou $R_j \neq \phi$

(s,t): (nó origem, nó destino)

ALGORITMO E

Inicio

$\lambda_1 = \mu_1 = 0$

$T = V = \{s\}$

Enquanto $T \neq \phi$ faça

Determine $r \in I_k$, $k \in T$ tal que

$\lambda_k = \text{mínimo}(\lambda_j^i, j \in T, i \in R_j)$

$I_k \longleftarrow I_k - \{r\}$;

$T \longleftarrow T - \{k\}$;

Se $k \neq j$ faça

$\forall j$; $(k,j) \in A$ faça

$(\lambda_j, \mu_j) \longleftarrow (\lambda_k + d_{kj}, \mu_k^r + c_{kj})$

Se $j \notin V$ faça

Empilhe (λ_j, μ_j) na lista do nó j;

$T \longleftarrow T \cup \{j\}$; $V \longleftarrow V \cup \{j\}$;

Fim se

Se $j \in V$ e $j \notin T$

Se (λ_j, μ_j) é dominada por algum par da lista ⟶ elimina-lo;

Senão Empilhe (λ_j, μ_j) na lista do nó j ;

$T \longleftarrow T \cup \{j\}$

Fim se

Se $j \in V$ e $j \in T$

Elimine da lista pares dominados por (λ_j, μ_j);

Se (λ_j, μ_j) é não dominado por outro

par da lista empilhe (λ_j, μ_j) ;
Senão elimine-lo;
Fim se
Fim ∀;
Senão faça
Imprima caminhos não dominados ja encontrados
Fim se
Fim enquanto
Fim

O algoritmo E apresenta um número de operações com um limite de $O(nm \log(nD))$, $D \leq \max_{(x_k, x_j) \in U} c_{kj}$. E pode ser generalizado para o caso em que existem mais de duas funções objetivos (WARBURTON, 1987) mostrando que ao trabalhar com números inteiros o armazenamento de todos os caminhos não dominados pode-se tornar uma tarefa impossivel, isto leva a utilização do conceito de ε dominância que permite identificar um subconjunto de soluções não dominadas.

III.2.2.3 MÉTODO DE MALHOTRA (MALHOTRA e PURI, 1984)

O método resolve um problema de custo mínimo com dois objetivos, utilizando os conceitos do algoritmo de "Out of Kilter". Assim o problema considerado é :

Min (C, D) III.30a

$$C = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \qquad \text{III.30b}$$

$$D = \sum_i \sum_j d_{ij} x_{ij} \qquad \text{III.30c}$$

s. a :

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} V, & \text{se } i \text{ é nó origem} \\ 0, & \text{se } i \text{ é nó intermediario} \\ -V, & \text{se } i \text{ é nó destino} \end{cases} \qquad \text{III.30d}$$

$$x_{ij} \geq 0 \ \forall \ (i,j) \in A \qquad \text{III.30e}$$

O primeiro par não dominada é obtido mediante a

resolução do problema considerando somente a função C (o vetor de fluxo ótimo x permite obter o valor de D).

Os pares posteriores são obtidos executando a fase primal do algoritmo de Out of Kilter da seguinte maneira : um conjunto de arcos é definido tendo a característica que eles estão em estado in kilter em relação ao objetivo C e out of kilter em relação ao objetivo D. Os fluxos dos arcos do conjunto são modificados tentando atingir o estado in kilter em relação ao objetivo D isto proporciona um conjunto de pares (C,D) dos quais aquele que apresenta o menor valor de D é não dominada (tal como explicado no algoritmo de Clímaco)

Quando não é possivel continuar com a execução da fase primal(não existe nehum caminho na rede G') segue a execução da fase dual do mesmo modo que no algoritmo de Out of Kilter.

O proceso continua iterativamente até que todos os arcos da rede estejam em estado in kilter para o objetivo D.

CAPÍTULO IV.

MÉTODO PROPOSTO PARA O PROBLEMA DE MÚLTIPLOS OBJETIVOS EM REDES.

O problema de múltiplos objetivos em redes apresentado em equação III.23 (MOR) tem sidopoucoestudado. De nosso conhecimento somente alguns problemas particulares são encontrados na literatura (ver seção III.2).

No presente capítulo propõe-se um método baseado no simplex múltiplo objetivo tradicional e no simplex na rede.

Com tal fim são estendidos os resultados de não dominância para o uso de variáveis limitadas (seção IV.1) que posteriormente são particularizados para o problema das soluções eficientes em fluxos em redes (seção IV.2)

IV.1 USO DE VARIAVEIS LIMITADAS

Nesta seção é analisado o caso do problema do vetor maximo (MOLP).

$$\text{Max} \quad Z(x) = (Z_1(x),\ldots,Z_p(x)) \qquad \text{IV.1a}$$

s.a

$$Ax = b, \qquad \text{IV.1b}$$

$$0 \leq x \leq u \qquad \text{IV.1c}$$

Onde A é uma matriz de ordem m * n e de posto completo; $b \in \mathbb{R}^m$; $x, u \in \mathbb{R}^n$ e as componentes do vetor $Z(x)$ são do tipo $Z_k(x) = C^k x$. ^{T}

Notando que o caso de existência de limites inferiores (l) pode ser facilmente transformado na forma padrão anterior, substituindo $x' = x-l$.

Define-se inicialmente :

I_N : Conjunto de indices das colunas não básicas

I_B : Conjunto de indices das colunas básicas

$L = \{ j \in I_N \; ; \; x_j = 0 \}$

$U = \{ j \in I_N \; ; \; x_j = u_j \}$

Algumas relações fundamentais podem ser diretamente generalizadas a partir do caso mono-objetivo. Assim, pode-se particionar a matriz A em, colunas básicas ,não básicas no limite inferior e não básicas no limite superior :

$$A = \left[B \mid N_l \mid N_u \right]$$

com o correspondente vetor básico $x = (x_B \mid x_l \mid x_u)^T$. Assim tem-se as seguintes relações para x_B e para as diversas funções objetivos.

$$X_B = B^{-1} b - B^{-1} N_l x_l - B^{-1} N_u x_u \qquad \text{IV.2}$$

$$Z_k(x) = C_B^k x_B + C_l^k x_l + C_u^k x_u \quad , \forall k \in P \qquad \text{IV.3}$$

Substituindo IV.2 em IV.3 tem-se :

$$Z_k(x) = C_B^k B^{-1} b + (C_l^k - C_B^k B^{-1} N_l) x_l + (C_u^k - C_B^k B^{-1} N_u) x_u, \; \forall k \in P \qquad \text{IV.4}$$

onde $(C_l^k - C_B^k B^{-1} N_l)^T = -f^k$ corresponde ao vetor de custos reduzidos do objetivo k das variáveis não básicas no limite inferior.

Ao trocar a base de um vetor x^o para uma nova base $\hat{x}$ adjacente, pode-se determinar a mudança do vetor $Z(x)$ analiticamente a partir do equação IV.4.

No caso em que $x_j^o = 0$ e $\hat{x}_j = x_j^o + \theta$ tem-se:

$$Z_k(\hat{x}) = Z_k(x^o) - \theta f_j^k \quad . \quad \forall k \in P$$

o em forma vetorial: $Z(\hat{x}) = Z(x^o) - \theta f_j$ IV.5

No caso em que $x_j^o = u_j$ e $\hat{x} = x_j^o - \theta$ tem-se:

$$Z_k(\hat{x}) = Z_k(x^o) + \theta f_j^k \quad , \quad \forall k \in P$$

o em forma vetorial: $Z(\hat{x}) = Z(x^o) + \theta f_j$ IV.6

Com os comentarios anteriores temos condições de generalizar os resultados dos teoremas II.1, II.2, e II.3 ao caso de uso de variáveis limitadas, além de estabelecer dois casos adicionais para determinar não dominância de uma solução basica apresentados nos teoremas IV.1 e IV.2.

TEOREMA IV.1

Seja x^o uma solução básica viável, se :

$$\left.\begin{array}{l} f_j^k \geq 0 \quad \forall j \in L \\ \text{ou} \quad f_j^k \leq 0 \quad \forall j \in U \end{array}\right\} \quad \text{para algum } k.$$

então a solução atual é não dominada.

DEMONSTRAÇÃO

As condições dos custos reduzidos do teorema correspondem àquelas de otimalidade do problema de mono objetivo; Maximizar $Z^k(x)$ s.a: $x \in X$ e portanto,o ponto x^o é um vertice de poliedro definido pelo conjunto de restrições do problema. Logo, considerandoa definição de não dominância (seção II.1) não existe nenhum $x \in X$ que domine a x^o pois:

Maximo $Z^k(x^o) > Z^k(x) \quad \forall x \in X$, para algum k.

TEOREMA IV.2

Seja x^o uma solução básica, viável não dominada. Se existe uma variável não básica x_j tal que todos seus custos reduzidos são nulos então a solução obtida ao introduzi-la na base, mantendo a viabilidade, gera uma nova

solução não inferior.

DEMONSTRAÇÃO

Da equação IV.5 ou bem IV.6 sequndo seja o caso, com o vetor f_j^k nulo $\forall$ k, tem-se que $Z(\hat{x}) = Z(x^o)$ e portanto $\hat{x}$ é tambem não dominado, correspondendo a um mesmo ponto da região objetivo (ver figura II.2).

TEOREMA IV.3

Dada uma solução básica viável x^o . Se existe uma variável não básica x_j tal que :

$$f_j^k \leq 0 \quad e \quad j \in L \ , \ \forall \ k$$
$$\text{ou} \quad f_j^k \geq 0 \quad e \quad j \in U \ , \ \forall \ k$$

tendo o vetor f_j^k pelo menos uma componente não nula, então a solução atual x^o é dominada.

DEMONSTRAÇÃO

No primeiro caso $x_j^o = 0$ com todos os custos não positivos e pelo menos um deles sendo negativo, tem-se da equação IV.5 que

$$Z(\hat{x}) \geq Z(x^o) \ , \text{ onde } \hat{x} = x^o - \theta f_j$$

posto que $\theta > 0$ e $f_j \leq 0 \Rightarrow \theta f_j \leq 0$, onde $\hat{x}$ é a solução obtida introduzindo a variável x_j na base (mantendo a viabilidade) e que domina a x^o.

No segundo caso $x_j^o = u_j$ e da equação IV.6

$$Z(\hat{x}) \geq Z(x^o)$$

posto que $\theta f_j \geq 0$ e portanto x^o é dominada pela solução obtída ao introduzir x_j^o na base $(\hat{x})$.

TEOREMA IV.4

Dada uma solução básica viável x^o, se existe uma variavel não básica x_j tal que:

$$f_j^k \geq 0 \quad e \quad j \in L \ , \forall \ k$$
$$\text{ou} \quad f_j^k \leq 0 \quad e \quad j \in U \ , \forall \ k$$

tendo o vetor f_j^k pelo menos uma componente não nula, então a introdução da variavel x_j na base (mantendo a viabilidade) gera uma solução básica dominada.

DEMONSTRAÇÃO

Identificando por $\hat{x}$ a solução básica obtida ao introduzir x_j^o na base, no primeiro caso em que $x_j^o = 0$ e custos reduzidos são não negativos, obtem-se diretamente equação IV.5

$$Z(\hat{x}) \leq Z(x^o)$$

posto que $\theta f_j \geq 0$ e portanto x^o domina a $\hat{x}$.

Por outro lado, no caso $x_j^o = u_j$ e custos reduzidos não positivos da equação IV.6 tem-se que :

$$Z(\hat{x}) \leq z(x^o)$$

dado que $\theta f_j \leq 0$.

TEOREMA IV.5

Dada uma solução básica viável x^o com duas variáveis não básicas x_j^o e x_q^o que quando introduzidas na base (mantendo viabilidade) produzem soluções $\hat{x}$ e $\hat{\hat{x}}$ respectivamente, então :

i) Se $j \in L$ e $q \in U$ então $\hat{\hat{x}}$ domina a $\hat{x}$

ii) Se $j \in U$ e $q \in L$ então $\hat{x}$ domina a $\hat{\hat{x}}$

E :

$$\theta_j f_j \leq \theta_q f_q , \qquad j \neq q \qquad \text{IV.7}$$

com: $\theta_j f_j^k < \theta_q f_q^k$, para pelo menos algum k

tem-se que :

iii) Se j e q $\in$ L então $\hat{x}$ domina a $\hat{\hat{x}}$

iv) Se j e q $\in$ U então $\hat{\hat{x}}$ domina a $\hat{x}$

DEMONSTRAÇÃO

i) Neste caso, tendo em conta equações IV.5 e IV.6

$$z(\hat{x}) = z(x^o) - \theta_j f_j \Rightarrow z(\hat{x}) - z(\hat{\hat{x}}) = -\theta_j f_j - \theta_q f_q \leq 0$$

$$z(\hat{\hat{x}}) = z(x^o) + \theta_q f_q$$

$$\Longrightarrow Z(\hat{x}) \leq Z(\hat{\hat{x}}) \Rightarrow \hat{\hat{x}} \text{ domina a } \hat{x}.$$

ii) Analogamente ao caso anterior

$$Z(\hat{x}) - Z(\hat{\hat{x}}) \geq 0 \Longrightarrow \hat{x} \text{ domina a } \hat{\hat{x}}$$

iii) Para este caso

$$Z(\hat{x}) - Z(\hat{\hat{x}}) = -\theta_j f_j + \theta_q f_q$$

e pela desigualdade IV.7 $\hat{x}$ domina a $\hat{\hat{x}}$

iv) Analogamente

$$Z(\hat{x}) - Z(\hat{\hat{x}}) = \theta_j f_j - \theta_q f_q \leq 0$$

e portanto $\hat{\hat{x}}$ domina a $\hat{x}$.

IV.2 PARTICULARIZAÇÃO DE RESULTADOS TEÓRICOS PARA REDES

Consideram-se nesta seção a particularização dos resultados anteriores para o problema do vetor mínimo definido na seção III.2 (equações III.23).

Para este caso os 5 teoremas apresentados na seção são estabelecidos a seguir :

Seja :

x^o : árvore geradora básica viável atual

$\hat{x}$: árvore geradora básica obtida ao introduzir arco não básico (i,j) na árvore x^o.

$\hat{\hat{x}}$: árvore geradora básica obtida ao introduzir arco não básico (r,q) na árvore x^o

I_N : indice dos arcos não básicos

(i,j), $(r,q) \in I_N$: arcos não básicos

f_{ij}, f_{rq}: vetor de custos reduzidos para os arcos não básicos (i,j) e (r,q)

i) Seja x^o uma àrvore geradora básica viável ,se :

$f_{ij}^k \leq 0 \ \forall \ (i,j) \in L$ ou $f_{ij}^k \geq 0 \ \forall (i,j) \in U \Rightarrow Z_k(x^o)$ é minimo e x^o não dominada.

ii) Seja x^o uma àrvore geradora básica viável não dominada. Se existe um arco não basico x_{ij} tal que todos seus custos reduzidos são nulos então a solução obtida ao introduzi-lo na base, mantendo a viabilidade , gera uma nova àrvore não dominada, ou seja :

x^o não dominada e $\in f_{ij} = 0 \ \forall \ (i,j) \in I_N \Rightarrow \hat{x}$ é não dominada onde :

iii) Seja x^o uma àrvore geradora básica viável .Se existe um arco não basico x_{ij} tal que :

$f_{ij} \geq 0$ $\forall (i,j) \in L$ ou bem $f_{ij} \leq 0$ $\forall (i,j) \in U$, com pelo menos uma componente não nula $\Rightarrow$ x^o é dominada, então o arco não basico (i,j) deve entrar na árvore x^o.

iv) Seja x^o uma árvore geradora básica viável. Se existe um arco básico x_{ij} tal que :

$f_{ij} \leq 0$ $\forall$ (i,j) $\in$ L ou $f_{ij} \geq 0$ $\forall$ (i,j) $\in$ U, com pelo menos uma componente não nula $\Rightarrow$ $\hat{x}$ é dominada e o arco não básico (i,j) não deve entrar na árvore x^o.

v) Dada uma àrvore geradora básica viável x^o com dois arcos não básicos x^o_j e x^o_q queao introduzi-los na base (mantendo a viabilidade) produzem novas árvores, $\hat{x}$ e $\hat{\hat{x}}$ respectivamente, então:

a) Se (i,j) $\in$ L e (r,q) $\in$ U então $\hat{x}$ domina a $\hat{\hat{x}}$

b) Se (i,j) $\in$ U e (r,q) $\in$ L então $\hat{\hat{x}}$ domina a $\hat{x}$

Alem disso se :

$$\theta_{ij} f_{ij} \leq \theta_{rq} f_{rq} \qquad (i,j) \neq (r,q) \qquad \text{IV.8a}$$

$$\text{com } \theta_{ij} f^k_{ij} < \theta_{rq} f^k_{rq} \qquad \text{IV.8b}$$

para ao menos algum objetivo k.

tem-se que :

c) Se (i,j) e (r,q) $\in$ L então $\hat{\hat{x}}$ domina a $\hat{x}$

d) Se (i,j) e (r,q) $\in$ U então $\hat{x}$ domina a $\hat{\hat{x}}$

As demostrações desses teoremas são similares aos dos IV.1 - IV.5.

IV. 3. SUBPROBLEMA DA NÃO DOMINÂNCIA.

Quando não é possivel estabelecer se a árvore geradora básica viável é dominada ou não dominada, devemos resolver um subproblema de não dominância.

Tal como foi estudado na seçãoII.3, a idéia deste subproblema de não dominância tem semelhança com aquela do método da restrição em programação de multiplos objetivos clássico, onde tenta - se melhorar um dos objetivos mantendo constante os outros.

IV.3.1 FORMULAÇÃO DO SUBPROBLEMA.

A formulação do subproblema deve considerar dois aspectos:

- A nova solução x deve satisfazer as equações de conservação de fluxo $x \in X$.
- A nova solução x deve ser melhor que a atual x°, portanto

No caso de minimização, devemos ter:

$$\sum_{i}\sum_{j} c_{ij}^{k} x_{ij} \leq \sum_{i}\sum_{j} c_{ij}^{k} x_{ij}^{\circ} \quad \forall \; k \in P \qquad \text{IV.2}$$

e desigualdade estrita para pelo menos um k.

Neste caso os somatórios devem ser somente considerados sobre os arcos da rede, isto é $\forall (i,j) \in A$.

O subproblema deve tentar diminuir cada objetivo tanto quanto fôr possível,para isto podem-se acrescentar variaveis de folga na ultima inequação, ou seja:

$$\sum_{i}\sum_{j} c_{ij}^{k} x_{ij} + \delta_{k} = \sum_{i}\sum_{j} c_{ij}^{k} x_{ij}^{\circ} \quad \forall \; k \in P \qquad \text{IV.3}$$

sendo δ_{k} a k-ésima variável de folga. De maneira que o subproblema (SP) pode ser formulado como :

$$(SP) \quad \text{Maximizar} \quad V = \sum_k \delta_k \qquad \text{IV.4a}$$

$$x_{ij} \in X \qquad \text{IV.4b}$$

$$\sum_i \sum_j c_{ij}^k x_{ij} + \delta_k = \sum_i \sum_j c_{ij}^k x_{ij}^o \quad \forall \; k \in P \qquad \text{IV.4c}$$

$$\delta_k \geq 0 \qquad \text{IV.4d}$$

Então, a solução que determina a árvore geradora básica atual x^o será não dominada se $V^* = 0$ no subproblema (SP), isto quer dizer que não existe nenhum vetor de fluxo x que permite melhorar algum objetivo sem prejudicar os outros.

Nas proximas duas seções são apresentados dois métodos para resolver o subproblema de multiplos objetivos em redes (MOR). Primeiramente é considerado o dual generalizado, o segundo método para ser analizado e que posteriormente será implementado se báseia nas ideias propostas por Zeleny(1974) para o problema de multiplos objetivos clássicos, particularizados para o problema de multiplos objetivos na rede.

IV.3.2 MÉTODO DUAL

Nessa seção o problema de não dominância é abordado tendo em conta os aspectos téoricos do problema dual apresentados no apéndice I , para isto considere-se primeiramenteaequação(IV.3) daseguinte forma observando que os somatórios devem ser considerados somente sobre os arcos da rede G = (N,A) :

$$\delta_k = \sum_i \sum_j c_{ij}^k x_{ij}^o - \sum_i \sum_j c_{ij}^k x_{ij}, \quad \forall \; k \in P \qquad \text{IV.5}$$

Seja :

$$b_k = \sum_i \sum_j c_{ij}^k x_{ij}^o, \quad \forall \; k \in P \qquad \text{IV.6}$$

então :

$$\delta_k = b_k - \sum_i \sum_j c^k_{ij}\, x_{ij} \quad , \quad \forall\, k \in P \qquad \text{IV.7}$$

Equivalentemente a equação (IV.2) pode ser colocada como :

$$b_k \geq \sum_i \sum_j c^k_{ij}\, x_{ij} \quad , \quad \forall\, k \in P \qquad \text{IV.8}$$

e portanto o problema (IV.4) pode-se escrever como :

$$\text{Max} \quad V = \sum_{k=1}^{P} \left[b_k - \sum_i \sum_j c^k_{ij}\, x_{ij} \right] \qquad \text{IV.9a}$$

s. a :

$$x \in X \qquad \text{IV.9b}$$

$$b_k \geq \sum_i \sum_j c^k_{ij}\, x_{ij} \quad , \forall\, k \in P \qquad \text{IV.9c}$$

Escrevendo na forma padrão e não considerando os termos constantes da função objetivo tem-se :

$$\text{Min} \quad f(x) = \sum_{k=1}^{P} \sum_i \sum_j c^k_{ij}\, x_{ij} \qquad \text{IV.10a}$$

s.a :

$$g_k(x) = \sum_i \sum_j c^k_{ij}\, x_{ij} - b_k \leq 0, \quad k \in P \qquad \text{IV.10b}$$

$$x \in X \qquad \text{IV.10c}$$

Associando um numéro real $\lambda_k \geq 0$ a cada uma das restrições (IV.10b), pode-se escrever a funçãode Lagrange como :

$$L(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{P} \sum_i \sum_j c^k_{ij}\, x_{ij} + \sum_{k=1} \lambda_k \left[\sum_i \sum_j c^k_{ij}\, x_{ij} - b_k \right] \qquad \text{IV.11}$$

Com base nos antecedentes do apendice I e BERTSEKAS, 1982) se define a função w como :

$$w(\lambda) = \text{Min} \{L(\bar{x}, \lambda)\} \qquad \text{IV.12}$$

Sabe-se que o problema de não dominância tem uma solução e pela propriedade 3 (apéndice I) tem-se que :

$$w(\lambda^*) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i} \sum_{j} c_{ij}^{k} \; x_{ij}^{*} \qquad \text{IV.13}$$

Logo a estrategia a seguir é determinar (λ^* , x^*) a partir de algum método que permita resolver o problema (IV.11) que para esse caso pode-se escrever como :

$$\text{Max } w(\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}^{m+} \qquad \text{IV.14a}$$

Onde :

$$w(\lambda) = \underset{x \in X}{\text{minimo}} \left[\sum_{k=1}^{p} \sum_{i} \sum_{j} c_{ij}^{k} \; x_{ij} + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left[\sum_{i} \sum_{j} c_{ij}^{k} \; x_{ij} - b_k \right] \right] \qquad \text{IV.14b}$$

De forma vetorial a equação (IV.14b) pode-se escrever como :

$$w(\lambda) = \underset{x \in X}{\text{minimo}} \{ f(x) + \lambda^T g(x) \} \qquad \text{IV.15}$$

Onde :

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_p)^T$ é o vetor de multiplicadores e

$$g(x) = \left(\sum_{i} \sum_{j} c_{ij}^{1} x_{ij} - b_1, \quad , \sum_{i} \sum_{j} c_{ij}^{p} x_{ij} - b_p \right)^T \qquad \text{IV.16}$$

É o vetor composto das restrições do problema (IV.10).

Sabe-se da propriedade 2 (apéndice I) que a função $w(\lambda)$ é concava e neste caso particular linear por partes e portanto encontrar uma solução para o problema (IV.14) se reduz a determinar o maximo valor de uma função concava não diferenciavel em todo ponto.

Por outro lado se x^i é um elemento de X para o qual se atinge o mínimo da função dual (IV.15), a partir da propriedade 4 (apéndice I) então o vetor $g(x^i)$ é um subgradiente para a função $w(\lambda)$.

Notar que determinar um vetor $x^i \in X$ para o qual (IV.15) atinge o valor mínimo equivale a resolver o problema :

$$\text{Min} \sum_k \sum_i \sum_j c^k_{ij} x_{ij} + \sum_k \lambda_k \left(\sum_i \sum_j c^k_{ij} x_{ij} - b_k \right) \qquad \text{IV.17a}$$

s.a :

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = d_i \quad i = 1, \ldots, m \qquad \text{IV.17b}$$

$$x \in X \qquad \text{IV.17c}$$

A solução do problema anterior pode ser obtida por algum dos métodos da seção III.2.1.

MÉTODO DE SOLUÇÃO

Para resolver o problema (IV.14), isto é :

$$\text{Max } w(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^{m+} \qquad \text{IV.14a}$$

e como $w(\lambda)$ é uma função não diferenciavel podo-se utilizar o método do subgradiente (MINOUX,1986, SANDI,1979) apresentado no algoritmo A para o caso de um problema de tipo de (IV.14).

ALGORITMO A

Inicio

Escolha $\lambda^0 \geq 0$ (ponto de partida);

$l \longleftarrow 0$;

Repetir

Determinar um subgradiente γ^l de $w(\lambda)$ em λ^l;

Determinar α_l (tamanho do passo);

$\lambda^{l+1} \longleftarrow \lambda^l + \alpha_l * \gamma^l / \|\gamma^l\|$;

Se $\lambda_i^{l+1} < 0$ faça $\lambda_i^{l+1} \longleftarrow 0$;

$l \longleftarrow l + 1$;

até $\gamma^l = 0$

Fim.

O algoritmo A consiste de um processo iterativo que para ocaso da função w(λ) ser diferenciavel coresponde ao propio método do gradiente para maximizar uma função não linear em geral em $\mathbb{R}^{n+}$(FLETCHER, 1980). O algoritmo em cada etapa atualiza a variável λ seguindo a direção do subgradiente escolhido,tendo em conta o tamanho do passo α_k. Para determiná-lo existem três métodos que seran mostrados em seguida.

MÉTODO 1 (método do tamanho de passo constante)

$$\alpha_l = \alpha; \qquad \alpha \text{ é uma constante} \qquad \text{IV.18}$$

α pode ser obtido de :

$$\alpha = k\,\varepsilon; \qquad 0 < k < 1 \qquad \text{IV.19}$$

Onde :

ε : tolerancia.

k : numero de condicionamento da função w(λ).

Se α é obtido da relação (IV.16) se garante que a solução é obtida num numero finito de passos iguais a :

$$n = 1 / \sqrt{1 - k^2} \qquad \text{IV.20}$$

Observa-se que é bom escolher α tão grande quanto seja possivel, afim de diminuir o número de passos.

MÉTODO 2 (método de series convergentes)

$$\alpha_l = \alpha_o (\gamma)^l, \quad \gamma > 1 \qquad \text{IV.21}$$

Neste caso a velocidade de convergencia para o ótimo é

$\sqrt{1-k^2}$ que corresponde a razão da progresão geométrica (IV.21) e :

$$\alpha_l = k_o d(\lambda^o)^l \qquad \text{IV.22}$$

$$\alpha = \sqrt{1-k^2} \qquad \text{IV.23}$$

Onde :

$d(\lambda^o)$: distância do ponto λ do conjunto de soluções ótimas.

Geralmente ne k, n e $d(\lambda^o)$ são conhecidos.

MÉTODO 3 (método da relaxação)

$$\alpha_l = \rho\,(w(\lambda^l)-\bar{w}) \,/\, \| \gamma^l \| \;,\; 0 < \rho \leq 2 \qquad \text{IV.24}$$

Onde :

$\bar{w}$: estimativa do valor ótimo w^*

ρ : coeficente de relaxção.

A velocidade de convergencia neste caso é $\sqrt{1-\phi^2}k^2$, onde ϕ é um número real que carateriza a curvatura da curva.

A velocidade de convergencia deste método é mais lenta que a obtida com o método 2 (MINOUX, 1986)

IV.3.3 MÉTODO DOS CUSTOS ATUAIS.

O método anteriormente para resolver o problema de não dominância não considera a utilização da informação disponível no momento da investigação da solução atual isto é, numa determinada solução dispõe-se de informação de custos reduzidos que pode ser diretamente utilizada na solução do problema (IV.4).

Considerando a relação IV.4c :

$$\sum_{i}\sum_{j} c^{k}_{ij}x_{ij} + \delta_k = \sum_{i}\sum_{j} c^{k}_{ij}\, x^{o}_{ij} \quad , k = 1,\ldots,P$$

Notar que a partir da equação anterior tem-se que :

Maximizar $\sum_{k} \delta_k$ é equivalente a:

Minimizar $\sum_{k}\sum_{i}\sum_{j} c^{k}_{ij}x_{ij}$

Assim a formulação do problema de não dominância pode-se escrever como :

$$\text{Minimizar} \sum_{k}\sum_{i}\sum_{j} c^{k}_{ij}x_{ij} \qquad \text{IV.25.a}$$

s. a :

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_i \quad ,i=1,\ldots,m \qquad \text{IV.25.b}$$

$$\sum_{i}\sum_{j} c^{k}_{ij}x_{ij} + \delta_k = \sum_{i}\sum_{j} c^{k}_{ij}x^{o}_{ij} \quad ,k=1,\ldots,P \qquad \text{IV.25.c}$$

$$\delta_k \geq 0 \quad ,k=1,\ldots,P \qquad \text{IV.25.d}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad ,\forall (i,j) \in A \qquad \text{IV.25.e}$$

Notar que o termo da direita da equação (IV.25.c) pode assumir valores negativos portanto para resolver este problema se faz necessário a aplicação da primeira fase do método simplex primal colocando variáveis artificiais em tais restrições de modo que o problema da I fase é :

$$\text{Minimizar} \sum_{k} y_k \qquad \text{IV.26.a}$$

s.a :

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_i \quad ,i=1,\ldots,m \qquad \text{IV.26.b}$$

$$\sum_{i}\sum_{j} c^{k}_{ij} x_{ij} + \delta_k + y_k = \sum_{i}\sum_{j} c^{k}_{ij} x^{\circ}_{ij} \quad ,k=1,\ldots,P \qquad \text{IV.26.c}$$

$$\delta_k,\ y_k \geq 0 \quad ,k=1,\ldots,P \qquad \text{IV.26.d}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad ,\forall (i,j) \in A \qquad \text{IV.26.e}$$

Na forma matricial :

$$\text{Minimizar} \quad e^{T}y \qquad \text{IV.27.a}$$

s. a :

$$Ax = b \qquad \text{IV.27.b}$$

$$c^{T}x + I\delta + Iy = c^{T}x^{\circ} \qquad \text{IV.27.c}$$

$$\delta\ ,\ y \geq 0 \qquad \text{IV.27.d}$$

$$0 \leq x \leq u \qquad \text{IV.27.e}$$

Onde :

A : matriz de incidencia nó-arco (m*n)

c : matriz de custo

No ponto atual $x^{\circ} = (x_B\ ,x_u\ ,\ x_l\ )$ é uma árvore viável que corresponde a um ponto extremo do espaço gerado pelas restrições do problema. Seja B a matriz básica correspondente e B^{-1} a sua inversa, então o problema (IV.27) tambem pode ser escrito como :

$$\text{Minimizar } e^{T}y \qquad \text{IV.28.a}$$

s. a :

$$x_B + B^{-1}N_u\, x_u + B^{-1}N_l\, x_l = B^{-1}b \qquad \text{IV.28.b}$$

$$c_B B^{-1}b + (c_u - c_B B^{-1}N_u)x_u + (c_l - c_B B^{-1}N_l)x_l + I\delta + Iy = c^{T}x^{\circ} \qquad \text{IV.28.c}$$

$$\delta,\ y \geq 0 \qquad \text{IV.28.d}$$

$$0 \leq x \leq u \qquad \text{IV.28.e}$$

Na solução atual x°, a função $c^{T}x^{\circ}$ é equivalente com :

$$c^{T}x^{\circ} = c_{B}B^{-1}b + (c_{u}-c_{B}B^{-1}N_{u})x_{u}^{\circ} + (c_{l}-c_{B}B^{-1}N_{l})x_{l}^{\circ} \qquad \text{IV.29}$$

Portanto, à equação IV.28.c pode ser escrita como :

$$(c_{u}-c_{B}B^{-1}N_{u})x_{u}+(c_{l}-c_{B}B^{-1}N_{l})x_{l}+I\delta+Iy=(c_{u}-c_{B}B^{-1}N_{u})x_{u}^{\circ} \qquad \text{IV.30}$$

Analíticamente, o problema anterior pode_ser resolvido retirando as variáveis artificiais da base e gerando uma solução inicial para o problema (IV.28), ou seja uma base em δ, logo :

$$\text{Minimizar } e^{T}(c_{u}-c_{B}B^{-1}N_{u})x_{u} + e^{T}(c_{l}-c_{B}B^{-1}N_{l})x_{l} \qquad \text{IV.31.a}$$

s.a :

$$B^{-1}N_{u}x_{u} + B^{-1}N_{l}x_{l} = \bar{b} \qquad \text{IV.31.b}$$

$$(c_{u}-c_{B}B^{-1}N_{u})x_{u}+(c_{l}-c_{B}B^{-1}N_{l})x_{l}+I\delta=(c_{u}-c_{B}B^{-1}N_{u})x_{u}^{\circ} \qquad \text{IV.31.c}$$

$$0 \leq x \leq u \qquad \text{IV.31.d}$$

$$\delta \geq 0 \qquad \text{IV.31.e}$$

Na solução atual x°, o valor do $\bar{b}$ é dado por :

$$\bar{b} = B^{-1}b - B^{-1}N_{u}x_{u}^{\circ} \qquad \text{IV.32}$$

e o valor da função objetivo é dado por :

$$Z^{\circ} = e^{T}(c_{u} - c_{B}B^{-1}N_{u})x_{u}^{\circ} \qquad \text{IV.33}$$

O problema (IV.31) permite utilizar a informação atual dos custos reduzidos correspondentes com a variável x° na determinação da questão inicial isto é, se a solução inicial x° é dominada ou não dominada, para resolver este problema se dispõe de uma base inicial dada por (x_{B}, δ), onde δ apresenta valores não negativos de maneira que a diminuição gradativa de tais valores proporciona a informação requerida. No caso da minimização atingir $\delta = 0$ a solução x° será não dominada,no caso contrario a solução x°

será dominada. Para isto se propõe ingressar os arcos não básicos na base no lugar de δ num processo iterativo similar com aquele do pivoteamento no método simplex. Nesta análise, devem ser considerados os custos reduzidos dos arcos não básicos tal como mostrado na equação (IV.31.c), mas tendo presente o sinal adequado para cada caso, devido a que nessa equação os custos reduzidos aparecem com o sinal trocado. Os arcos não básicos candidatos a entrar nessa base devem obedecer os critérios normais da minimização ou seja, considerando aqueles com custos reduzidos da função objetivo do problema (IV.31) com valores positivos para aqueles arcos que apresentem fluxos iguais ao limite inferior e com valores negativos para aqueles que apresentam fluxos no limite superior. É importante notar que os custos da função (IV.31.a) equivalem á soma dos custos reduzidos do problema multiobjetivo existentes na solução atual x^{o}.

IV.5 ALGORITMO PROPOSTO

Propomos nesta seção, anteriores pode-se propor um algoritmo para o problema de Múltiplos Objetivos em Redes. O algoritmo determina o conjunto de soluções não dominadas, segundo os critérios apresentados na seção IV.2. Se nenhum deles sao satisfeitos um subproblema de não dominância é resolvodos .

ALGORITMO MÚLTIPLOS OBJETIVOS EM REDES

```
Inicio
      Determinar x° (AGB viável);
      Se x° não existe   fim ⟵  verdadero;
      x_nd ⟵ 0;
      fim ⟵ false;
      Repetir
            reinicie ⟵ false;
            Determine  w_i   ∀ i ∈ m;
            Determine f_ij^k  ∀ (i,j) ∈ A_N e k ∈ P;
            Se existe algum k  x_nd ⟵ x_nd + 1;
            Determinar estado de arco (i,j),∀ (i,j) ∈ A_N;
            Se existe algum (i,j) ∈ A_N que cumpre iii), faça
               Calcule x̂(a partir de x° com (i,j) entrando)
               Se x̂ não explorada x°⟵ x̂;
                  reinicie ⟵ verdadero;
               Senão Se existe AGB não explorada armazenada
                        faça; retire uma e utilize ao inves
                              de x°;reinicie ⟵ verdadero;
                     Senão  fim ⟵ verdadero;
                     fim Se
               fim se
            Senão Se ( não reinicia)  e (não fim)
                     Resolver Subproblema de Não Dominância;
                     Se x ° é não dominada;  x_nd ⟵ x_nd + 1;
            fim se
            Se existe arco (i,j) preferivel (cumpre V) faça
                     Determinar x̂ (a partir de x° );
                     Se x̂  não explorada x° ⟵  x̂;
```

```
                    reinicia ⟵ verdadero;
                Senão Se existe AGB não explorada armazenada
                        faça; retire uma e utilize ao inves
                              de x°;
                              reinicia ⟵ verdadero;
                          Senão fim ⟵ verdadero;
                          fim se
                fim se
            Senão Se (não reinicia) e (não fim)
                    Se (x° é não dominada) ou (x° é
                       dominada e nro. de árvores
                       armazenadas = 0 ) faça
                        Armazenar arcos que x̂ que produzem
                        x̂ inexploradas;
                    Se existe AGB armazenada no banco faça
                      retire uma e utilize ao inves de x°;
                      reinicia ⟵ verdadero;
                    Senão fim ⟵ verdadero;
                    fim se
                fim se
            fim se
      Até  fim é verdadero;
Fim.
```

O algoritmo começa com uma AGB (árvore geradora básica inicial viável) x° se não existir então o algoritmo acaba. Um primeiro teste para verificar se algum objetivo k está no ótimo é realizado (critério i) da seção IV.2), se ísto acontece então x° é não dominada, em caso contrario nada se pode dizer portanto, procede-se a verificar se existe algum arco não básico (arco $(i,j) \in A_N$) com possibilidade de entrar na base (critério iii), seção IV.2) se a reposta é positiva então conclui-se que a solução atual x°é dominada e uma nova AGB ($\hat{x}$) é construida entrando o arco (i,j) em x° no lugar de algum arco que sai, seguindo a metodologia do simplex na rede. Se nenhum arco não básico cumpre com o críterio iii) , deve-se procurar uma x^{a} ,AGB armazenada que não tenha sido analisada previamente e continuar o algoritmo. Se por acaso nenhuma x^{a} existe então

o algoritmo acaba.

Por outro lado, se não é possivel utilizar o critério iii) e o algoritmo continua, deve-se resolver o subproblema de não dominância para determinar se a solução atual x^o é ou não dominada . Se acontece o segundo incrementa-se o contador de AGB não dominadas (nd) e senão, escolhe-se algum arco não básico dominante (criterio iv), seção IV.2) para entrar em x^o, se a resposta ao criterio for negativa , procura-se uma AGBV armazenada e não analisada para continuar o algoritmo.

No caso do algoritmo continuar e a solução atual x^o ser não dominada estando na primeira iteração (nenhuma AGB existe armazenada), deve-se armazenar todas aquela AGB candidatas que não tenham sido estudadas e utilizar uma delas para continuar o algoritmo.

Pode-se observar que o algoritmo acaba nas seguintes situações :

- não existe uma AGB viável inicial
- não existem AGB armazenadas.

O algoritmo de não dominância é agora estudado

ALGORITMO DE NÃO DOMINANCIA

```
Inicio
  d; nd ⟵ falso; {d: dominada; nd: não dominada}
  fim ⟵ falso
  Inicialização matriz tab e vetor RHS;
  Identificar x° (AGB viável inicial, com somente
                  variáveis δ);
  Repetir
     Se tab não é otimo
          Determinar θ_rq de x° (contribuição do arco (r,q)
                                 à função objetivo);
          Se existe algum arco(r,q) ∈ A_N a entrar em x° faça
             Se θ_rq > 0 faça d ⟵ verdadero;
```

```
            fim ⟵ verdadero;
        Senão Determinar arco (i,j) que sae de x°;
              Pivotear;
        Fim se
    Senão  Se θ_rq = 0
              Determinar algum f_rq > 0 ;
              Pivotear;
        Fim se
    Senão nd ⟵ verdadero; fim ⟵ verdadero;
  Até fim é verdadero;
Fim.
```

Primeiramente o algoritmo de não dominância constrói a matriz tab da solução atual (com a informação do algoritmo principal) e ; as linhas correspondentes aos custos reduzidos dos k objetivos e as colunas são formadas por todos os arcos não básicos (que apresentem custos reduzido diferentes de zero) da solução atual x° mais, as colunas correspondentes as folgas δ (que são a base da matriz tab, ver seção IV.3.3). O vetor RHS é formado segundo o lado direito da relação IV.31.c (seção IV.3.3). Posteriormente verifica-se se a matriz tab encontra-se no ótimo, se a resposta fôr positiva a solução atual x° é não dominada e o algoritmo acaba . Em caso contrario procura-se um arco não básico da matriz tab para entrar na base se existe algum (criterio iv, seção IV) a solução atual x° é dominada e o algoritmo acaba senão, escolhe-se algum custo reduzido (f_{ij}) positivo para algum k como pivô procede-se a mudar a base, continuando o algoritmo.

Observa-se que o algoritmo acaba se alguma conclusão da solução atual (se é dominada ou não dominada) é obtida.

CAPÍTULO V.

RESULTADOS NUMÉRICOS.

Nesta seção são apresentados alguns dos resultados numéricos obtidos com a implementação do algoritmo proposto na seção IV.5.

Para cada um dos problemas uma rede aleatória é gerada especificando somente o número de nós requeridos. Cada um dos nós da rede é conetado com n sucessores, os limites superiores e custos (objetivos) de cada arco tamben foram aleatórios. O método da duas fases(adaptado para rede) é utilizado para determinar uma árvore geradora básica viável inicial.

Implementações computacionais forom feitas em microcomputador compatível com IBM-PC e clock de 10 MHZ utilizando linguagem PASCAL.

Nas tabelas V.1, V.2, V.3, V.4, V.5 são mostrados os resultados para dois, três, quatro e cinco objetivos respetivamente. Destacando, o número de nós, número de arcos, número de bases exploradas (árvores geradoras viáveis), número de bases não dominadas e o tempo de execução em segundos.

nós	arcos	bases expl.	bases N.D.	tempo(s)
4	7	8	4	0.43
5	11	17	2	2.41
7	12	15	2	2.74
20	25	16	3	7.46
20	27	21	1	11.69
40	46	7	1	5.10
40	50	10	1	9.17
50	56	18	2	20.54
50	60	53	7	95.89

TABELA V.1 Redes com dois objetivos.

nós	arcos	bases expl.	bases N.D	tempo(s)
4	7	11	4	1.09
5	11	13	2	2.52
7	12	49	13	14.39
10	18	66	9	25.70
20	25	10	2	4.83
40	44	8	4	6.53
40	50	24	2	29.71
50	55	20	6	47.18
50	58	26	2	53.55

Tabela V.2 Redes com três objetivos

nós	arcos	bases expl.	bases N.D.	tempo(s)
4	7	16	6	1.92
7	12	27	8	8.78
10	18	14	4	4.99
20	25	24	6	20.43
40	43	18	9	19.22
40	45	32	12	43.55
50	55	20	6	50.97
50	57	23	5	61.73

TABELA V.3 Redes com quatro objetivos.

nós	arcos	bases expl.	bases N.D	tempo(s)
8	13	41	17	17.19
10	18	18	10	6.26
20	23	23	9	16.42
40	43	13	7	17.63
40	51	67	13	158.40
50	58	103	31	183.82
50	65	115	35	197.73

TABELA V.4 Redes com cinco objetivos

CAPÍTULO VI

DISCUSSÃO

Em relação ao método proposto varios aspectos devem ser considerados, principalmente em relação as potencialidades do método proposto, critérios teóricos estabelecidos no estudo do problema de múltiplos objetivos em redes, disponibilidade de algoritmos semelhantes na literatura, esparsidade da matriz de restrições,aplicações em problemas particulares de fluxos em redes com múltiplos objetivos e solução de melhor compromisso .

Variáveis Limitadas.

O problema de múltiplos objetivos clássico tal como foi formulado no capítulo II não considera o caso das variáveis serem limitadas inferior o superiormente, contudo há diversos problemas , que quando modelados , levam a uma formulação que considera variáveis superiormente limitadas. Neste estudo foi necessário estender a analise teórica existente para um problema de programção linear múltiple objetivo em geral, e ainda particularizar ao caso em estudo que corresponde ao problema de redes. Os resultados obtidos (apresentados nos teoremas da seção IV.2) são fundamentaes no desenvolvimento do método proposto posto que, permitem atualizações da base apenas, com o critério de viabilidade em cada arco, tal como se faz no caso de problemas de mono objetivo.

Algoritmos Existentes na Literatura.

Poucos estudos existem na literatura que trabalhem direitamente com o problema de múltiplos objetivos em redes, os únicos do nosso conhecimento : P. Hansen (1980) que somente faz uma análise teórica de certos problemas bicriteriaes, sem considerar nenhuma análises numérica. Uma extensão deste trabalho para mais objetivos aparece em Warburton (1987) onde o armazenamento de todos os caminhos

não dominados é impossivel e portanto considera-se so um subconjunto deles. Climaco (1984)tambem aborda o problema de caminho mínimo com dois objetivos (custos e tempos) e primeiramente otimiza um dos objetivos e logo o segundo, proporcionando alguns resultados numéricos para redes geradas aleatóriamente. Malhotra (1984) utiliza o algoritmo de Out-of-kilter para um problema de dois objetivos e o conjunto de soluções não dominadas é procurado tambem otimizar separadamente. Deste modo os trabalhos existentes justificam plenamente o desenvovimento tanto deste como outros que abordem o problema de múltiplos objetivos em redes, dada a inumerável quantidade de aplicações posteriores na resolução eficiente de problemas de planejamento em geral.

Esparsidade da Matriz de Restrições

O algoritmo proposto nesta tese aproveita a esparsidade da matriz de incidencia nó-arco, mediante a utilização de uma árvore geradora para representar as soluções básicas. Essa é construida com m-1 arcos (onde m é o número total de nós) mais um arco artificial que se origina no nó raiz com a idéia de manter a matriz de restricões com posto igual a m.

Para ter uma árvore geradora viável, deve se ter uma árvore conexa com m-1 arcos da rede original e poseer um nó raiz não contendo ne demanda ni oferta por nehum item, em dita árvore tambem deve-se cumprirse que a somatória total das demandas o ofertas seja igual a zero.

Subproblema de Não Dominância

Nos casos onde não é possível estabelecer segundo os critérios teóricos se a árvore geradora viável é ou não dominada, o algoritmo proposto deve analisar se é possivel melhorar um dos k objetivos e com isto obter uma nova solução não dominada, para isto se deve cumprir que :

$$\sum_{i} \sum_{j} c^{k}_{ij} x_{ij} \leq \sum_{i} \sum_{j} c^{k}_{ij} x^{o}_{ij}, \quad \forall\, k \in P, \ \forall\, (i,j) \in A$$

Onde, P é o número de objetivos considerados, A o número de arcos da rede, x^{o} corresponde a solução atual e x é uma solução melhor que x^{o} devido que um dos k objetivos diminue.

Para tal efeito duas abordagens são estudadas nesta tese. A primeira utiliza os aspectos teóricos do dual do problema de não dominância, onde a função resultante é do tipo concava e particularmente linear por partes .Portanto a solução se reduz a determinar o maximo valor de uma função concava não diferenciável em todo ponto para o qual pode-se utilizar o método do subgradiente. Este método não considera a informação dos custos reduzidos, disponivel no momento da pesquisa, por isto, propõe-se o método dos custos atuais, que permite resolver o problema de não dominância maximizando a soma das variáveis de folga asociadas a cada um dos objetivos. Se a solução de tal problema existir então a base atual é dominada.O método tem a vantagem de poder utilizar diretamente a estrutura de rede, tal como foi apresentado no capítulo IV.

Análises de Resultados

Os resultados obtidos com o algoritmo proposto permitem fazer uma analise numérica . Para todos os casos rodados (redes com até 5 objetivos), o número de soluções não dominadas exploradas é inferior a 120. Para redes crescentes em tamanhos o tempo de execução aumenta, dado que é maior o número de soluções exploradas, contudo isto depende diretamente da natureza do problema gerado aleatoriamente. Isto pode ser visto nas tabelas V.1 até V.4 .

Por outro lado, na medida que aumenta o número de objetivos não se visualizam grandes variações do número de bases exploradas e portanto dos tempos de execução, assim novamente é a natureza da rede a que determina o grau de dificuldade do problema.

Nenhuma comparação de resultados numéricos é possível, dado que o único trabalho (Climaco, 1984) que apresenta resultados numéricos o faz para o caso de redes com dois objetivos que obtêm caminhos não dominados. Isto da maior relevancia aos resultados numéricos aquí apresentados posto que permitem ter uma base de referência para futuras pesquisas.

Solução de Melhor Compromisso

A segunda parte da resolução de um problema com múltiplos objetivos em geral, consiste em fazer uma análise da função de utilidade f(x) com o fim de identificar a solução de melhor compromisso que satisfaz :

$$\max_{x \in \beta} f(x)$$

Onde β é o conjunto de soluções não dominadas. Para o método aqui qpresentado isto pode ser feito (no caso de ter restrições de memória), mediante maximizações parciais determinando soluções de melhor compromisso em subconjuntos de β.

Outros Problemas de Fluxos em Redes

Evidentemente o método proposto pode ser utilizado para resolver uma familia de problemas de múltiplos objetivos em redes é o caso do problema de caminhos mínimos não dominados e sus diversas aplicações ou os diferentes problemas de roteamento de veículos em geral.

CAPITULO VII

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Dentro das principaes conclusões do presente estudo encontram-se :

- Pouca importância tem-se dado aos problemas múltiobjetivos em redes, desde uma ótica da programação matemática.

- É viável obter um conjunto exato de soluções não dominadas para o problema de múltiplos objetivos em redes, desde um ponto de vista numérico para redes com até 60 nós..

- Os tempos de execução para redes de até 60 nós não superam os 5 minutos em microcomputador.

- O tempo de execução esta em direta relação com o número de bases exploradas e com a natureza da rede e não depende do número de objetivos do problema.

- A resolução do subproblema de não dominância é a componente mais importante (em tempo) na execução do algoritmo proposto.

- Os resultados teóricos obtidos para a utilização de variáveis limitadas são de facil incorporação no método proposto aproveitando a esparsidade da matriz de restrições.

- O método proposto permite resolver uma familia de problemas de fluxos em redes com múltiplos objetivos.

As recomendações mais importantes são :

- Estudar o comportamento do método proposto em problemas particulares de fluxos em redes.

- Estudar desde um ponto de vista numérico o subproblema de não dominância mediante o método do subgradiente.

- Acrecentar ao método proposto a busca da solução de melhor compromisso.

- Realizar testes numéricos com redes de grande porte em sistemas computacionaes de maior capacidade, mais rápidos e de maneira interativa.

- Estudar a possibilidade de utilizar sistemas com múltiplos processadores.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALAS, E. HO, A.(1980) "Set Covering Algorithms Using Putting Planes, Heuristic and the Subgradients Optimizations: Computations Study", *Mathematical Programming Study* 12, 37-60.

BANA e COSTA C.(1988) "A Methodology for Sensitivity Analysis in Three-Criteria Problems : A Case Study in Municipal Management ", *European Journal of Operational Research* 33, 159 - 173.

BAZARAA, M. e JARVIS, J. (1977) "*Linear Programming and Network Flows*", John Wiley and Sons, New York.

BELLMAN, R. (1958) "On a Routing Problem", *Quart. Appl. Math.*,16,87 - 90.

BENAYOUN, R.DEMONTGOLFIER J.,TERGNY,J. e SARITTCHEV,O. (1971) "Linear Programming with Multiple Objective Functions: Step Method ", *Math. Programming* 1,366.

BERTSEKAS, D. P. (1982), "*Constrained Optimization and Lagrange Multiples Methods*", Academic Press, N.Y.

BRADLEY, G., BROWN, G> e GRAVES, G. (1977) "Design and Implementation of Large Scale Primal Transhipment Algorithms", *Management Science*, Vol 24(1) , 1 - 34.

BRAY, T. e WITZGALL, C. (1969) "Algorithm 336 NETFLON", *Comm ACM*, 11, 631 - 632.

BUSACKER, R. e GOWEN P. (1961) "A Procedure for Determining a Family of Minimum Cost Flow Patterns" Opn. Research Office Technical Reports, 15, Johs Hapkins University, Beltimore.

CLIMACO, J. e MARTINS E. (1982) "A Bicriterion Shortest Path Algorithms", *European Journal of Operational Research*

11, 399 - 404.

COHON, J. (1978) "*Multiobjetive Programming and Planning*" Academic Press, Inc, New York.

CURRENT, J., VELLE,C. eCOHON,J.(1985)"The Maximun Covering/ Shortest Path Problem : A Multiobjective Network Design and Routing Formulation", *European Journal of Operational Research* 21,189 - 199.

CHARNES, A. and COOPER, W. (1961) "*Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*",vol I,467 pp., John Wiley and Sons, New York.

DIJKSTRA, E. (1959) "A Note on Two Problems in Conexion with Graphs ", *Numer. Math.* 1, 269-271.

DYER, J. (1972) "Interactive Goal Programming" , Programming", *Management Sci.*, 19, 62.

ECKER,J. and KOUADA,J. (1975) "Finding Efficient Points for Linear Multiple Objective Programs", *Math.Programming* 8, 375.

EVANS, J. e STEWER, R.(1973) "A Revised Simplex Method for Linear Multiple Objective Programs, *Math. Programming* 5, 54.

EVANS, G (1984) "An Overview of Techniques for Solving Multiobjective Mathematical Programs, *Management Science*, 30(11), 1268 - 1282.

FICHEFET, J. (1976) "GPSTEM: An Interactive Multiobjetive Optimization Method", in A. Prekopa (Ed.), Progress in Operations Research, 1, 317 -332.

FISHBURN, P.(1970)"*Utility theory for Decisions Making*" John Wiley and Sons, New York.

FLETCHER, R.(1980) "*Practical Methods of Optimization*", John Wiley and Sons, New York.

FLOYD, R. (1962) "ALgorithm 97, Shortest Path",*Comm ACM* 5,p.345.

FORD, L. (1956) "Network Flow Theory", Rand Corporation, Sta. Monica, p.293.

FULKERSON, D.(1961)"An Out of kilter Method for Minimal Cost Flow Problems", *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 9,1.

GASS, S.e SAATY, T.(1955) "The Computational Algorithms for Parametric Objective Function", *Naval Res. Logist.Quart.* 2,39.

GEOFFRIONA. DYER J eFEINBERG A.(1972) "An Interactive Approach for Multi-Criterion Optimization with and Applications to the Operations of an Academic Department, *Management Sci* 19,357.

GLOVER, F.,KARNEY,D.e KLINGMAN, D. (1974) and "Implementation Computational Comparisons of Primal, Dual and Primal-Dual Computer Codes for Minimun Cost Network Flow Problems:, *Networks*, 14,3,191.

GLOVER, F., HULTZ J. e KLINGMAN, D (1978) "Improved Computer based Planning Techniques, Part I", *Interfaces* 8(4),16 - 25.

GLOVER, F., HULTZ, J. e KLINGMAN D. (1979) "Improved Computer- Based Planing Techniques, Part II, *Interfaces* 9(4),12 - 20.

GOFFIN J. L. (1977) "On Convergence rates of Subgradient Optimization Methods", *Mathematical Programming*, 13, 329 - 347.

GOICOECHEA, A, HANSEN don R., e DUCKSTEIN L. (1982), "*Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business*", John Wiley and Sons, New York.

GONDRAN, M. e MINOUX, M.(1984) "*Graphs and Algorithms*", John Wiley & Sons, New York

HANSEN P.(1980) "Bicriterion Path Problems" in M. Beckman and H.P (eds), Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems 177, Singer, Berlin 109 - 137.

HELD, M., WOLFE, P., e CROWDER, H.P.(1974) "Validation of Subgradients Optimization", *Mathematical Programming*, 6, 62 - 88.

HITCHCOCK, F. (1941) "Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities", *Journal of Mathematical Physics*, 20, 224 - 230.

HOLL, S. (1973) "Efficient Solution to a Multicriterio Linear Program, with Application to an Institution of Highter Education", 194 p., Ph.d. Thesis, Dept. of Math. Sciences, Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.

HOROWITZ, E. e SAHNI, S. (1987) "*Fundamentos de Estruturas de Dados*", Editora Campus, Rio de Janeiro.

HWANG, C. L. e MASUD, A. (1979) "Multiple Objetive Decision Making: Methods and Applications(a state of the art survey), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin 1979.

IGNIZIO, J.(1982) "*Linear Programming in Single & Multiple Objective Systems*", Prentice-Hall, Inc. New York.

IGNIZIO, P.,(1983) "An Approach to the Modelin and Analysis of Multiobjective Generalized Networks", *European Journal of Operational Research* 12, 275 - 361.

KARMARKAR, N.K.(1984) "A new Polinomial Algorithm for Linear Programming", *Combinatorica*,4,373-395.

KEENEY R. e RAIFFA, H. (1976) "Decision with Multiple Objectives : Preferencesand Value Tradeoffs", John Wiley and Sons, New York .

KENNINGTON, J. e HELGASON, R. (1980) "*Algorithms for Network Programming* ",Wiley - Interscience, New York.

KOOPMANS, T. (1949) "Optimum Utilization of the Transportation System", *Econometrica*, 17, 3 - 4.

KUHN, H. e TUCKER A.(1951) "Nonlinear Prrogramming" in J. Neyman (ed). Proceedings of the second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Univ. of California Press, Berkeley.

LOOTSMA F. A. (1988) "Optimization with Multiple Objectives" 13thInternational Symposium on Mathematical Programming, Tokyo.

MACULAN,N. e PEREIRA, M.(1980) "*Programação Linear*", ATLAS São Paulo.

MACULAN, N.(1978) "*Programação Linear Inteira*", COPPE e Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.

MALHOTRA,R., e PURI, M. (1984) "Bi-criteria Network Problem", *Cahiers du C.E.R.O.*, vol 26 N° 1- 2, 95 - 103.

MAYOR, D. (1969) "Benefit-Cost Rations for Projects in Multiple Objective Investment Programs", *Water Resourse Res.* 5,1174.

MARCOTTE, O., e SOLAND R. M. (1985) "An Interactive Branch- and- Bound Algorithm for Multiple Criteria Optimization", *Management Science*, 32, 1, 61-75.

MARGLIN, S. (1962) "Objectives of Water Resource Development : A General Statement In Design of Water-Resource Systems", A.Maass, et alii eds., pp 17 -87. Harvard, Univ.Press. Cambridge, Massachusetts.

MINOUX, M.(1986) *"Mathematical Programming - Theory and Algorithms"*, John Wiley and Sons, New York.

MOORE, E. (1957) "The Shortest Path Through a Maze", In Proceedings of an International Symposium on the Theory of Switching, Part II, Harvard Univ. Press, Cambridge, 285 - 292.

NGUYEN, S. (1984) "Network Flow Problems", Notas de Aula, PUC-RJ.

OCHI SATORU, L. (1989)"Contribuições ao Problema de Percurso e Seqüênciamento de Veiculos", Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ.

PHILIP, J. (1972) "Algorithms for the Vector Maximization Problem ", *Math. Programming* 2,207.

PHILLIPS, D. e GARCIA- DIAZ, A. (1982) "Fundamental of Network Analysis", Prentice Hall Englewood, Cliffs, NJ.

POLYAK, B. T.(1977) "Subgradient Methods : a Survey of Soviet Research in : Nonsmooth Optimization",C. Lemaréchal and R. Meffin, eds, Pergamon Press, pp 5 - 30.

POTTS, R. e OLIVER, R. (1972) *"Flows in Transpotation Networks"*, Academic Press, New York.

ROCKAFELLAR, R. T. (1981) "The Theory of Subgradients and its Optimization to Problems of Optimization. Convex and Nonconvex Functions, HELDERMANN VERLAG,berlin.

ROMERO, C. (1986) "A Survey of Generalized Goal Programming (1970-1982)", *European Journal of Operational*

Research 25, 183-191.

ROYD, B. e VINCKE, P. (1981) "Multicriteria Analysis : Survey and New Directions", *European Journal of Operations Research* 8, 207 - 218.

SANDI, C. (1979) "*Subgradient Optimization*", in Combinatorial Optimization, edited by N. CHRISTOFIDES et alii, John Wiley, New York.

SCHRIJVER, A. (1986) "*Theory of Linear and Integer Programing*", John Wiley and Sons, New York.

SHEFFI, Y (1985) "*Urban Transportation Networks : Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*", Prentice-Hall, New Jersey.

SHIN, W. S. e RAVINDRAN A. (1987) "Interactive Multiple Objective Mathematical Programing (MOMP) Methods: A Survey", Working Paper No. 87-15,School of Industrial Engeneering, Norman, Oklahoma.

SHOR, N. Z. e SHARBASTROVA, L. P. (1972) "Solution of Minimax Problems by the Generalized Gradient Method with Space Dilatation", *Cybernetics* 8(1),88-94.

SHOR, N. Z. (1968) "On the Rate of Convergence of the Generalized Graadient Methodd", *Kibernetica*, 4(3),98-99.

SLOWINSKI, R. e WARCZYNSKI, J. (1984) "Applications of de Ellipsoid Method in an Interactive Procedure for Multicriteria Linear Programing", *Operations Research*, 28, 89-100.

STEUER, R. E. (1977) "An Interactive Multiple bjective Linear Programing Procedures", TIMS Studies in the Management Sciences, 6, 225-239.

STEUER, R. E. e CHOO, E.U. (1983) "An Interactive

Weighted Tchebycheff Procedure for Multiple Objective Programing", *Mathematical Programing*, 26, 1, 326-344.

STEUER, R. E. e SCHULER A. T. (1978) "An Interactive Multiple Objective Linear Programing Approach to a Problem in Forest Management", *Operations Research*, 25, 2, 254-269.

SYSLO, M., DEO, N. e KOWALIK, J. (1983) "*Discrete Optimization Algorithms with Pascal Programs*",Prentice-Hall Inc, New Jersey.

TAHA, H.(1982) "*Operation Research an Introduction*", MACMILLAN PUBLISHING Co,Third Ed., New York.

WARSHALL, S. (1962) "A Theorem on Boolean Matrices", *J. ACM*, 9, 11-12.

WARBURTON, A. (1987) "Aproximation of Pareto- Optimo in Multiple-Objective, Shortest-Path Problemas", Operations Reserch, vol 35, N° 1, 70 - 79.

YU, P.L. (1974) "Cone Convexity, Cone Extreme Points, and Nodominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol 14, N° 3.

ZADEH, L. (1963) "Optimality and Non-Scaler- Valued Performance Criteria", *IEEE Transactions, Automatic Control*, AC, 8,59.

ZELENY, M. (1974) "Linear Multiobjective Programming" 220 pp, Springer-Verlag, Berlin and New York.

ZIONTS, S. e WALLENIUS, J. (1976) "An Interactive Programming Method for Solving the Multiple Criteria Problem", *Management Sci.* 22, 652.

ZIONTS, S. e WALLENIUS, . (1983) "An Interactive Multiple Objective Linear Programing Method for A Class of

Underlying Nonlinear Utility Functions", *Management Science*, 29, 5, 519-529.

APÊNDICE I

ASPECTOS TEÓRICOS DA DUALIDADE LAGRANGEANA

Primeiramente são considerados alguns aspectos teóricos do problema dual para um problema de programação matemática no formato padrão :

$$\text{Min} \quad f(x) \tag{1a}$$

s.a :

$$g_i(x) \leq 0 \quad i \in I = \{1,\ldots,m\} \tag{1b}$$

$$x \in S \subset \mathbb{R}^n \tag{1c}$$

Onde f e g são funções continuas $f,g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, e S um conjunto compacto.

Associa-se a cada restrição $i \in I$ um numéro real $\lambda_i \geq 0$ correspondente ao multiplicador de Lagrange de maneira a escrever a função de Lagrange para o problema (1), como :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) \tag{2}$$

Seja $\bar{x} \in S$ e $\bar{\lambda} \geq 0$, então $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ é um ponto de cela de $L(x, \lambda)$ se :

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\lambda}) \qquad \forall\, x \in S \tag{3a}$$

$$L(\bar{x}, \lambda) \leq L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \qquad \forall\, \lambda \geq 0 \tag{3b}$$

O problema (1) pode ser resolvido procurando um ponto de sela da função de Lagrange (MINOUX,1986), ou seja o par $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ que satisfaz :

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \min_{x \in S} L(x, \bar{\lambda}) \tag{4a}$$

$$g(\bar{x}) \leq 0 \tag{4b}$$

$$\lambda_i \; g_i(\bar{x}) = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,m) \qquad 4c$$

Para $\lambda \geq 0$ define-se a função $w(\lambda)$ como :

$$w(\lambda) = \inf_{x \in S} \{L(x, \lambda)\} \qquad 5$$

A seguir assume-se que as funções f e g_i e o conjunto S são tais que para todo ponto λ onde $w(\lambda)$ tem um valor finito, existe $\bar{x} \in S$ de modo que $w(\lambda) = L(\bar{x}, \lambda)$. Pode-se portanto escrever :

$$w(\lambda) = \min_{x \in S} \{L(x, \lambda)\} \qquad 6$$

Assim, um ponto de sela pode-se determinar resolvendo o problema :

$$\text{Max } w(\lambda) = \max_{\lambda} \{\min_{x \in S} L(x, \lambda)\} \qquad 7a$$

$$\lambda \in \mathbb{R}^{m+} \qquad 7b$$

Que corresponde ao problema dual de (1)

Sabe-se que a função dual w e o problema dual são definidos ainda que não exista um ponto sela.

Algumas importantes propriedades da função dual (w) são mostradas a seguir (MINOUX, 1986) :

PROPRIEDADE 1.

Para todo $\lambda \in \mathbb{R}^{m+}$ o valor da função $w(\lambda)$ é um límite inferior do valor ótimo absoluto $f(x^*)$ isto é, se $w(\lambda^*)$ é o valor ótimo do problema dual :

$$\forall \lambda \geq 0, \quad w(\lambda) \leq w(\lambda^*) \leq f(x^*) \qquad 8$$

PROPRIEDADE 2

A função dual w é uma funcão concava de λ.

Observa-se que no caso de S ser um subconjunto discreto de Z^n (programação enteira) a função w é não diferenciavel em todo ponto. Contudo a concavidade de w faz possivel estabelecer que todo ótimo local λ^o de w é um ótimo global e como o problema dual é mais facil de ser resolvido que o problema primal a dualidade é comunmente utilizada para determinar limites inferiores do método Branch and Bound (SCHRIJVER, 1986, MACULAN ,1978).

PROPRIEDADE 3

a) Se o problema (1) tem um ponto de sela (x^*,λ^*), então :

$$w(\lambda^*) = f(x^*) \qquad 9$$

Ou seja, o valor ótimo do problema primal é igual ao valor ótimo do problema dual.

b) Inversamente, se existe uma solução x^* do problema (1) e $\lambda \geq 0$, de modo que :

$$w(\lambda^*) = f(x^*) \qquad 10$$

Então o problema primal tem um ponto de sela que é (x^*,λ^*).

Esta propiedade é particularmente aplicada em problemas convexos.

PROPRIEDADE 4 (Subgradiente)

Para $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^{m+}$, com :

$$Y(\bar{\lambda}) = \{y \in S \;/\; f(y) + \sum_i \bar{\lambda}_i \; g_i(y) = w(\bar{\lambda})\} \qquad 11$$

Então para todo $y \in Y(\bar{\lambda})$, g(y) é o subgradiente de w em $\bar{\lambda}$. Segundo o anterior, todo vetor da forma g(y) com $y \in Y(\bar{\lambda})$, são subgradientes de w no ponto $\bar{\lambda}$.

Na propriedade seguinte mostra-se que, inversamente, todo subgradiente pode ser expresado como uma combinação convexa dos vetores g(y).

PROPRIEDADE 5

Supondo que as funções f e g_i(i ∈ I) são continuas em S e que uma das seguintes condições se mantem :

a) S é compacto

b) Existe um vizinhança V de $\bar{\lambda}$ de modo que para todo λ ∈ V, Y(λ) ≠ Ø e esta incluida em algum conjunto compacto fixo K ⊂ S.

Então o subdiferencial ∂w($\bar{\lambda}$) coincide com a envoltoria convexa de :

$$\tau = \{g(y) \ / \ y \in Y(\bar{\lambda}) \} \qquad 12$$

PROPRIEDADE 6 (Diferenciavilidade da função dual)

Quando a função w é diferenciavel no ponto $\bar{\lambda}$ então Y($\bar{\lambda}$) tem um unico elemento $\bar{y}$, e g($\bar{y}$) é o gradiente de w no ponto $\bar{\lambda}$. Para isto é necessario y suficente que as condições da propriedade anterior se mantenhan em $\bar{\lambda}$e que a função de Lagrange L(x, $\bar{\lambda}$) tenha um mínimo unico em x para λ = $\bar{\lambda}$.

PROPRIEDADE 7

Seja $\bar{\lambda} \geq 0$ ser solução ótima do problema dual então :

a) Se o problema primal tem um ponto de sela, então existe uma solução x^* tal que (x^*, λ) é um ponto de sela (x^* é então uma solução ótima do primal)

b) Se o problema primal tem um ponto de sela e L(x, $\bar{\lambda}$) tem um mínimo único em x($\bar{x}$ ∈ S) então, ($\bar{x}$, $\bar{\lambda}$) deve ser um ponto de sela e $\bar{x}$ é uma solução ótima do problema primal.

c) Supondo que w é diferenciavel em $\bar{\lambda}$ e se $\bar{x}$ é o mínimo(unico) em $\bar{x}$ de $L(x, \bar{\lambda})$, então o problema tem um ponto sela que é $(\bar{x}, \bar{\lambda})$.

PROPRIEDADE 8

Uma importante consequencia da propriedade anterior é : Se oproblema primal tem um ponto sela antão a função dual w pode não ser diferenciavel no ótimo.

Existem muitos problemas nos quais a função dual não é diferenciavel no ponto $\bar{\lambda}$, neste caso é necessario utilizar métodos de otimização para funções convexas o concavas que não são diferenciaveis em todo ponto.

PROPRIEDADE 9

Quando a propriedade 7-b não se mantém porque o problema primal não tem ponto de sela o porque o mínimo em x de $L(x, \bar{\lambda})$ não é única (logo a função w não é diferenciavel no ótimo $\bar{\lambda}$), então uma boa solução aproximada para o problema primal pode ser obtida resolvindo o problema dual

PROPRIEDADE 10

Para qualquer $\lambda \geq 0$, denotemos $\bar{x}(\lambda) \in Y(\lambda)$ um mínimo em x da função $L(x, \lambda)$. ntão $\bar{x}(\lambda)$ é um ótimo global do problema perturbado :

$$(\hat{P}) \quad \text{Min} \quad f(x) \tag{13a}$$

s. a :

$$g_i(x) \leq g_i(\bar{x}(\lambda)), \quad i \in I \tag{13b}$$

$$x \in S \tag{13c}$$

Supõe-se que o ótimo $\bar{\lambda}$ da função w(não diferenciavel em $\bar{\lambda}$) pode ser obtido com um algoritmo de subgradiente. Assim

pode-se gerar a sequencia λ^k que converge até $\bar{\lambda}$. Os pontos λ^k assim obtidos estão suficientemente proximos de $\bar{\lambda}$ são tais que a soma dos subgradientes $g(\bar{x}(\lambda^k))$ temdem a serem pequenos. Isto mostra que os pontos $\bar{x}(\lambda^k)$ são bôas aproximações da solução ótima do problema primal, porque segundo as propriedades antes mencionadas eles são soluções soluções otimas globais do problema que diferem só por uma pequena perturbação do lado direito das restrições.

Essa caracteristica dos métodos duais é particularmente interessante em muitas aplicações praticas onde se requere de soluções que satisfaz as restrições dentro de um certo pequenho (ε).

APÊNDICE II

CONE :

Um cone gerado pelos vetores c^1 e c^2 é o conjunto de todos os vetores denotados por c e definidos como :

$$c = \{c \mid c = ac^1 + bc^2 \ , \forall\ a,b \geq 0 \} \qquad 1$$

CONE POLAR:

Cone polar c^*de um cone c é o conjunto de todos os vetores que forman angulo de 90° ou menos com todos os vetores de c.

Um cone polar c^* de c indica direções nas quais pode-se movimentar a fim de melhorar simultâneamente todas as funções objetivos por isso c^* e é denominado cone das "boas direções".