CONTRIBUIÇÃO À CARACTERIZAÇÃO DAS MATRIZES (0-1) E SEU RELACIONAMENTO COM OS HIPERGRAFOS; VISANDO A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA

Walter Julio Cortez Morales

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.)

Nelson Maculan Filho
(Presidente)

Ruy Madsen Barbosa

Nair Maria M. de Abreu

Paulo Oswaldo Boaventura Netto

Carlos Alberto da Silva Franco

Rio de Janeiro - Brasil

Novembro- 1985

RESUMO

Neste trabalho apresentamos alguns tipos de matrizes totalmente unimodulares. Para tal introduzimos algumas novas definições como a generalização da matriz permutação, matriz zero-espaço, matriz nuclear e relacionamos com a teoria de hipergrafos.

Tratamos dos hipergrafos H com $\bar{\delta}(H)=2$, da seccionabilidade, de hipergrafos nucleares e caracterizamos problemas de matching maximal em hipergrafos. Baseando-nos nessas noções obtivemasnovos resultados de hipergrafos unimodulares.

Finalmente propomos dois métodos: O método do matching exponencial e o método dos vetores zero-espaço uniformes, para a obtenção de um hipergrafo maximal unimodular a partir de um hipergrafo arbitrário.

ABSTRACT

Some totally unimodular matrices are presented. In order to accornplish this we introduce some new definitions such as the generalized permutation matrix, zero-çpace matrix, nuclear matrix and we relate these concepts to the hypergraph theory.

The hypergraphs H with $\bar{\delta}(H)=2$, the çectional and the nuclear hypergraphs are also presented, We also treat problems of rnaximal matching in hypergraphs. Based on these concepts, we were able to obtain new results of unimodular hypergraphs.

As a final result, we present two methods: the exponential matching method and the uniform zero-space vectors methods, in order to obtain an unimodular rnaximal hypergraph from an arbitrary hypergraph.

DEDICATORIA

Ã minha mãe

Rufina Morales Vda. de Cortez

A minha esposa Olga Adelaida e à meus filhos: Walter Arturo, Ofelia Regina, Christian Fernando e Edwin Enrique, que com amor, compreensão me deram ambientes necessários à elaboração deste trabalho.

In memoriam

Ao Prof, Dr. Pedro Humberto Rivera Rodriguez

Ao Prof, José Aires Amorelli Vieira

AGRADECIMENTOS

Os meus sinceros agradecimentos aos professores: Dr. Nelson Maculan Filho e Dr. Clóvis Caesar Gonzaga, os quais tornaram possível a minha permanência na COPPE/UFRJ, pela imensa boa vontade, e eficiente orientação com valiosas sugestões desde minha formação do Curso de Mestrado até o presente trabalho.

Aos membros da Banca Examinadora de Exame de Qualificação: Dr. Clovis Caesar Gonzaga, Dr. João L. Facó e Dr. Nelson Maculan Filho.

Os meus agradecimentos especiais aos professores: Dr. Ruy Madsen Barbosa e Dr. Antonio Espada Filho, os quais muito me ajudaram no início de minha docência no IBILCE/UNESP, especialmente ao professor Doutor Ruy Madsen Barbosa pelas sugestões durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas do Grupo de Estudos e Pesquisa em Combinatória (GEPC) de São José do Rio Preto, pelos sinceros incentivos que por diversas vezes pacientemente ouviram minhas exposições, e em particular à professora Sandra Maria Venturelli Ferreira Dias, pelas observações quanto aos fluxogramas.

Meus agradecimentos também a todos os colegas do IBILCE/UNESP - Campus de São José do Rio Preto - SP, os quais me deram apoio seja na forma direta ou indiretamente.

Sou grato também ao professor Doutor Luiz Adauto da Justa Medeiros pelos primeiros contatos para minha vinda ao Brasil.

Meus agradecimentos às seguintes instituições pelo suporte financeiro:

DEA = Organización de los Estados Americanos - Lima - Perú.

CAPES = Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

FETA = Fundação de Ensino e Tecnologia de Alfenas (MG) em seu = excelente Presidente Professor Edson Velano.

PICD = Programa Institucional de Capacitação de Docente.

CNPq = Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

Agradeço também à secretária Nádia da Costa Silva pelo excelente trabalho de datilografia.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO .....

CAPÍTULO II - NOTAÇÕES, DEFINIÇÕES E RESULTADOS CONHECIDDS 4

II.1 - Introdução 4

11.2 - Problema de Otimização 4

11.3 - Particionamento da Matriz Restrição ... 7

11.4 - Teoría de Grafos e Hipergrafos 9

11.5 - Notações 14

CAPÍTULO III - MATRIZES TOTALMENTE UNIMODULARES 16

III.1 - Introdução 16

III.2 - Matriz Parcial 16

111.3 - Matriz Permutação Generalizada..... 23

111.4 - Matriz p-Dominada 27

111.5 - Matriz Zero-Espaço 28

III.6 - Matriz k-Nuclear 31

CAPÍTULO IV - HIPERGRAFOS UNIMODULARES 37

IV.1 - Introduções 37

IV.2 - Identificação da Matriz Zero-Espaço com Hipergrafo 37

IV.3 - Hipergrafo p-Dominado 40

IV.4 - Hipergrafos H com $\overline{\delta}(H)=2$ 43

IV.5 - Grafo Representativo 49

IV.6 - Hipergrafos Seccionáveis 51

IV.7 - Hipergrafo k-nuclear 57

IV.8 - Matching h-Uniforme 63

CAPÍTULO V - MÉTODOS DE OBTENÇÃO DE UM HIPERGRAFO U NIMODULAR 72

V.1 - Introdução 72

V.2 - Notações e Definições 73

V.3 - Descrição dos Métodos; 75

Matching Exponencial e dos Vetores Zero-Espaço Uniformes, ... 76

V.4 - Fluxogramas dos Métodos 84

V.5 - Exemplos que Ilustram os Métodos 89

CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES E EXTENSÕES 106

BIBLIOGRAFIA 108

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Os trabalhos de Berge |3|, Camion |7|, Commoner |8|, Chandrasekaram|10|, de Werra |11|, Ghouila-Houri |15|, Heller |19|, Hoffman e Kruskal |20|, Padberg |24|, Tamir |27| e Truemper |28| mostraram a unimodularidade da (0,1)-matriz A, na busca de uma solução inteira para problema de programação linear inteira. Analogamente trataram do hipergrafo uninodular, |1|, |3| e |21|.

Os autores Hoffman e Kruskal mostraram que a matriz inteira mxn A é totalmente unimodular se, e somente se, seu politopo associado P(A,b) (b é um m-vetor inteiro) possue vértices de componentes inteiras. Na década de 70, Berge |4| entendeu a teoria de matrizes totalmente unimodulares para matrizes balanceadas. Desta maneira as matrizes totalmente unimodulares ficam contidas nas matrizes balanceadas. Analogamente, todo hipergrafo unirnodular é balanceado. |1| e |3|.

No presente trabalho tratamos de alguns tipos de matrizes totalmente unimodulares.

Apresentamos novos resultados sobre hipergrafos H com $\overline{\delta}(H)=2$.

Caracterizamos o matching maximal que nos foi Útil para obtermos dois novos teoremas sobre hipergrafos unimodulares, que julgamos muito importantes no presente trabalho.

Usando os resultados anteriores, apresentamos dois métodos para a obtenção de um hipergrafo maximal unirnodular, a partir de um hipergrafo dado. Estes métodos proporcionam par

ticionamentos adequados na matriz de incidência, um resultado que julgamos relevante e que não encontramos na literatura especializada.

No Capítulo I, apresentamos definições, notações e resultados conhecidos que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

No Capitulo II, colocamos algumas definições que nos possibilitaram obter alguns tipos de matrizes totalmente unimodulares.

Introduzimos o conceito de vetor zero-espaço, que é um (0,1)-vetor h-zeros e t-espaços, onde as h primeiras componentes são zeros e (h+1)-ésima componente é diferente de zero e t indica o número máximo de zeros que há entre duas componentes consecutivas diferentes de zero. Em outras palavras, um vetor zero-espaço é um vetor que tem suas primeiras componentes iguais a zero e menos espalhadas,

Desta maneira, conseguimos nos munir de uma propriedade adequada entre as componentes de um (0,1)-vetor.

Estudamos sobre as matrizes particionáveis e k-nucleares. Com respeito a estas matrizes, apresentamos alguns resultados importantes que obtivemos e que nos permitem dizer se uma matriz k-nuclear é ou não totalmente unimodular.

No Capítulo IV, baseando-nos nos conceitos vistos no Capítulo III, identificamos os vetores-linha da matriz de incidência e as arestas do hipergrafo associado. Isto nos foi fundamentalmente valioso, abrindo-nos perspectivas de tratamento teórico e encaminhamento prático das questões relacionadas.

Obtivemos novos resultados sobre hipergrafos H

com $\overline{\delta}(H)=2$. A partir destes conseguimos provar que toda (0,1)-matriz t-espaço uniforme é totalmente unimodular.

Estabelecemos uma condição que deve ser satisfeita por grafo representativo para que o hipergrafo respectivo seja unimodular.

Em nosso trabalho, a noção de hipergrafo k-nuclear é colocada como correspondente à matriz de incidência k-nuclear. Com respeito a estes hipergrafos apresentamos alguns resultados importantes que obtivemos e que nos permitem dizer se um hipergrafo k-nuclear é ou não unimodular.

Obtivemos uma nova caracterização do matching maximal. A partir deste resultado conseguimos dois teoremas sobre hipergrafos unimodulares.

No Capítulo V, baseando-nos nos resultados dos Capítulos III e IV e introduzindo a noção de matching exponencial, propomos dois métodos para a obtenção de um hipergrafo maximal unimodular a partir de um hipergrafo dado, ou uma matriz parcial totalmente unimodular da matriz de incidência associada ao hipergrafo. Estes métodos são:

i) O método de matching exponencial e

ii) O método dos vetores zero-espaço uniformes.

Além de descrevermos estes métodos apresentamos seus fluxogramas com o propósito de facilitar seus entendimentos. Apresentamos também alguns exemplos que ilustram o uso destes métodos.

No Capítulo VI, apresentamos os resultados obtidos neste trabalho e algumas possíveis extensões.

CAPÍTULO II

NOTAÇÕES, DEFINIÇÕES E RESULTADOS CONHECIDOS

II.1 - INTRODUÇÃO

As definições e resultados conhecidos sobre problema de otimização, teoría de grafos e hipergrafos podem ser encontrados em |2|, |3|, |6|, |14|, |18|, |21|, |22|, |26| e |29|.

II.2 - PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Um problema de otimização sobre um espaço Euclideano de dimensão finita tem a seguinte estrutura,

$$v(b) = \inf f(X) \qquad [PO]$$

$$\text{s.a}$$

$$g_i(X) \geqslant b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$X \in P \subseteq \mathbb{R}^n$$

onde as funções f e g_i são funções reais arbitrárias e P é um sub-conjunto arbitrário do $\mathbb{R}^n$

Se todas as funções f, g_i, $i=1,2,\ldots,m$, foram 'lineares, isto é:

$$f(X)=\langle C,X\rangle, \quad g_i(X)=\langle A_i,X\rangle, \quad (C\in \mathbb{R}^n) \quad A_i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$$

e P é o conjunto de soluções para a coleção finita de desigualdades da forma,

$$\langle A_i,X\rangle \geqslant b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

ou $AX>b$ e $X>0$, (A é a matriz de ordem mxn que tem por vetores -linha $A_i=(a_{i_1},a_{i_2}, \quad a_{in})$, $i = \{1,2,...,m\}$ então [PO] toma a seguinte estrutura.

$$Z = \min \langle C,X\rangle \qquad [PPL]$$

$$\text{s.a.}$$

$$AX \geqslant b$$

$$X \geqslant 0$$

Esta é a estrutura de um problema de programação linear |PPL|. A função $\langle C,X\rangle$ ou CX é denominada função objetivo e A é chamada matriz restrição. Qualquer X tal que verifica $AX>b$ e $X>0$ é chamado uma solução viável de [PPL]. O conjunto de solução viáveis de [PPL] é chamado poliedro associado a [PPL].

No [PPL] acrescentando à condição de não-negatividade $X>0$, a exigência de que X seja inteiro, obtemos um caso de problema de programação linear inteira [PLI], |14|, |23| e|26|, isto é,

$$Z = \min CX \qquad [PLI]$$

$$\text{s.a.}$$

$$AX>b$$

$$X > 0 \text{ e inteiro}$$

Considerando no [PLI], o vetor c unitário (todas as componentes de c são 1^s) e a matriz A de elementos inteiros -não-negativos a sem qualquer coluna nula, obtemos um caso de PR um problema de recobrimento, |5|, |14|, isto é,

$$Z = \min CX \qquad [PR]$$

$$\text{s.a.}$$

$$AX \geqslant b, \quad X \varepsilon \{0,1\}^n.$$

No presente trabalho nos refererimos à matriz restrição de [PR].

Um ponto extremo (ou vértice3 de um poliedro P é um elemento x de P o qual não pode ser escrito como $\lambda y+(1-\lambda)z$. onde $\lambda\varepsilon(0,1)$ e $y,z\neq x$.

O problema de programação linear [PPL] é chamado limitado se existe uma constante k não-negativa tal que $\sum_i |x_i| \leqslant k$ para cada solução viável x.

Seja S qualquer conjunto de vetores. Uma combinação linearconvexa de elemento de S é qualquer vetor y tal que $y = \sum_{i\varepsilon I} \lambda_i y_i$, onde I é um conjunto de índices, $\lambda_i \geqslant 0$ para $i \varepsilon I$, $\sum_i h_i = 1$ e $y_i \varepsilon S$ para $i\varepsilon I$.

Definimos o fecho convexo de S, denotado por conv.(S), como conjunto de todas as combinações lineares convexas dos elementos de S.

Uma solução viável do [PPI] é qualquer n-vetor inteiro x o qual é viável para [PPL].

Quando o poliedro P

$$P \equiv P(A,b) = \{X\varepsilon \mathbb{R}^n / AX \geqslant b,\ X \geqslant 0\}$$

é limitado, então o conjunto de soluções viáveis de [PLI] é finito e definimos o poliedro associado com o problema de programação linear inteira, como fecho convexo de suas soluções viáveis, ou seja

$$\overline{P(A,b)} = \text{conv.}(\{X \text{ E } \mathbb{Z}^n / AX \geqslant b,\ X \geqslant 0\})$$

Em alguns casos este poliedro coincide com P(A,b).

Se a matriz restrição A de [PPL]for totalmente unimodular, então é conhecido que,

$$P(A,b)=\text{conv}(\{ X \varepsilon \mathbb{Z}^n / AX \geqslant b, X \geqslant 0\}),\ |^{20}|\ \text{e}\ |^{22}|$$

II.3 - PARTICIDNAMENTO DA MATRIZ RESTRIÇÃO

Se A admite o particionamento em linha, isto é, $A = \left(\begin{smallmatrix} D \\ E \end{smallmatrix}\right)$, com E totalmente unimodular, então temos o seguinte problema de Lagrange, |12|;

$$
\begin{aligned}
Z_D(u) = \min\{(cX + u(DX - b_1)\} \\
\text{s.a} \\
EX \geqslant b_2 \\
X \varepsilon \{0,1\}^n
\end{aligned}
$$

Sendo E totalmente unimodular, então este problema torna-se um problema de programação linear relaxado:

$$
\begin{aligned}
Z_D(u) = \min\{CX + u(DX - b_1) \\
\text{s.a} \\
EX \geqslant b_2 \\
0 \leqslant X \leqslant e \qquad (e^t = (1,1,\ldots,1))
\end{aligned}
$$

No que se refere à determinação do vetor multiplicador u, observamos que, em geral, não é possível garantir o encontra de um u para o qual ocorra

$$Z_D(u) = Z$$

Contudo, a igualdade ocorre para certos problemas particulares.

É evidente que a melhor escolha de u seria a solução ótima obtida resolvendo-se o problema dual.

$$
Z_D = \max_u Z_D(u) = \max_u \left\{ \begin{array}{l} \min[cx + u(Dx - b_1)] \\ \text{s.a} \quad Ex \geqslant b_2 \\ \qquad 0 \leqslant x \leqslant \mathbb{1} \end{array} \right\} \qquad [D]
$$

Entre as técnicas usadas para a resolução de [D] aparecem:

1. O método de subgradiente,
2. Varias versões do método simplex implementado, usando a técnica de geração de colunas, e
3. O metodo de ajustamento dos multiplicadores,

No caso de particionamento de A na forma (B,N), |26|, com B matriz totalmente unimodular, supondo que B é de ordem m e não singular, então o [PLI] pode ser colocado na seguinte forma:

$$\min.\ C_B B^{-1} b - (C_B B^{-1} N - C_N) X_N \qquad [1]$$

$$\text{s.a}\quad X_B = B^{-1} b - B^{-1} N X_N$$

$$X_B \geqslant 0 \text{ e inteiro}$$

$$X_N \geqslant 0 \text{ e inteiro}$$

Sendo $C_B B^{-1}$ um termo constante e que não influi no problema de minimização; dizer que X_B é inteiro é equivalente a escrever

$$XB \equiv 0 (\text{mód}.1) \text{ ou } B^{-1} N X_N \equiv B^{-1} b (\text{mod}.1) \qquad [2]$$

Portanto, [1] é equivalente ao problema

$$\max.\ (C_B B^{-1} N - C_N) XN \qquad [3]$$

$$\text{s.a}\quad B^{-1} N X_N \equiv B^{-1} b\ (\text{mód}.1)$$

$$X_N \geqslant 0 \text{ e inteiro}$$

$$X_B = B^{-1} b \cdot B^{-1} N X_N \geqslant 0$$

Observa-se que, se X_N satisfaz [2], isto implica na integridade de X_B que verifica [1] e reciprocamente. Logo, podemos ter a solução de [1] pela resolução de [3].

Admitindo-se B da solução dual viável, isto é,

$$\bar{c} = (\bar{c}_j) = c_B B^{-1} N - C_N \geq 0$$

abandonando a não-negatividade de X_B observando que $B^{-1}NX_N$ é equivalente a $\overset{n}{\underset{j=1}{C}} \alpha_j x_{J(j)}$ onde a_j é a j-ésima coluna da $B^{-1}N$ e $x_{j(j)}$ é a j-ésima $(1 \leq j \leq n)$ variável não-básica e denotando $B^{-1}b$ pelo vetor coluna a_o, então [3] é equivalente ao seguinte problema denominado problema de grupo:

$$\max. \overset{n}{\underset{j=1}{C}} \bar{c}_j x_{J(j)} \qquad [PG]$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_j X_{J(j)} \equiv \bar{\alpha}_o \ (\text{mód.}1)$$

$$X_{J(j)} \ 3 \ 0 \text{ e inteiro}, \ j = 1,2,\ldots,n$$

onde $\bar{c}_j \geq 0$ e cada vetor-coluna $\alpha_j (j=1,2,\ldots,n)$ verifica $0 \leq \bar{\alpha}_j \leq e$ (onde $e^t = (1,1,\ldots,1)$).

Entre os algoritmos existentes para a resolução do problema de grupo aparecem os algoritmos de programação dinâmica e o algoritmo de enumeração de Shapiro.

II.4 - TEORIA DE GRAFOS E HIPERGRAFOS

Um grafo G é um par (Y,U) onde os elementos do conjunto $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ são chamados vértices e os elementos de $U \subseteq Y \times Y$ são denominados arcos.

Um arco que tem por pontos extremos os vértices x e y, se denota (x,y) ou u=(x,y).

Se existe (x,x) então o arco se denomina laço.

Um grafo G é simples se não possui laços e no máximo

um arco ligando doi's vertices quaisquer.

Um grafo $G=(Y,U)$ é completo se $m_G(x,y)\geq 1$, ($m_G(x,y)$ denota o número de arcos que ligam x e y) para todo x, y $\in$ Y tal que $x \neq y$.

Os vértices x e y são adjacentes se existe um arco que tem como pontos extremos x e y.

Uma cadeia de comprimento $q > 0$, é uma sequência $u = (u_1, u_2, \ldots, u_q)$ de arcos de grafos $G = (Y,U)$, tal que para cada arco $u_i=(x,y)$ da sequência existem arcos u_j e u_k distintos na sequência da forma

$$u_j = (b,x) \quad e \quad u_k = (y,z).$$

O número de arcos que aparecem na cadeia é o comprimento da cadeia.

Uma cadeia é elementar se não encontrar o mesmo vértice duas vezes. Uma cadeia é simples se não usa o mesmo arco duas vezes.

Um ciclo é uma cadeia onde um arco não aparece duas vezes e os vértices extremos da sequência são o mesmo vértice.

Um grafo $G=(Y,U)$ é bipartido se existe uma partição (Y_1, Y_2) de Y tal que os vértices que compõem cada conjunto não são adjacentes.

Um grafo G é bipartido se e somente se G não possui ciclos de comprimento ímpar.

Um sub-conjunto C de Y no grafo simples $G=(Y,U)$ é um clique se cada par de vértice distintos for adjacentes em C.

Um hipergrafo H é um par (X, E), onde X é um con

junto arbitrário e E é uma família de partes de X tal que

$\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E = X$

A cada hipergrafo $H=(\{x_1,x_2,\ldots,x_n\},(E_1,E_2,\ldots,E_m))$ corresponde o hipergrafo dual $H^*=(\{e_1,e_2,\ldots e_m\},(X_1,X_2,\ldots,X_n))$ onde os vértices $e_1,e_2,\ldots,e_m$ de H^*, correspondem respectivamente as arestas $E_1,E_2,\ldots,E_m$ de H e as arestas $X_1,X_2,\ldots,X_n$ de H^* correspondem respectivamente aos vértices $x_1,x_2,\ldots,x_n$ de H, assim definidos

$$X_j = \{e_i / i \leq m,\ x_j \in E_i\} \text{ para } j = 1,2,\ldots,n$$

Definimos o rank de W $(W \subseteq X)$ como

$$\text{rank}(W) = \max_{E \in \mathcal{E}} |W \cap E|.$$

Se W=X, então o rank de W é chamado o rank de H, isto é,:

$$\text{rank}(X) = \text{rank}(H) = \max_{E \in E} |E|$$

Dado o hipergrafo $H=(X,E)$ e os subconjuntos $A \subseteq X$ e $F \subseteq \xi$, então os hipergrafos:

$H_A = (A,\xi_A)$, onde $\mathcal{E}_A = (E \cap A / E \in \mathcal{E},\ E \cap A \neq \phi)$ e

$H_F = (X_F, F)$, onde $X_F = \bigcup_{F \in E} F$ são denominados, respectivamente for subhipergrafo gerado por A e hipergrafo parcial gerado pela subfamília F de $\mathcal{E}$.

Uma cadeia no hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$ é uma sequência $C_q=(x_1,E_1,x_2,\ldots,x_q,E_q,x_{q+1})$ tal que:

i) $x_1,x_2,\ldots,x_q$ são vértices distintos de H.

ii) $E_1, E_2, \ldots, E_q$ são as arestas distintas de H.

iiil $x_k, x_{k+1} \varepsilon E_k$ para $k=1,2,\ldots,q$.

Se $q>1$ e $x_{q+1}=x_1$, C_q é um ciclo e o inteiro q é impar ou par, então C_q é um ciclo ímpar ou par.

Um subconjunto não vazio M de arestas do hipergrafo $H=(X,\mathcal{G})$ é um matching se para todo par (E,F) de $M \times M$, $E \neq F$, implica que $E \cap F = \phi$.

O matching M é maximal, se M não for conjunto próprio de outro matching.

Consideremos o hipergrafo $H=(X,\mathcal{G})$ de arestas distintas e M um matching. Denotemos $L=\mathcal{G}-M=\{F_1,F_2,\ldots,F_q\}$.

Uma sequência alternada relativa ao matching M, denotada por σ_M^P é a seqüência

$\sigma_M^P=(F_1,E_1,\ldots,F_p,E_p)$ de arestas distintas e tais que:

i) $F_i \varepsilon L$

iil $E_i \varepsilon M-\{E_1,E_2,\ldots,E_{i-1}\}$ e $E_i \cap (\bigcup_{j \leqslant i} F_j) \neq \phi$

iii) $F_{i+1} \varepsilon L-\{F_1,F_2,\ldots,F_i\}$ e

$F_{i+1} \cap (\bigcup_{j \leqslant i} F_j) \neq \phi$ e

$F_{i+1} \cap (\bigcup_{j \leqslant i} F_j) = \phi$

Uma seqüência σ_M^P é máximal se não houver mais arestas que possam ser adicionadas a σ_M^P sem violar as propriedades iil - iiil.

A sequência alternada σ_M^P é de comprimento ímpar ou par se o inteiro positivo p for ímpar ou par.

Um matching M do hipergrafo H é maximal se e somente se não existir uma sequência alternada maximal relativa a M de comprimento impar

Um subconjunto não vazio W de X (H=(X, $\mathcal{E}$) é estável de H se, não contém nenhuma aresta E com $|E|>1$.

Uma q-colaboraçao de H é uma partição de X em q conjuntos estáveis;

$$S_1, S_2, \ldots, S_q$$

tal que cada S_i, $i=1,2,\ldots,q$ somente corresponde a uma côr.

Se H possuir uma q-coloração então H é q-colorável.

O número cromático, denotado por $x(H)$, de H é o menor inteiro positivo q tal que H é q-coloravel.

Uma q-coloração $(S_1, S_2, \ldots, S_q)$ do hipergrafo $H = (x, E)$, $\mathcal{E} = (E_i / i \varepsilon I = \{1,2,\ldots,m\})$ é equitativa se para cada $i \varepsilon I$ e para cada $j,k \leqslant q$ se verifica

$$||E_i \cap S_j| - |E_i \cap S_k|| \leqslant 1$$

Um hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$ é unimodular se para cada $S \subseteq X$, o subhipergrafo H_S admitir uma bicoloração equitativa.

Um hipergrafo $H=(X, \mathcal{E})$ é dito balanceado se cada C_q ciclo ímpar possuir uma aresta E tal que contenha pelo menos três vértices de C_q.

Uma (0,1)-matriz A se diz balanceada se A for a matriz de incidência de um hipergrafo balanceado, ou aquivalentemente, se A não contiver nenhuma submatriz quadrada de ordem ímpar tal que a soma dos elementos da linha(coluna) seja igual a dois.

Um hipergrafo unimodular é balanceado.

Se um hipergrafo H não possui ciclos ímpares, então H é unimodular.

Um hipergrafo H é unimodular se, e somente se, sua matriz de incidência for totalmente unimodular.

Um hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$ possui matriz de incidência totalmente unimodular se, e somente se, cada subhipergrafo H_S, $S\subseteq X$, possuir uma bicoloração (A_0,A_1) tal que:

$$\left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor \leq |E\cap A_1| \leq \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil$$

para cada aresta E de H_S.

II.5 - NOTAÇÕES

Adotaremos as seguintes notações no presente trabalho

$\mathbb{Z}$	Conjunto de números inteiros
$\mathbb{Z}^+$	Conjunto de números inteiros não negativos
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reais
$\mathbb{R}^n$	O espaço Euclideano n-dirnensional
$x\in A$	x é elemento ou membro de A
$A\subseteq B$	A é um subconjunto do conjunto B
$A\subset B$	A é um subconjunto próprio do conjunto B
$A\cup B$	União dos conjuntos A e B
$A\cap B$	Interseção dos conjuntos A e B
$A\times B$	Produto cartesiano dos conjuntos A e B
ϕ	Conjunto vazio
$\|A\|$	Cardinalidade da conjunto A

$(A_1, A_2, \ldots, A_m)$	Família de matrizes parciais-linha
$(A^1, A^2, \ldots, A^n)$	Família de matrizes parciais-coluna
$\det(A)$	Determinante da matriz A
$A(M)$	Matriz complementar da submatriz cortada (ou parcial) M da matriz A
M^c	Submatriz complementar da submatriz cortada (ou parcial) M de A
$[M]$	Matriz gerada pela submatriz cortada [ou parcial] vertical M, isto é, a matriz parcial-linha que tem o mesmo número de linhas que M
$\mathbb{P}_W$	Matriz permutação generalizada sobre W
$N(A)$	Núcleo da matriz A
$x \ll y$	O vetor y domina vetor x
$v[i]$	O vetor $v \in \mathbb{R}^n$ sem sua i-ésima componente x_i
$\exists x$	Existe um elemento x
$\lceil r \rceil$ ($\lfloor r \rfloor$)	Menor inteiro $\geq r$ (Maior inteiro $\leq r$)
$G=(Y,U)$	Grafo G com conjunto de vértices Y e arestas U
$H=(X,\mathcal{E})$	Hipergrafo H com conjunto de vértices X e arestas $\mathcal{E}$
$\psi: Y \to X$	Mapearnento, isto é, aplicação ponto a conjunto
$\lvert X \rvert = n(H)$	O número de vértices do hipergrafo H
$\lvert \mathcal{E} \rvert = m(H)$	O número de arestas do hipergrafo H
$\delta_H(S)$	Grau do conjunto $S (S \subset X)$ no hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$
$\mathcal{E}_S$	Conjunto Grau de S.
E_{ht} ou $E(h;t)$	O (0,1)-vetor E h-zeros e t-espapo
$\lvert E_{ht} \rvert$	Norma do vetor h-zero e t-espaço ou cardinalidade da aresta E_{ht} do hipergrafo H.
$\mathcal{E}-(E_i)_{i \in J}$	Conjunto de arestas de H obtido pela remoção da família $(E_i)_{i \in J}$ de arestas

CAPÍTULO III

MATRIZES TOTALMENTE UNIMODULARES

III.1 - INTRODUÇÃO.

Neste capitulo apresentamos alguns resultados sobre tipos de matrizes totalmente unimodulares. Para conseguir estes resultados, introduzimos noções de matriz parcial, matriz permutação generalizada, que é uma extensão da definição clássica da matriz permutação, vetor zero-espaço e estendemos esta noção para matriz zero-espaço. A idéia de vetor zero-espaço nos permitirá a escolha de um vetor entre outros, de maneira que o vetor escolhido apresente uma estrutura especifica entre suas componentes, diferentemente dos outros vetores.

Desenvolvemos o particionamento de uma matriz. Obtemos condições para que as matrizes p dominada e K-nuclear sejam totalmente unimodulares.

III.2 - MATRIZ PARCIAL.

Definição III.2.1:

Seja $A=(a_{ij})$ uma matriz de ordem mxn.

Uma submatriz $P=(p_{ij})$ de A é chamada parcial cortada (ou parcial-linha ou parcial-coluna) se P for de ordem rxs (ou rXn ou mXs) para os inteiros r, s $\in \mathbb{Z}^+$ tais que $1 \leq r \leq m$ e $1 \leq s \leq n$.

Ilustração. - Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

então a submatriz:

i) $B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ é parcial cortada horizontal

ii) $C = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$ é parcial-linha

iii) $D = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ é parcial-coluna

Seja $U=(u_{ij})$ a matriz universal de ordem $m \times n$, isto é, $u_{ij}=1$ para todo $i=1,2,\ldots,m$ e para todo $j=1,2,\ldots,n$.

Uma matriz A é universalizada em linha (ou em coluna) se A tem uma matriz parcial-linha (ou parcial-coluna) universal.

<u>Definição III.2.2</u>:

Uma matriz inteira quadrada não singular é unimodular se seu determinante vale 1 ou -1.

Ilustração. - A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

é unimodular, pois det(A)=-1

Definição III.2.3:

Uma matriz inteira é totalmente unimodular se cada sub-matriz quadrada não singular for unimodular.

Apresentamos uma caracterização da matriz totalmente unimodular, que já existe na literatura, no seguinte

Lema III.2.1: Uma matriz inteira é totalmente unimodular se e somente se cada submatriz quadrada possui determinante zero ou ±1.

A matriz $A=(A_{ij})$ de ordem mxn onde $a_{ij}=0$ ou ±1 para todo $i=1,2,\ldots,m$ e $j=1,2,\ldots,n$, é chamada (0,±1)-matriz, |25|.

Lema III.2.2: Toda matriz totalmente unimodular é uma (0,±1) matriz.

Dem.

Seja $A=(a_{ij})$ uma matriz totalmente unimodular.

Suponhamos que exista um elemento a_{ts} de A tal que seja difecente de zero e de ±1, então a submatriz quadrada (ordem 1) não-singular $|a_{ts}|$ não é unimodular, o que contràdiz ao lema II.2.1.

Portanto, todo elemento de A é zero ou ±1.

A recíproca do lema III.2.2 não é verdadeira, o que ilustra a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

que é uma (O,+]-matriz, no entanto seu determinante vale -2.

<u>Proposição III.2.1</u> - Seja A uma (0,1)-matriz de ordem mxn.

Toda submatriz parcial-linha de A é totalmente = unimodular se, for de ordem hxn para $1 \leqslant h \leqslant 2$.

Dem.

Consideremos M uma matriz parcial-linha de ordem hxn, $1 \leqslant h \leqslant 2$ de A e provemos que M é totalmente unimodular.

Suponhamos que M possuia uma submatriz quadrada não singular B de ordem 2, cujo determinante seja diferente de ± 1, isto é,

$$B = \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{is} \\ a_{tj} & a_{ts} \end{pmatrix}$$

de onde seu determinante vem a ser a expressão

$$a_{ij}a_{ts} - a_{tj}a_{is}.$$

Mas, é impossível que seu valor seja diferente de ± 1, pois os elementos a_{ij}, a_{is}, a_{tj} e a_{ts} são apenas zero ou um.

<u>Proposição III.2.2</u> - Toda (0,1)-matriz $W=(w_{ij})$ de ordem 3xn é totalmente unimodular se existe $i_o \varepsilon \{1,2,3\}$ tal que $w_{i.j}=1$ para todo $j=1,2,...,n$

Dem.

Seja B uma submatriz quadrada de W de ordem 3.

Sem perda da generalidades, suponhamos que a primeira linha de W seja formada pelos ementos 1^s, visto que isto implicaria apenas numa mudança do sinal, no determinante de B. Assim, o det B vem a ser.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ w_{ij} & w_{ik} & w_{is} \\ w_{tj} & w_{tk} & w_{ts} \end{vmatrix}$$

de onde, usando as propriedades de determinantes, podemos escrever.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ w_{ij} & w_{ik} & w_{is} \\ w_{tj} & w_{tk} & w_{ts} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_{ik} & w_{is} \\ w_{tk} & w_{ts} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} w_{is} & w_{ij} \\ w_{ts} & w_{tj} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} w_{ij} & w_{ik} \\ w_{tj} & w_{tk} \end{vmatrix}$$

Sabe-se que cada determinante parcela, tem valor zero ou ±1; portanto, para provarmos que det(B)=0 ou ±1, nos bastará demonstrar que não ocorre nenhum dos casos considerados abaixo:

Caso 1: Cada determinante parcela 1 ou -1.

Basta considerarmos o caso em que cada determinante parcela vale 1, pois outra hipótese se reduz a esta consideração, apenas pela permutação de linhas ou colunas;

Caso 2: Dois dos três determinantes parcela têm valor 1 ou -1.

Analogamente, basta-nos considerar que os dois primeiros determinantes parcelas valem 1 e o Último determinante tem valor zero, visto que isto implicaria apenas na posição dos determinantes parcela.

Caso 1: Suponhamos que temos

$$\begin{vmatrix} w_{ik} & w_{is} \\ w_{tk} & w_{ts} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_{is} & w_{ij} \\ w_{ts} & w_{tj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_{ij} & w_{ik} \\ w_{tj} & w_{tk} \end{vmatrix} = 1$$

de onde temos que:

$$\begin{vmatrix} w_{ik} & w_{is} \\ w_{tk} & w_{ts} \end{vmatrix} = 1 \quad \text{implica que } (w_{ik}=w_{ts}=1) \text{ e } (w_{tk} \text{ ou } w_{is} \text{ é zero}) \qquad [1]$$

$$\begin{vmatrix} w_{is} & w_{ij} \\ w_{ts} & w_{tj} \end{vmatrix} = 1 \quad \text{implica que } (w_{is}=w_{tj}=1) \text{ e } (w_{ts} \text{ ou } w_{ij} \text{ é zero}) \qquad [2]$$

e

$$\begin{vmatrix} w_{is} & w_{ik} \\ w_{tj} & w_{tk} \end{vmatrix} = 1 \quad \text{implica que } (w_{ik}=w_{tk}=1) \text{ e } (w_{tk} \text{ ou } w_{ik} \text{ é zero}) \qquad [3]$$

daí usando [2] com [1] resulta que $w_{tk}=0$ e por [3] tem-se que $w_{tk}=1$ o que é absurdo. Portanto, não ocorre o caso 1.

Agora provemos que também não ocorre o caso 2

Suponhamos que ocorra o caso 2, isto 6:

$$\begin{vmatrix} w_{ik} & w_{is} \\ w_{tk} & w_{ts} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_{is} & w_{ij} \\ w_{ts} & w_{tj} \end{vmatrix} = 1 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} w_{ij} & w_{ik} \\ w_{tj} & w_{tk} \end{vmatrix} = 0$$

de onde temos que

$$\begin{vmatrix} w_{ik} & w_{is} \\ w_{tk} & w_{ts} \end{vmatrix} = 1 \quad \text{implica que } (w_{ik}=w_{ts}=1) \text{ e } (w_{tk} \text{ ou } w_{is} \text{ é zero}) \qquad [4]$$

$$\begin{vmatrix} w_{is} & w_{ij} \\ w_{ts} & w_{tj} \end{vmatrix} = 1 \quad \text{implica que } (w_{is}=w_{tj}=1) \text{ e } (w_{ts} \text{ ou } w_{ij} \text{ é zero}) \qquad [5]$$

e

$$\begin{vmatrix} w_{ij} & w_{ik} \\ w_{tj} & w_{tk} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{implica as seguinte matrizes}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} \qquad [6]$$

$[6^{I}]$ $[6^{II}]$ $[6^{III}]$ $[6^{IV}]$ $[6^{V}]$ $[6^{VI}]$

Não precisam ser consideradas as matrizes

$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$, pois implicam que det(B)=0

[5] implica $w_{tj}=1$ contradizendo $[6^{I}]$ ou $[6^{III}]$ ou $[6^{IV}]$ ou $[6^{VI}]$

[4] implica $w_{ik}=1$ contradizendo $[6^{II}]$ ou $[6^{III}]$.

Concluímos assim a demonstração de nossa proposição.

Observamos na proposição III.2.2 que em vez de considerarmos $w_{i_0j}=1$ para todo $j=1,2,\ldots,n$ podemos ter considerado $w_{i_0j}=0$ para todo $j=1,2,\ldots,n$; então teremos formulado uma proposição III.2.2", tornando-se sua prova Óbvia, embora não tenha importância para os problemas de programação inteira.

Também observamos que a recíproca da proposição II.2.2 não é verdadeira conforme o exemplo abaixo.

Seja a matriz

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

que é uma matriz onde nenhuma de suas linhas é formada apenas de 1^{s} e no entanto ela é totalmente unimodular.

<u>Proposição III.2.3</u> - Uma matriz 3x3 tal que seu traço principal e seu traço secundário sejam ambos iguais a 3 ou ambos iguais a zero, terá seu determinante igual a zero ou ±1

Dem.

Seja a matriz B de ordem 3, isto é.

$$B = \begin{bmatrix} a_{is} & a_{ij} & a_{it} \\ a_{hs} & a_{hj} & a_{ht} \\ a_{ks} & a_{kj} & a_{kt} \end{bmatrix}$$

Se $a_{is}+a_{hj}+a_{kt} = 3 = a_{ks}+a_{hj}+a_{it}$, então o $\det(B) = (a_{kj} - a_{ij}) \cdot (a_{hs} - a_{ht})$ de onde $\det(B)$ = zero ou ± 1.

Agora. se $a_{is}+a_{hj}+a_{kt}=0=a_{ts}+a_{hj}+a_{it}$, então $\det(B) = 0$

III.3 - MATRIZ PERMUTAÇÃO GENERALIZADA

Nesta seção generalizamos a matriz permutação clássica, e na proposição que se segue, damos uma condição para que uma matriz permutação generalizada seja totalmente unimodular ; para tal lembramos a noção clássica da matriz permutação.

Definição III.3.1 - Uma matriz $A=(a_{ij})$ de ordem n é chamada matriz permutação se

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \text{ para } j=1,2,\ldots,n \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \text{ para } i=1,2,\ldots,n$$

Lema III.3.1 - Toda matriz permutação é uma (0,1)-matriz e é totalmente unimodular.

A demonstração decorre da definição da matriz permutação. A unimodularidade é imediata.

Observamos que a reciproca do lema III.3.1 não é verdadeira.

Definição III.3.2 - Sejam M uma matriz quadrada não nula de ordem s e 0 a matriz nula de ordem s. Uma matriz denotada por $P_M=(P_{ij})$ de ordem $n (n \geq 2s)$ onde os elementos (blocos)

$P_{ij} \varepsilon \{0,M\}$ para todo $j,i=1,2,\ldots,n$ e tais que $\sum_{i=1}^{n} P_{ij}=M$ para todo $j=1,2,\ldots n$ e $\sum_{j=1}^{n} P_{ij}=M$ para todo $i=1,2,\ldots,n$ é chamada matriz permutação generalizada sobre M. A matriz quadrada M é chamada elemento-bloco de $\mathbb{P}_M$.

Proposição III.3.1 - Uma matriz permutação generalizada é totalmente unimodular se o elemento bloco é totalmente unimodular.

Dem.

Seja P_W uma matriz permutação generalizada sobre W, onde W é totalmente unimodular.

Consideremos $B=(p_{ij})$ uma submatriz quadrada de ordem r, $r>s$ (onde s é a ordem de W) de $\mathbb{P}_W$.

Provemos por indução sobre r que determinante de B é zero ou ± 1.

Suponhamos que B contenha uma submatriz W_1 de W, de onde B possui pelo menos uma coluna ou uma linha zero, por conseguinte det(B)=zero.

Agora suponham que B contêm W e uma submatriz W_1 de ordem t de W numa outra posição, isto é,

$$B = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix}$$

Aplicando o determinante de Laplace generalizada, sendo sua expansão pelos t primeiras colunas, resulta

$$\det(B) = \det(W_1)\det(W)$$

Mas, $\det(W_1)$ e $\det(W)$ valem zero ou ± 1, portanto, det(B)=zero ou ± 1.

Suponhamos que as submatrizes quadrada de ordem menor que r de $\mathbb{P}_W$, têm determinante zero ou ± 1. Provemos que

o valor de determinte de uma matriz quadrada de ordem r de $\mathbb{P}_W$ também vale zero ou ± 1.

Consideremos B de ordem r; então B possui pelo menos uma submatriz W_1 de ordem t de W, daí sua expansão pelas t colunas de B é:

$$\det(B) = \pm\det(W_1)\det(Q)$$

onde Q é uma submatriz quadrada de $\mathbb{P}_W$ de ordem menor que r e pela indução $\det(Q)=0$ ou ± 1.

Portanto, $\det(B)=0$ ou ± 1.

Concluímos assim a demonstração de nossa proposição.

Corolário III.3.1 - Se $D=\mathrm{diag}(W_1,W_2,\ldots,W_q)$ é uma matriz bloco diagonal, onde W_k para cada $k=1,2,\ldots,q$, é uma (0,1)-matriz universalizada em linha de ordem 3xn. Então D é totalmente unimodular.

A demonstração é imediata.

A seguinte proposição trata das matrizes equivalentes totalmente unimodulares.

Proposição III.3.2 - Denotemos pelas colunas P_1, $P_2,\ldots,P_n$ a matriz permutação generalizada $\mathbb{P}_W$, onde a matriz W é uma (0, 1)-matriz de ordem 3 universalizada em linha e a matriz universal U denotada pelas colunas $U_1,U_2,\ldots,U_s$ de ordem nxs. Então A denotada pelas colunas $a_1,a_2,\ldots,a_n,a_{n+1},\ldots,a_{n+s}$ onde cada coluna $a_j=P_j$ ou $a_j=U_j$ para todo $j=1,2,\ldots,n,n+1,\ldots,n+s$ é uma matriz totalmente unimodular.

Dem.

A matriz A é equivalente à $[\mathbb{P}_W,U]$, que é uma matriz totalmente unimodular e ela é obtida a partir de A pelas

operações elementares do tipo mudanças de linhas ou colunas. Portanto, A é totalmente unimodular.

Observamos que se as matrizes A e B forem totalmente unimodulares, então a matriz da forma

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

não é necessariamente totalmente unimodular. O que ilustaamos a seguir.

Consideremos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ W \end{bmatrix} = B$$

onde $\mathbb{1} = (1,1,\ldots,1)$ de Ixn e W é uma (0,1)-matriz de ordem 2xn são matrizes totalmente unimodulares; no entanto a matriz

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ W \\ \mathbb{1} \\ W \end{bmatrix}$$

é não totalmente unimodular, pois a submatriz quadrada D extraida de $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$, isto é,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem determinante -2. Mesmo assim na seção III.4 tratamos auando uma matriz da forma $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ é totalmente unimodular

III.4 - MATRIZ p-DOMINADA

Nesta seção apresentamos matrizes da forma $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ parcial ou totalmente unimodulares

Definição III.4.1 - Sejam $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ e $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ vetores do $\mathbb{R}^n$

Se $x_i \neq 0$ implica $x_i = y_i$ para todo $i=1,2,\ldots,n$, então dizemos que x é dominado por y ou y é uma dominante de x e denotamos por $x \prec y$.

Se dois vetores arbitrários $x,y \in \mathbb{R}^n$, verificam:

$$x \prec y \qquad \text{ou} \qquad y \prec x ,$$

então dizemos que os vetores x e y são dependentes.

Definição III.4.2 - Uma matriz A de ordem mxn é chamada dominada se seus vetores-linha são dependentes dois a dois.

Se existem p vetores-linha, $1<p\leq m$, de A que são dependentes dois a dois, então dizemos que a matriz A é p-dominada.

Proposição III.4.1 - (Teorema de Heller, |29|).

Toda (0,1)-matriz A de ordem mxn, p-dominada $(1<p\leq m)$ possui matriz parcial de ordem pxn totalmente unimodular

Proposição III.4.2 - Denotemos pelas linhas $D_1, D_2,\ldots,D_p$ a matriz dominada D de ordem pxn e a matriz universal U denotada pelas linhas $U_1,U_2,\ldots,U_q$ de ordem qxn. Então a matriz A denotada pelas linhas $a_1,a_2,\ldots,a_p,a_{p+1},\ldots a_{p+q}$ onde cada linha $a_i=D_i$ ou $a_i=U_i$ para todo $i=1,2,\ldots,p,p+1,\ldots,p+q$; é totalmente unimodular.

A demonstração segue do fato que a matriz A é e

quivalente à matriz da forma $\begin{bmatrix} D \\ U \end{bmatrix}$ e esta é de fácil verificação que é uma matriz totalmente unimodular.

Definição III.4.3.- Uma família $(A_1, A_2, \ldots A_m)$ de matrizes parciais-linha é dominada se para todo $i \neq j \varepsilon \{1,2,\ldots,m\}$, A_i e A_j são dominados. isto é, todo $x \varepsilon A_i$ (x é um vetor-linha de A_i) e $y \varepsilon A_j$ (y vetor-linha de A_j) verificam: $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Proposição III.4.3 - Se uma (0,1)-matriz A de ordem 3xn é bi-dominada, então A é totalmente unimodular.

A demonstração é imediata

III.5 - MATRIZES ZERO-ESPAÇO

Nesta seção introduzimos noções de vetores zero-espaço, de maneira a facilitar a escolha de um vetor entre outrosconsiderados. Estendemos para matrizes zero-espaço e obtemos condições para que uma (0,1)-matriz seja totalmente unimodular.

Consideremos, o vetor

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \varepsilon \mathbb{R}^n$$

O vetor complementar da i-ésima componente x_i, denotado por X[i], é um vetor associado a X, obtido removendo x_i de X, isto é,

$$X[i] = (x_1, x_2, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Ilustração - Seja $X=(-3,0,4,-7,0) \varepsilon R^5$, então o vetor complementar da componente -7 associado a X é

$$X[4] = (-3,0,4,0)$$

Definição III.5.1 - Seja $v \in \mathbb{R}^n$, $h,t \in \mathbb{Z}^+$.

Dizemos que v é um vetor h-zeros e t-espaço, se h zeros anteceder a sua primeira componente, se o número máximo de zeros existentes entre duas componentes consecutivas diferentes de zero for t, e se a norma de seu vetor complementar associado v(h+1) for diferente de zero. Neste caso denotamos por v_{ht} ou v(h.t).

Se existem $h,t \in \mathbb{Z}^+$, tal que $v \in \mathbb{R}^n$ é um vetor h-zeros e t-espaço, então v_{ht} é simplesmente dito, v vetor zero-espaço

Ilustrações:

11 O vetor $v=(0,0,0,-5,0,1,0,0,0,0,9,0) \in \mathbb{R}^{12}$, é um vetor 3-zeros e 4-espaço, portanto, escrevemos v_{34} ou v(3;4)

21 O vetor $w=(0,1,0,0,-4,0,0,9,0,0,-1,0) \in \mathbb{R}^{12}$, é um vetor 1-zero e 2-espaços, w_{12} ou w(1;2)

Contra-exemplo

O vetor $x=(0,0,0,-7,0,0,0,0,0,0,0,0) \in \mathbb{R}^{12}$ não é um vetor zero-espaço, pois o vetor complementar associado $X|h+1| = X|4|$ não tem norma diferente de zero.

Definição III.5.2 - Um vetor v_{ht} zero-espaço é um t-espaço uniforme se o número de zeros que há entre duas componentes consecutivas diferente de zero for sempre t.

Na ilustração acima o vetor W é um vetor 2-espaço uniforme.

Sejam v_{hd}, $w_{ke} \in \mathbb{R}^n$, vetores zero-espaço

Dizemos que v_{hd} é mais confortável que w_{ke} se $h<k$ e dhe. isto é, o vetor v_{hd} possui menos componentes zero antes de sua primeira componente diferente de zero e suas outras componentes se encontram menos espalhadas em comparação com as de W_{ke}. (veja, identificação da matriz com hipergrafo IV.2.3

Um conjunto de vetores V_{he}, e-espaço uniforme, constitue uma família de vetores confortáveis.

Consideremos um (0,1)-vetor $v=(v_1,v_2,...,v_n)$ do espaço $\mathbb{R}^n$, isto é, todas as componentes v_i são zeros ou mais ou menos um para todo $i=1,2,...,n$.

Seja (0,1)-vetor v e $r \in \mathbb{Z}^+$.

Dizemos que v tem norma r se v possui r componentes diferentes de zero, isto é,

$$|v| \equiv ||v|| = \sum_{i=1}^{n} v_i = r$$

Agora estendemos a noção de vetores zero-espaço para matrizes quaisquer, entretanto consideremos as (0,1)-matrizes, pois estamos interessados nas matrizes desta estrutura.

<u>Definição III.5.3</u> - Uma (0,1)-matriz A é chamada matriz zero-espaço se cada vetor-linha de A for um vetor O-espaço.

Uma matriz A zero-espaço, é chamada t-espaço uniforme, $t \in \mathbb{Z}^+$, se cada vetor-linha de A for um vetor t-espaço uniforme.

<u>Ilustrações:</u>

1) A matriz

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

é uma matriz zero-espaço

2) A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz 2-espaço uniforme

31 A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz O-espaço uniforme

Contra-exemplo - A matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

não é uma matriz zero-espaço

III.6 - MATRIZ k-NUCLEAR

Nesta seção desenvolvemos o particionamento horizontal ou vertical de uma (0,1)-matriz e tratamos das matrizes que possuem submatriz cortada ou matriz parcial-coluna universal, às quais chamamos matrizes nucleares.

Obtemos condições para que as matrizes munidas destas propriedades sejam totalmente unimodulares.

Definição III.6.1 - Uma (0,1)-matriz A de ordem mxn é q-particionável horizontalmente ($q \in \mathbb{Z}^+$, $q \geq 2$) se existe uma família (A_i/A_i matriz parcial-linha de ordem $m_i \times n$, $i = 1,2,\ldots,q$) não dominada e que $\underset{i=1}{\overset{q}{C}} m_i = m$.

Se existe uma família (A^j/A^j matriz parcial-coluna de ordem $m \times n_j$, $j=1,2,\ldots,t$) não dominada e que $\sum_{j=1}^{t} n_j = n$, então dizemos que A é t-particionável verticalmente.

Ilustrações:

1) Seja a matriz

$$A = \begin{array}{c} A_1 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right. \\ A_2 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

então (A_1,A_2) constituem uma bi-partição horizontal de A.

2) Seja a matriz

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad}^{A_1} & \overbrace{\qquad}^{A_2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

então (A^1,A^2) constituem uma bipartição vertical de A.

Contra-exemplo - A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

não possui particionamento horizontal nem vertical.

Definição III.6.2 - Uma (0,1)-matriz A é particionável, se existem inteiros q, t $\in \mathbb{Z}^+$ (t,q≥2) tal que A seja q-particionável horizontal e t-particionável verticalmente.

Uma (0,1)-matriz A é não-particionável se para todo q, t $\in \mathbb{Z}^+$ (t,q≥2) A não for q-particionável horizontal nem t-particionável verticalmente. O que ilustra o contra-exemplo acima.

Lema III.6.1 - A matriz A é particionável se, e somente se A^t for particionável. (A^t matriz transposta de A). A demonstração é imediata.

Definição III.6.3 - Consideremos a (0,1)-matriz A e seja M uma submatriz cortada (parcial-linha ou parcial coluna) de A.

Chamamos matriz complementar de M, denotada por A(M), à matriz obtida de A, zerando-se todos os elementos de M.

Submatriz complementar da submatriz cortada (parcial-linha ou parcial-coluna) de M, denotada por M^c é outra submatriz cortada (parcial-linha ou parcial-coluna1 de A, de elernento pertecentes a todas as colunas (linhas) de M mas não estão em M, isto é,

$$a_{ij} \in M \text{ se, e somente se } a_{ij} \notin M^c$$

Se M é uma submatriz cortada vertical de A, então a matriz parcial-linha que tem o mesmo número de linhas que M é chamada matriz parcial gerada por M, denotamos por [M].

Ilustração - Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

se a submatriz cortada vertical for.

$$M = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

então:

$$A(M) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{43} & a_{45} \end{bmatrix}, \qquad M^c = [a_{43} \quad a_{44}]$$

e a matriz parcial-linha gerada por M e

$$[M] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

<u>Definição III.6.4</u> - Uma (0,1)-matriz A possui núcleo se existir uma submatriz cortada vertical universal M tal que M^c (existindo) é uma submatriz cortada nula de A, e os submatrizes parciais [M] e $[M^c]$ (existindo) têm seus vetores - linha disjuntos dois a dois, isto é, se x_i for uma componente diferente de zero de algum vetor-linha de [M], então x_i não é componente de nenhum vetor-linha de $[M^c]$ e recíprocamente.

Os vetores-coluna de A, onde suas componentes são os elementos de M e M^c são chamados vetores-nucleares de A, e ao conjunto de vetoces-coluna de A, denotamos por N(A), o que vem a ser o núcleo de A.

Se A possui k núcleos, então dizemos que A é k-nuclear:

Ilustrações: As seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}$$

são nucleares, A e B possuem um núcleo e C possui dois núcleos, isto é, C é bi-nuclear.

Observamos na definição de núcleo se M for uma submatriz parcial-vertical universal, então M^C não existe; neste caso de fato M constitui núcleo de A e é unico (Vide a prop. III. 6.2)

Proposição III.6.1. - Toda matriz p-dominada A possui núcleo se as submatrizes parciais-linha M (a matriz que tem como vetores-linha aos p vetores-linha dependentes de A) e M^c possuirem seus vetores-linha disjuntos dois a dois.

Dem.

Seja D a submatriz cortada de M, formada pelos vetores-coluna de norma **p**. A existência de D, é garantida pois M é dominada. Portanto, D é universal e D^C é nula.

Por outro lado, as matrizes [D] e [D^C] possuem seus vetores-linha disjuntos dois a dois, Logo pela definição de núcleo, a matriz A tem núcleo.

Proposição III.6.2. - Seja (0,1)-matriz A e M uma submatriz parcial-coluna.

Se M for universalizada em coluna, então A possui núcleo e é único.

Dem.

A existência de núcleo segue-se da definição.

Agora suponhamos que existem N_1 e N_2 dois núcleos de A, então as matrizes $[N_1]$ e $[N_2]$ têm seus vetores-linha disjuntos dois a dois, o que é absurdo, pois M é universalizada, isto é, M tem pelo menos um vetor-coluna de norma igual ao número de vetores-linha de A.

Teorema III.6.1 - Uma (0,1)-matriz A nuclear é totalmente unimodular se os vetores-linha complementares dos vetores nucleares de A forem ortogonais dois a dois.

A demonstração segue-se de fato que A é equivalente à matriz (P,U) onde P é uma matriz permutação e U é universal, isto é, é uma aplicação direta da prop. III.3.2.

Corolário III.6.1 - Uma (0,1)-matriz k-nuclear é totalmente unimodular se os vetores-linha complementares dos k-núcleos forem ortogonais dois a dois.

A demonstração segue-se pela indução e aplicação do teorema III.6.1..

Teorema III.6.2 - Se uma (0,1)-matriz A k-nuclear tem seus vetores complementares dos vetores nucleares dependentes dois a dois, então A é totalmente unimodular.

Para k=1, a demonstração segue-se do fato que A é equivalente à matriz totalmente unimodular (D,U) (onde D é matriz dependentes e U universal).

Para k>1, faz-se por indução.

CAPÍTULO IV

HIPERGRAFO UNIMODULAR

IV. 1 - INTRODUÇÃO

Neste capitulo abordamos os seguintes tópicos:

Na seção IV.2 descrevemos uma identificação entre matriz zero-espaço e hipergrafo. Desta maneira, quando falarmos da matriz de incidência do hipergrafo sem laço significa referirmos à matriz padrão equivalente.

Na seção IV.3, tratamos dos hipergrafos p-dominado, h-quase uniforme e quase-cíclicos. Estabelecemos condições para que sejam unimodulares.

Nas seções IV.4 e IV.5, obtemos alguns resultados sobre hipergrafos H com $\bar{\delta}(H) = 2$, e uma condição de unimodularidade de um hipergrafo através de seu grafo representativo.

Na seção IV.6, desenvolvemos seccionabilidade de hipergrafos e, finalmente, nas seções IV.7 e IV.8, introduzimos noções de hipergrafos k-nucleares e matching h-uniforme. Baseando-nos nestas teorias e definições obtemos novos resultados.

IV. 2 - IDENTIFICAÇÃO DA MATRIZ ZERO-ESPAÇO COM HIPERGRAFO.

Tratamos a seguir de uma identificação da matriz zero-espaço com hipergrafo.

<u>Definição IV. 2.1.</u> - Uma matriz zero-espaço M de ordem mxn é matriz padrão se:

i) os vetores-linha $V_i = V_i\ (h_i;t_i), i = 1,2,\ldots,m$ de M forem confortáveis, isto é, $h1<h_2\leq\ldots\leq h_m$ ou $|V_1|\leq|V_2|\leq\ldots\leq|V_m|$;

ii) por qualquer permutação de linhas ou colunas, os vetores-linha de M forem de espaço invariante.

<u>Ilustrações</u> - As seguintes matrizes têm forma padrão

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{matrix}V_1(0;2),\ |V_1|=2\\V_2(0;0),\ |V_2|=2\\V_3(1;0),\ |V_3|=2\\V_4(2;0),\ |V_4|=2\end{matrix}\quad e\quad\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{matrix}W_1(0;0),\ |W_1|=2\\W_2(0;0),\ |W_2|=3\\W_3(0;0),\ |W_3|=4\\W_4(0;0),\ |W_4|=5\end{matrix}$$

As seguintes matrizes não têm forma padrão

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{matrix}X_1(0;0),\ |X_1|=2\\X_2(1;0);\ |X_2|=2\\X_3(2;0),\ |X_3|=2\\X_4(0;2),\ |X_4|=2\end{matrix}\quad e\quad\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{matrix}Y_1(0;0),\ |Y_1|=2\\Y_2(0;0),\ |Y_2|=4\\Y_3(0;0),\ |Y_3|=3\\Y_4(0;0),\ |Y_4|=5.\end{matrix}$$

Seja D uma matriz zero-espaço, por qualquer permutação de linhas ou colunas em D ela se transforma na matriz padrão D' e por isso define-se a equivalencia e denota-se por $D \equiv D'$. Sobreentende-se que D e D' são da mesma ordem.

Denotemos com Λ o conjunto de matrizes zero-espaço de qualquer ordem.

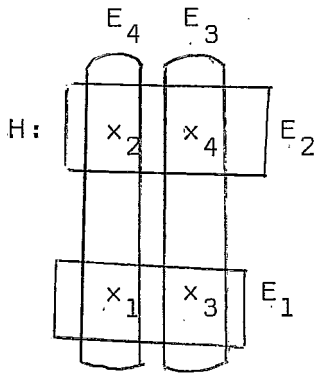
Para uma matriz padrão arbitrária D de Λ definamos a classe denotada por D, como o conjunto de todas as matrizes = equivalentes a D, isto é:

$$\tilde{D} = \{M \in \Lambda \ / \ M \equiv D\}$$

Se P for submatriz de M, onde $M \equiv D$, então P não será necessariamente uma submatriz de D no sentido usual. Contudo, por abuso, nos referimos como submatriz de D.

Consequentemente, para matriz de incidência A de um hipergrafo sem laços H, haverpa uma matriz padrão equivalente. A esta matriz padrão chamamos matriz de identificação de H.

<u>Ilustração</u> - Seja o hipergrafo



A matriz de incidência

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline E_1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ E_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ E_3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ E_4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \equiv A$$

$$A \equiv \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \\ \hline E_1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ E_2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ E_3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ E_4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \equiv \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \\ \hline E_1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ E_4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ E_3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ E_2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \equiv \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \\ \hline E_1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ E_4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ E_2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ E_3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \equiv D \text{ matriz padrão}$$

daí D é a matriz de identificação de H.

Entretanto o hipergrafo H obtido a partir de uma matriz padão D terá a mesma D como sua matriz de incidência, pois,pela

definição da matriz de incidência, os índices dos vértices do hipergrafo aparecerão enumeradas na ordem crescente das colunas da matriz, e os indices das arestas do hipergrafo aparecerão enumeradas na ordem decrescente (de cima para baixo) as linhas da matriz. Em outras palavras. Seja D uma matriz padrão de ordem mxn.

Para cada $i=1,2,\ldots,m$ o vetor-linha D_i h-zeros e t-espaços de D definamos a aresta E_i, cujo primeiro vértice tenha por índice h+1 e os outros vértices tenham em sequência índices que correspondam as posições das componentes diferentes de zero, sendo que os vértices consecutivos mais distantes têm índices = que diferem em (t+1)-unidades.

Daqui em diante nos referimos matriz de incidência como sinônimo da matriz padrão equivalente.

<u>Ilustração</u> - Seja D a matriz padrão

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{então} \quad \begin{array}{lcl} D_1=(1,0,0,1) & \rightarrow & E_1=(x_1,x_4) \\ D_2=(1,1,0,0) & \rightarrow & E_2=(x_1,x_2) \\ D_3=(0,1,1,0) & \rightarrow & E_3=(x_2,x_3) \\ D_4=(0,0,1,1) & \rightarrow & E_4=(x_3,x_4) \end{array}$$

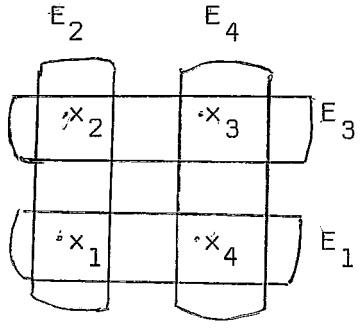
isto é:

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline E_1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ E_2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ E_3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ E_4 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

é a matriz incidência do F:

hipergrafo $F=(X,F)$, $X=\{x_1,x2,x3,x4\}$

$F=\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$



IV.3. HIPERGRAFO p-DOMINADO.

Consideremos o hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$.

Dizemos que as arestas E e F de H são dependentes se a aresta E domina F ou F domina E, isto é, $F \subseteq E$ ou $E \subseteq F$.

Definição IV.3.1 - Se existem p arestas de um hipergrafo H que são dependentes duas a duas, então H é chamado hipergrafo p-dominado.

Proposição IV.3.1 - Se $H=(X,\mathcal{E})$ é um hipergrafo dominado, então para qualquer $S \subset \mathcal{E}$, H_S é também dominado.

A demonstração é imediata.

Definição IV.3.2. - Um hipergrafo H é chamado h-quase uniforme ($h \in Z^+$) se para cada aresta de cardinalidade menor = que h existe uma aresta dominante de cardinalidade h em H.

Ilustração:

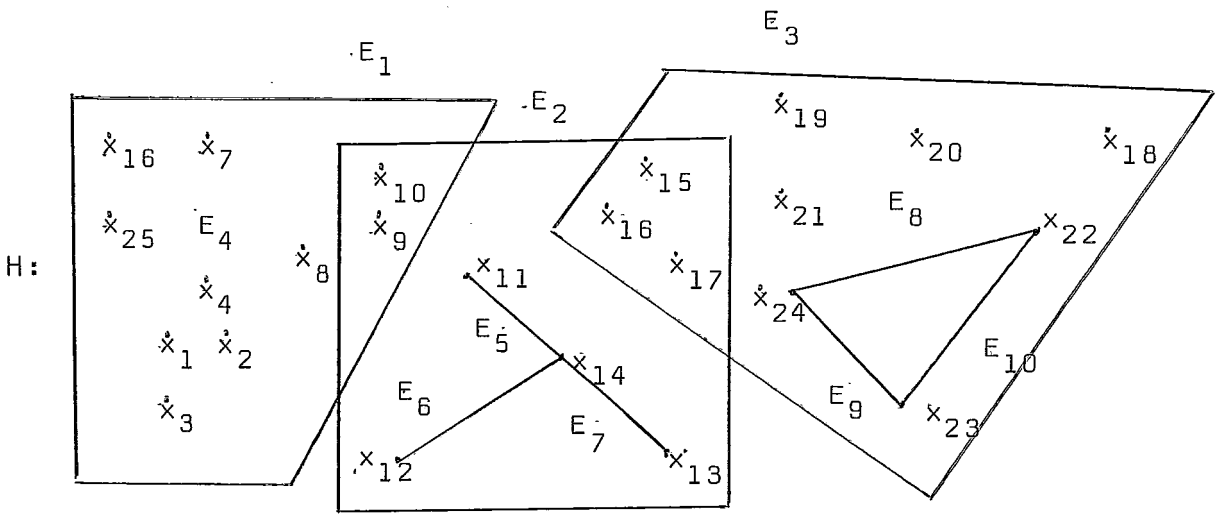


Fig. IV.3.1

<u>Definição IV.3.3</u> - Um hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$ é conexo se X não pode ser expresso como a união de dois subconjuntos não vazios disjuntos X_1 e X_2 tal que para toda aresta E de H se tenha $E \subseteq X_1$ ou $E \subseteq X_2$

Um hipergrafo parcial $F=(X,\mathcal{F})$ maximal (isto é, se $\exists\ \Gamma \subset \mathcal{E}$ tal que $\mathcal{F} \subset \Gamma$ então $\Gamma=\mathcal{F}$) é uma componente de H se F for um hipergrafo conexo.

<u>Proposição IV.3.2</u> - Um hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$ com $|\mathcal{E}| = 3$ é unimodular se H for h-quase uniforme.

Dem.

Da hipótese resulta que H é bi-dominado, daí sua matriz associada é bi-dominada e pela prop. III.4.3, é totalmente unimodular e pela prop. 2 (Cap. 20, $|^3|$) resulta que H é unimodular.

Ilustrações:

1) H:

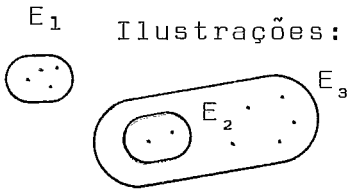


FIG.IV.3.2

2) H:

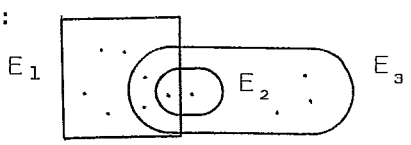


FIG.IV.3.3

3) H:

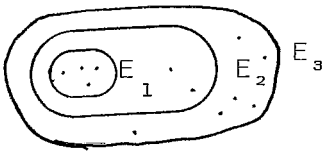


FIG.IV.3.4

4) H:

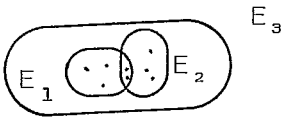


FIG.IV.3.5

5) H:

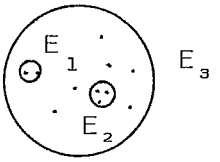


FIG.IV.3.6

6) H:

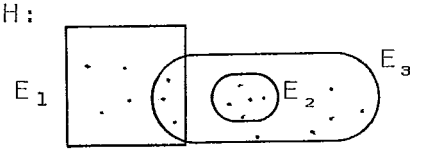


FIG:IV.3.7

Observamos que a prop. 16 (P.47, $|^1|$) fica como um caso particular da prop. IV.3.2.

Definição IV.3.4 - Seja $H=(X,\mathcal{E})$, $\mathcal{E}=(E_1,E_2,\ldots,E_m)$ e $p\in\mathbb{Z}^+$, $|\mathcal{E}|-2\leq p\leq|\mathcal{E}|$.

H é quase-cíclico se existem p arestas tais que verificam as seguinte propriedades:

i) $|E_i\cap E_{i+1}|\geq r$ e $|E_p\cap E_1|=$zero para todo $i=1,2,\ldots,p-1$, onde r é um inteiro não-negativo e

ii) $E_i\cap E_j=\phi$ para todo $i\neq j\in\{1,2,\ldots,p\}$ com $|i-j|\geq 2$

Ilustrações:

1)

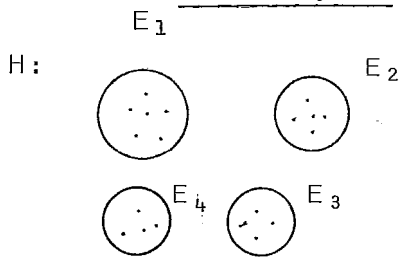


FIG.IV.3.8

2)

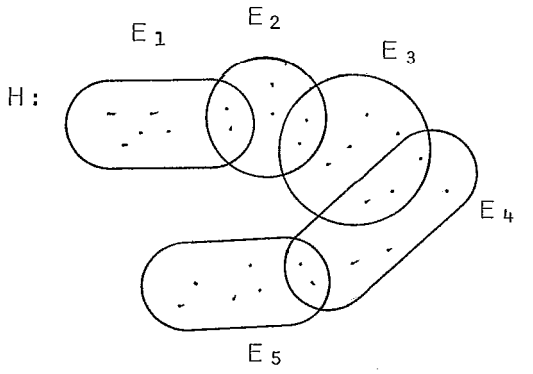


FIG.IV.3.9

3)

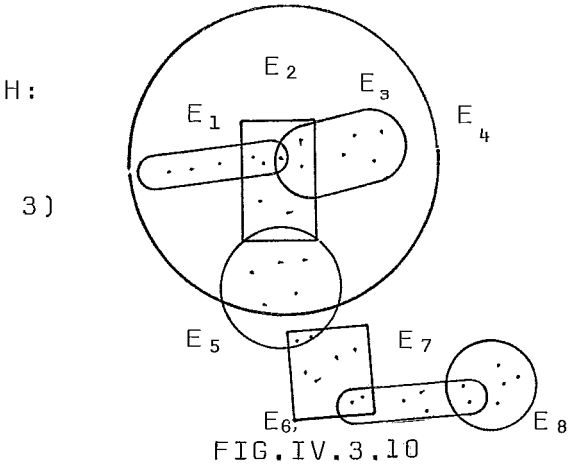


FIG.IV.3.10

IV.4 - HIPERGRAFOS H COM $\overline{\delta}(H)=2$

Consideremos o hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$ e $S\subseteq X$.

O conjunto grau de S, denotado por $\mathcal{E}_S$ é definido por

$$\mathcal{E}_S=\{E\in\mathcal{E}/x\in E \text{ para } x\in S\}$$

Se $S=\{x\}$ então ao invés de denotar por $\mathcal{E}_S$, denota

mos por $\mathcal{E}_x$, a família de arestas de H que contem vértice x,|3|

A cardinalidade de $\mathcal{E}_S$, é chamada grau de S, isto é:

$$\delta_H(S) = |\mathcal{E}_S|$$

Definamos os graus menor e maior do hipergrafo H denotados respectivamente por $\underline{\delta}(H)$ e $\overline{\delta}(H)$ como:

$$\underline{\delta}(H) = \min_{x \in X} \delta_H(x) \qquad e \qquad \overline{\delta}(H) = \max_{x \in X} \delta_H(x)$$

Ilustrações: Seja o hipergrafo

H:

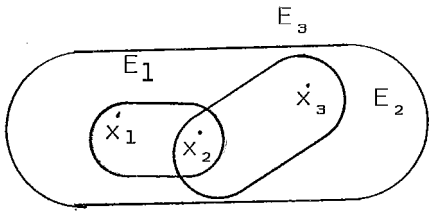


FIG.V.4.1

então:

$\underline{\delta}(H) = \delta_H(x_1) = \delta_H(x_3) = 2$

e

$\overline{\delta}(H) = \delta_H(x_2) = 3$

Se $\underline{\delta}(H) = \overline{\delta}(H) = \delta$, então o hipergrafo H é chamado δ-regular.

Ilustração: Seja o hipergrafo

H:

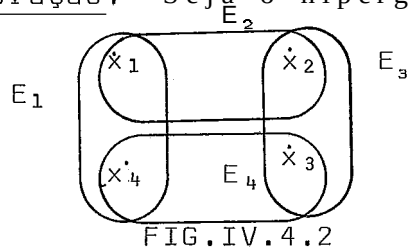


FIG.IV.4.2

H é 2-regular ou bi-regular.

Observamos que um sub-hipergrafo ou hipergrafo parcial de um hipergrafo δ-regular não é necessariamente 6-regular.

Teorema IV.4.1: Seja $H=(X,\mathcal{E})$ um hipergrafo tal que $\overline{\delta}(H)=2$.

Se H possui um ciclo de comprimento p, então sua

matriz de incidência tem uma submatriz quadrada de ordem p, onde os p-1 vetores-linha são O-espaço uniformes e um vetor-linha é (p-2)-espaço uniforme,

Dem.

Seja C_p um ciclo. Sem perda de generalidades consideremos que C_p seja formado pelos p primeiras arestas e vértices de H, isto é:

$$C_p = (x_1, E_1, x_2, E_2, \ldots, x_{p-1} E_{p-1}, x_p, E_p, x_1).$$

Onde todas as arestas E_i e x_i para $i=1,\ldots,p$ são distintos e x_i, x_{i+1} E E_i para $i=1,\ldots,p-1$.

Construimos a matriz $B=(b_{ij})$ tomando por colunas os vértices x_i correspondentes do ciclo C_p e por linhas as arestas correspondentes do ciclo tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } x_i \in E_j \\ 0, & \text{se } x_i \notin E_j \end{cases}$$

para todo $i,j=1,2,\ldots,p$, isto é.

	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_{p-1}	x_p
E_1	1	1	0	...	0	0
E_2	0	1	1	...	0	0
E_3	0	0	1	...	0	0
.	.	.	.	...	.	.
.	.	.	.	...	.	.
.	.	.	.	...	.	.
E_{p-1}	0	0	0	...	1	1
E_p	1	0	0	...	0	1

É evidente que a matriz B tem seus p-1 primeiros vetores-linha O-espaços uniformes e o Último vetor-linha é um

vetor (p-2)-espaço uniforme e, além disso, é uma sub-matriz quadrada de ordem p da matriz de incidência de H. A matriz B é chamada matriz ciclo, |16|.

Ilustração - Seja o hipergrafo

H:

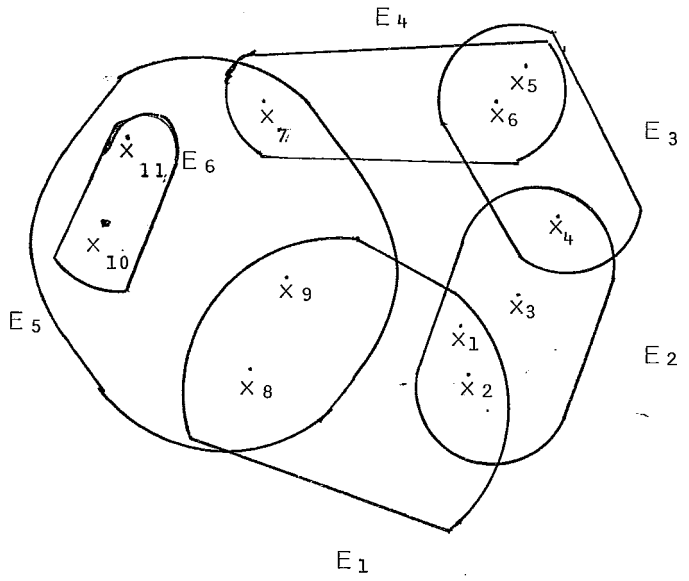


FIG.IV.4.3

cuja matriz de incidência é dada por

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
E_1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
E_2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
E_3	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
E_4	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
E_5	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
E_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Então a sub-matriz quadrada correspondente ao ciclo.

$$C_5 = (x_9, E_1, x_2, E_2, x_4, E_3, x_6, E_4, x_7, E_5, x_9)$$

é a matriz

	x_9	x_2	x_4	x_6	x_7
E_1	1	1	0	0	0
E_2	0	1	1	0	0
E_3	0	0	1	1	0
E_4	0	0	0	1	1
E_5	1	0	0	0	1

<u>Corolário IV.4.1</u>: Sob as hipóteses do teorema IV.4.1.

Se o ciclo C_p for ímpar, então a sub-matriz quadrada associada tem determinante I 2.

A demonstração é imediata, [ver |2| ou |14|)

<u>Corolário IV.4.2</u> - Sob as hipóteses do teorema IV.4.1. Se o hipergrafo H possuir k ciclos ímpares então qualquer sub-matriz quadrada extraida da matriz de incidência de H terá determinante igual a 0 ou $I2^R$. onde $0 \leqslant \ell \leqslant k$.

Dem.

Seja A a matriz de incidência do hipergrafo H, então pelo teorema IV.4.1, A possui ℓ submatrizes quadradas, todas de ordem ímpar e a norma de cada vetor-coluna tem valor menor ou = igual. a 2.

Consideremos B uma submatriz quadrada de A.

Se B possuir um ciclo C , q ímpar, então usando as permutações de linhas ou colunas, a matriz B vem a ser,

$$B = \begin{pmatrix} C & M \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

onde C é a matriz ciclo de ordem q, M matriz não necessariamente nula e 0 submatriz quadrada, então

$$\det(B)=\det(C)\det(D)= \pm 2^{l},1 \quad \text{ou} \quad 0$$

Agora suponhamos que possui C_i, $i=1,2,\ldots,\ell$; ℓ ciclos ímpares então B pode ser expressa na seguinte forma, usando operações elementares de linhas e colunas, isto é,

$$B = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & C_\ell & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & D \end{bmatrix}$$

daí $\det(B)=\det(C_1)\det(C_2)\ldots \det(C_\ell)\det(D)$

$=(\pm 2)(\pm 2)\ldots(\pm 2)\det(D)$

$=\pm 2^{\ell}.1$ ou 0.

<u>Lema IV.4.1</u> - Se a (0,1)-matriz A não possui submatrizes quadradas ciclos de ordem ímpar, então A é totalmente unimodular.

A demonstração é imediata.

<u>Teorema IV.4.2</u> - Se uma (0,1)-matriz A for t-espaço uniforme, $t\in\mathbb{Z}^+$, então A é totalmente unimodular.

Dem.

Suponhamos que A não seja totalmente unimodular, então A possui uma submatriz quadrada ciclo B de ordem q ímpar.

Sendo B uma matriz quadrada ciclo, então pelo teorema IV.4.1, B possui um vetor-linha (q-2)-espaço uniforme, isto implica que A tem um vetor-linha que não é t-espaço uniforme e que contradiz a hipótese, portanto, A é totalmente unimodular.

Assim concluimos a demonstração de nosso teorema.

IV.5 - GRAFO REPRESENTATIVO

Consideremos o hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$ com $|\mathcal{E}|=m(H)=m$.

Definamos o grafo representativo [3] de H, denotado por $L(H)$, como o grafo simples $L(H)=(Y,U)$ de ordem m para o qual existe um mapeamento biunfvoco ψ de $\mathcal{E}$ em Y tal que as imagens de dois elementos E_i e E_j, $i\neq j$ de $\mathcal{E}$ são os extremos de algum arco em $L(H)$ se, e somente se, E_i e E_j são adjacentes em H.

Proposição IV.5.1 - Se H é um hipergrafo dominado, então $L(H)$ é um grafo completo.

Dem.

Suponhamos que $L(H)$ não seja completo, então existem dois vértices e_i e e_j que não são ligados por algum arco em $L(H)$.

Pela definição de $L(H)$, os vértices e_i e e_j são imagens por um mapeamento biunfvoco existente de duas arestas E_i e E_j, $i\neq j$, não adjacentes em H. De onde E_i e E_j não são dependentes, isto é, não verificam nenhuma das propriedades:

$$E_i \subseteq E_j \qquad \text{ou} \qquad E_j \subseteq E_i$$

contradizendo que H não é denominado. Portanto, $L(H)$ é um grafo completo e concluímos assim a demonstração de nossa proposição.

Observamos que a recíproca da proposição acima não é verdadeira, isto é, o grafo representativo de um hipergrafo é completo sem que o hipergrafo correspondente seja dominado, o que ilustra o seguinte exemplo.

Seja o hipergrafo H não dominado.

H:

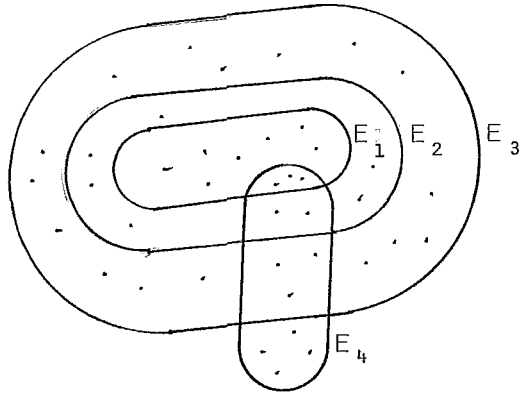


FIG.IV.5.1

L(H):

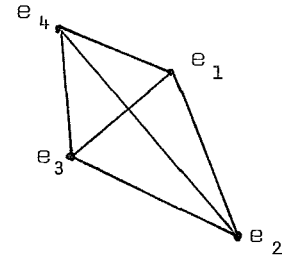


FIG.IV.5.2

Proposição IV.5.2: Se L(H) é uma cadeia simples e elementar, então o hipergrafo H é quase-cíclico.

Dem.

Sendo L(H) uma cadeia, então é uma sequência de arcos, isto é, $L(H)=\{u_1,u_2,\ldots,u_p\}$.

Sejam e_i e e_{i+1} os extremos inicial e final respectivamente do arco u_i para $i=1,2,\ldots,p-1$, então existem arestas E_i e E_{i+1}, que são adjacentes para $i=1,2,\ldots,p-1$ em H.

Por outro lado, não existe arco de extremos e_t e e_s para todo t e s tal que $|t-s|\geq 2$, pois L(H) é simples e elementar; consequentemente, as arestas E_t e E_s para todo t e s tal que $|t-s|\geq 2$ não são adjacentes.

Seja $r = \min|E_i \cap E_j|$

$j = i+1$

$i = 1,2,\ldots,p-1$

então $r\leq|E_i\cap E_{i+1}|$ para $i=1,2,\ldots,p-1$ e $|E_i\cap E_j|=\phi$ para todo i e j tal que $|i-j|\geq 2$. Assim o hipergrafo H é quase-cíclico.

Teorema IV.5.1 - Se o grafo conexo L(H) for bipartido, então H é unimodular

Dem.

Como L(H) é bipartido, então admite uma bicolora

ção equitativa (S_1,S_2).

Desde que $L(H)$ é conexo, então podemos colorir de branco e azul tal que dois vértices adjacentes tenham diferentes cores, isto é, sejam e_i e e_j dois vértices adjacentes em $L(H)$, então implicam que as arestas correspondentes E_i e E_j em H, não tenham todos os seus vértices da mesma cor, de onde a bicoloração (S_1,S_2) implica a bicoloração (X_1,X_2) de H que é equitativa.

IV.6 - HIPERGRAFOS SECCIONÁVEIS

Consideremos o hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$.

Dizemos que os vértices x_i e x_j de H são dependentes se, e somente se, seus vetores-coluna A^i e A^j associados forem dependentes. isto é, $A^i \subseteq A^j$ ou $A^j \subseteq A^i$.

Dois subconjuntos S_1 e S_2 não vazios de X são dependentes se, e somente se, cada $x \in S_1$ e $y \in S_2$ forem dependentes.

Definição IV.6.1 - Seja o hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$, $q \in \mathbb{Z}^+$, $q \geq 2$.

Dizemos que H é q-seccionável verticalmente se existir uma q-partição $(S_1,S_2,\ldots,S_q)$ de X; tal que S_i e S_j não sejam dependentes para $i \neq j=1,2,\ldots,q$, então escrevemos

$$H = H_{S_1} \oplus H_{S_2} \oplus \ldots \oplus H_{S_q}$$

onde o sub-hipergrafo H_{S_i} é gerado por S_i para $i=1,2,\ldots,q$.

H é t-seccionável horizontalmente se $\mathcal{E}$ admitir uma t-partição $(F_1,F_2,\ldots,F_t)$, então escrevemos

$$H = F_{F_1} \oplus F_{F_2} \oplus \ldots \oplus F_{F_t}$$

onde o hipergrafo parcial F_{F_j} é gerado por F_j para $j=1,2,\ldots,t$.

Definição IV.6.2 - Um hipergrafo H é seccionável se H for seccionável vertical e horizontalmente.

Os hipergrafos que seccionam H, são chamados hipergrafos seccionais.

Se em um hipergrafo H seccionável vertical ou horizontalmente cada hipergrafo seccionál for unimodular então dizemos que H é totalmente seccionável.

Observamos que, se um hipergrafo H é totalmente seccionável, então H é não necessariamente unimodular e reciprocamente.

É o que ilustramos a seguir.

Consideremos o hipergrafo H não unimodular. No entanto,

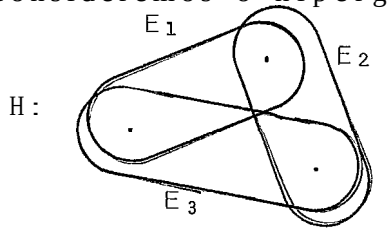


FIG.iv.6.1

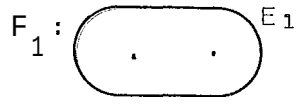


FIG.IV.6.2

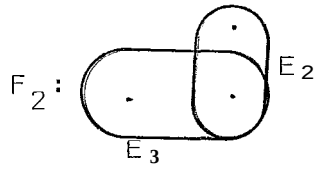


FIG.IV.6.3

seus hipergrafos seccionais F_1, F_2 são unimodulares.

Agora consideremos o seguinte hipergrafo unimodular.

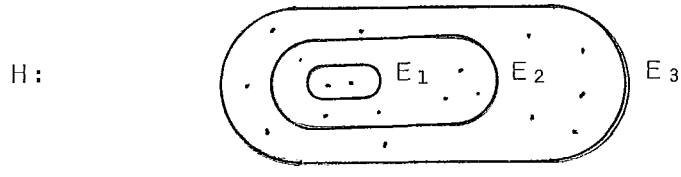


FIG. IV.6.4

H não é seccionável, isto é, não é totalmente seccionável.

Definição IV.6.3 - Um hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$ não é seccionávelse H não ser seccionável vertical, nem horizontalmente.

Proposição IV.6.1 - Se o hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$ é unimodular a $E\notin\mathcal{E}$, então o hipergrafo $F=(X,\mathcal{E}\cup\{E\})$ é totalmente seccionável mas não é necessariamente unimodular.

A demonstração é imediata, pois o hipergrafo H_1 gerado por $\{E\}$ é unimodular e $(\{E\},\mathcal{G})$ é uma partição de $\mathcal{G}\cup\{E\}$, portanto, F é totalmente seccionável.

Ilustração: Consideremos o hipergrafo

$H=(X,\mathcal{G})$:

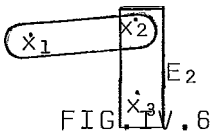


FIG.IV.6.5

e aresta

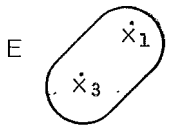


FIG.IV.6.6

então o hipergrafo $F=(X,\mathcal{G}\cup\{E\})$ é

F:

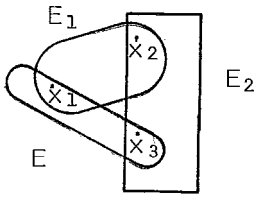


FIG.IV.6.7

é totalmente seccionável mas não é unimodular.

<u>Corolário IV.6.1</u> - Um hipergrafo $H=(X,\mathcal{G})$ p-dominado é totalmente seccionável se $|\mathcal{G}|=p+2$.

A demonstração é imediata, basta considerar os hipergrafos F_1 e F_2 gerados por $\{E_1,\ldots,E_p\}$ e $\mathcal{G}-\{E_1,\ldots,E_p\}$ respectivamente. E são unimodulares

<u>Teorema IV.6.1</u> - Se o hipergrafo $H=(X,\mathcal{G})$ não possui ciclo de cumprimento maior ou igual a 3, então H é seccionável horizontalmente, onde um dos hipergrafos seccionáveis é unimodular,

Dem.

Sabe-se pelo lema [17], que H possui um vértice x de grau um ou existem duas arestas E e F tal que ECF.

Se T é a aresta tal que $T\ni x$, então T não é dominada nem. é dominante de nenhuma outra aresta de H.

Consideremos os hipergrafos parciais H_1 e H_2 gerados por $\{T\}$ e $\mathcal{G}-\{T\}$ respectivamente, é evidente que H_1 é uni

modular e $(\{T\}, \mathcal{G}-\{T\})$ é uma partição de $\mathcal{G}$; portanto, H é seccionável horizontalmente,

Agora, se existem arestas E e F de H tal que $E \subset F$, então consideremos os hipergrafos H_1 e H_2 gerados por $\{E,F\}$ e $\mathcal{G}$- respectivamente.

É evidente que H_1 é unimodular e $(\{E,F\}, \mathcal{G}-\{F\})$ é uma partição de $\mathcal{G}$.

Logo H é seccionável horizontalmente com um dos hipergrafos seccionais unimodular.

<u>Corolário IV.6.2</u>: Se em um hipergrafo existem p vértices distintos $x_1,\ldots,x_p$ com grau 1, então H é (p+1)-seccionável horizontalmente.

Dem.

Demonstremos por indução sobre o número de vértices de Grau 1.

Se p=1, é evidente pelo teorema IV.6.1.

Suponhamos que o corolário seja válido para os hipergrafos que têm p vértices de grau 1, demonstremos para os hipergrafos que têm p+1 vértices de grau 1.

Seja o hipergrafo H que tem p+1 vértices distintos de grau 1.

Se x é um vértice de H tal que $\delta_H(x)=1$, então existe uma aresta E de H tal que contem x.

Consideremos os conjuntos $\mathcal{F}=\{E\}$ e $\Gamma=\mathcal{G}-\mathcal{F}$ os quais constituem uma partição de $\mathcal{G}$.

Portanto,

$$H = T \oplus U$$

onde T e U são os hipergrafos gerados por $\mathcal{F}$ e Γ respectivamente.

O hipergrafo seccional U contem p vértices de grau

1, então pela hipótese de indução, resulta

$$U = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p \oplus F_{p+1},$$

Logo, fazendo $F_0 = T$, temos

$$H = F_0 \oplus F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p \oplus F_{p+1},$$

isto é, H é (p+2)-seccionável horizontalmente.

Teorema IV.6.2: Um hipergrafo H é seccionável horizontalmente se, e somente se, sua matriz de incidência A for particionável-linha.

Dem.

Suponhamos que H é seccionável horizontalmente e demonstremos que A é particionável-linha.

Suponhamos que A não admite nenhuma partição - linha, então para qualquer um dos dois vetores-linha A_i e A_j, $i \neq j$, de A, temos $A_i \not\prec A_j$ ou $A_j \not\prec A_i$.

Pela identificação das arestas correspondentes E_i e E_j de H são dominadas, isto é, $E_i \subseteq E_j$ ou $E_j \subseteq E_i$, sendo E_i e E_j elementos arbitrários de $\mathcal{E}$; então não existe nenhuma partição de $\mathcal{E}$, isto é, H não é seccionável, o que é uma contradição. Logo, A admite uma particionabilidade-linha.

Agora suponhamos que A possui uma partição-linha, seja

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

Denotamos com $\mathcal{E}_1$, o conjunto de arestas associadas unívocamente aos vetores-linha de A_1 e analogamente o conjunto $\mathcal{E}_2$ aos vetores-linha de A_2.

Como não existe nenhum elemento de A_1 tal que se

ja dominado ou dominante de algum elemento de A_2, então $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ constitue uma partição de $\mathcal{E}$, consequentemente H é seccionável horizontalmente,

Corolário IV.6.2 - Se H é seccionável verticalmente, então sua matriz de incidência é particionável-coluna e reciprocamente.

A demonstração é analogo ao teorema IV.6.2.

Corolário IV.6.3 - Um hipergrafo H é q - seccionável horizontalmente se, e somente se, sua matriz de incidência for q-particionãvel-linha.

Basta aplicar a indução e o teorema IV.6.2.

Teorema IV.6.3: Um hipergrafo H é seccionável se, e somente se H* for seccionável.

Dem,

H é seccionável se, e somente se, A [matriz de incidência) for particionável; isto é, se e somente se, A^t (A^t matriz transposta de A) for particionável, isto é, se, e somente se, seu.. o hipergrafo associado H* for seccionável.

Corolário IV.6.4 - Todo hipergrafo possui um hipergrafo parcial unimodular com número de arestas 32.

A demonstração é imediata.

Proporção IV.6.2: Se o hipergrafo H for balanceado, então H possui um hipergrafo parcial unimodular de arestas $\geqslant 3$.

Basta tomar de todos os ciclos ímpares o de menor comprimento. Suponhamos que Γ seja o ciclo de menor comprimento, então Γ possui um vértice x tal que $\delta_H(x) \geqslant 3$.

Agora formemos o conjunto F tomando as arestas E_i, E_j de Γ que pertencem a $\mathcal{E}_x$ e a aresta E de $\mathcal{E}-\Gamma$.

É evidente que F gera um hipergrafo parcial unimodular de número de arestas igual a 3.

IV.7 - HIPERGRAFO K-NUCLEAR

Consideremos o hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$ e mapeamento δ_H de X em $\mathbb{Z}^+$. definido por

$$x\varepsilon X \ , \ \delta_H(x) = |\mathcal{E}_x|$$

onde $\mathcal{E}_x$ é o conjunto grau do vértice x de H.

Definição IV.7.1: O núcleo de H, denotado por N(H), é o çubconjunto de X, definido por

$$N(H)=\{x\varepsilon X/\forall y\varepsilon\ \mathcal{E}_x,\quad \delta_H(y)\leqslant|\mathcal{E}_x| \quad e \quad \delta_H(y)<|\mathcal{E}_x| \text{ sempre que } \mathcal{E}_y\neq\mathcal{E}_x\}$$

Quando $x\varepsilon N(H)$, a aresta E que contem x, é chamada aresta ou. vetor nuclear e o vértice x é elemento nuclear.

Se um hipergrafo H possui k nucleos, dizemos que H é k-nuclear.

Ilustrações

1) H:

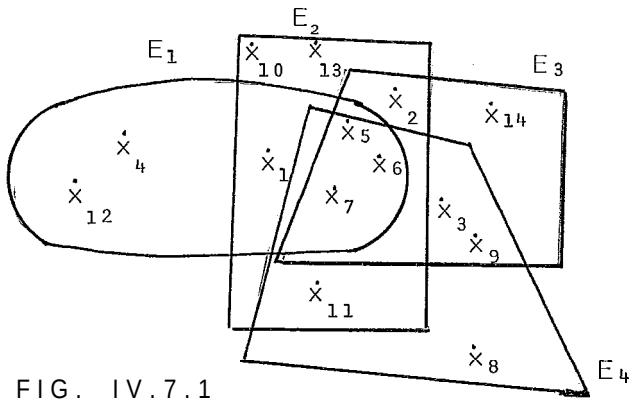


FIG. IV.7.1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
E_1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
E_2	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0
E_3	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
E_4	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0

o núcleo $N(H)=\{x_5,x_6,x_7\}$, os vértices nucleares x_5, x_6 e x_7 e as arestas nucleaces, E_1, E_2, E_3 e E_4.

21 O hipergrafo H com duas componentes

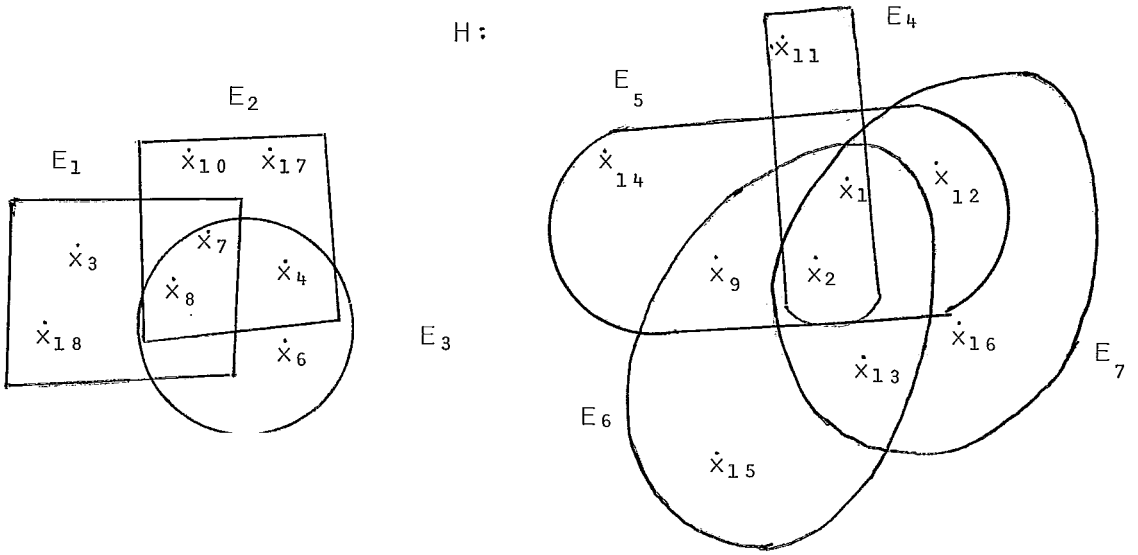


FIG.IV.7.2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}
E_1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
E_2	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
E_3	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
E_5	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
E_6	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
E_7	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0

Os núcleos $\{x_7, x_8\}$ e $\{x_1, x_2\}$.

3) O hipergrafo H com uma componente nuclear

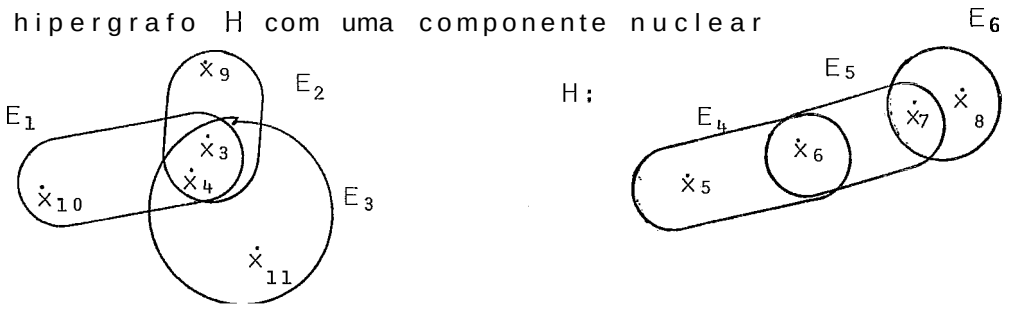


FIG.IV.7.3

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}
E_1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
E_2	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
E_3	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
E_4	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
E_5	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
E_6	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0

4) H :

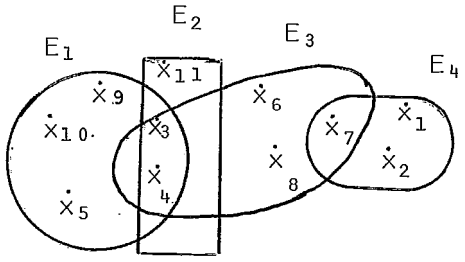


FIG.IV.7.4

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}
E_1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
E_2	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
E_3	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
E_4	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0

O hipergrafo H da fig. IV.7.4 não possui núcleo.

Se todas as k componentes de um hipergrafo H forem nucleares, então H é dito k-nuclear completo.

Os exemplos 1 e 2 ilustram hipergrafos 1-nuclear e bi-nuclear completos respectivamente e o exemplo 3 ilustra um hipergrafo 1-nuclear.

$$\Gamma = (E_j / j \varepsilon J_1,\ J_1 \subseteq J)$$

de H é chamado um <u>clique</u> se qualquer subconjunto de Γ não formar um matching de H.

Observamos que se N(H) é um núcleo de H, então os conjuntos graus $\mathcal{G}_x$ coincidem para todo $x \varepsilon N(H)$, isto é, se y, $z \varepsilon N(H)$, $z \neq y$ então $\mathcal{G}_z = \mathcal{G}_y$.

<u>Teorema IV.7.1</u>: Seja $H=(X,\mathcal{G})$ um hipergrafo e T um subconjunto não vazio de X.

T é o núcleo de H se para todo $y \varepsilon \mathcal{G}_T$ implica que $\mathcal{G}_y \subseteq \mathcal{G}_T$.

Dem.

Para todo $y \varepsilon \mathcal{G}_t$, $t \varepsilon T$, temos que $\delta_H(y) = |\mathcal{G}_y| \leq |\mathcal{G}_t|$, daí $\delta_H(y) \leq |\mathcal{G}_t|$. Portanto, temos $\delta_H(y) < |\mathcal{G}_t|$ para qualquer $y \varepsilon \mathcal{G}_t$ sempre que $\mathcal{G}_y \subseteq \mathcal{G}_t$. Logo T é um núcleo de H.

<u>Corolário IV.7.1</u>: Se o hipergrafo $H=(X,\mathcal{G})$ for nuclear, então existe um vértice x tal que para todo $y \varepsilon \mathcal{G}_x$ tem-se $\mathcal{G}_y \subseteq \mathcal{G}_x$. Além disso, $\mathcal{G}_x$ gera uma componente conexa de H.

A demonstração segue da definição de núcleo e do Teorema IV.7.1.

<u>Proposição IV.7.1</u>: Se N é um núcleo de H, então $\mathcal{G}_N$ é um clique de H.

A demonstração segue do fato de que todas as arestas (vetores) nucleares são adjacentes.

<u>Teorema IV.7.2</u>: Se um hipergrafo $H=(X,\mathcal{G})$ possui um vértice x tal que $|\mathcal{G}_x| = |\mathcal{G}|$, então H possui um Único núcleo.

Dem.

De $\mathcal{G}_x \subseteq \mathcal{G}$ e $|\mathcal{G}_v| = |E|$ segue-se que $\delta_x = \delta$.

Consideremos o conjunto $S = {}_{E\varepsilon\xi}E$ o qual é diferente de vazio, pois, $x\varepsilon S$., vem a ser núcleo de H.

Se existe outro núcleo N, então existe uma aresta nuclear F de N tal que F não é aresta nuclear de S.

Agora, sendo F uma aresta de E e $\xi=\xi_x$, então F é uma aresta de ξ_x, isto implica que $x\varepsilon F$, o que é absurdo; pois supomos que F não é aresta nuclear de S. Portanto, H possui um Único núcleo.

Corolário IV.7.2: Se um hipergrafo $H=(X,\xi)$ possui um vértice x tal que $|\xi_x|=|\xi|$, então H é conexo.

A demonstração é imediata.

Observamos que se um hipergrafo possui um núcleo,então o hipergrafo não é necessariamente conexo (Vide ilust.3 ac.)

Teorema IV.7.3: Se um hipergafo H é k-nuclear, então H é seccionável horizontalmente.

Dem.

Sejam N_i, $i=1,2,...,k$, os k núcleos de H e consideremos osconjuntos graus E_{x_i}, $i=1,2,...,k$ para $x_i\varepsilon N_i$, $i=1,2,...,k$.

Se $(\xi_{x_i})_{i\varepsilon I}$, $I=\{1,2,...,k\}$ particionam E, então H é k-seccionável horizontalmente, pois os k hipergrafos seccionais de H serão exatamente os hipergrafos gerados por ξ_{x_i}, para $i = 1,2,...,k$.

Se $(\xi_{x_i})_{i\varepsilon I}$ não constituir uma partição de ξ, então, consideremos a partição

$$((\xi_{x_i})_{i\varepsilon I}, \xi - (\xi_{x_i})_{i\varepsilon I}).$$

Assim, cada elemento da partição gera hipergrafo seccional de H.

Portanto, H admite seccionabilidade horizontal o que prova o teorema.

Um conjunto transversal de hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$, é um conjunto $T\subset X$ tal que

$T\cap E\neq\emptyset$ para cada $E\in\mathcal{E}$. |1|

Se $|T_0|=\min\{|T|/T$ transversal de $H\}$, então $|T_0|=\tau(H)$ é o número transversal de H.

Lema IV.7.2: Se H for k-nuclear completo então o número transversal de H é k.

A demonstração é imediata.

Teorema IV.7.4: Um hipergrafo H é nuclear se, e somente se, sua matriz de incidência A for nuclear.

Dem.

Suponhamos que $H=(X,\mathcal{E})$ possui núcleo, então pelo corolário IV.7.1, existe um vértice x tal que $\mathcal{E}_x$ gera uma componente conexa de H; portanto $(\mathcal{E}_x,\mathcal{E}-\mathcal{E}_x)$ é uma partição de $\mathcal{E}$ e pela identificação, isto induz uma partição-linha (A_1,A_2) de A Também existe um vetor-coluna A^x de A_1. correspondente ao vértice x com $|A^x|$ =n? de linhas de A_1. digamos $|A^x|=r$.

Seja M a matriz cortada de A_1 que tem por vetores-coluna todos os vetores-coluna de A_1 com norma r. É evidente que M^c é uma submatriz nula de A.

Por outro lado, as matrizes [M] e $[M^c]$ são exatamente A_1 e A_2, respectivamente. Logo, A possui núcleo e os elementos de M e M^c constituem as componentes dos vetores nucleares de A.

Agora, suponhamos que A possui núcleo, então existe uma submatriz cortada vertical universal M e M^c submatriz nula. Daí as matrizes parciais [M] e $[M^c]$ particionam A, e pe

la identificação esta induz uma partição $(\mathcal{F},\Gamma)$ de $\mathcal{G}$ e os vértices correspondentes às colunas de M pertencem a F. Se S é o conjunto de todos estes vértices, e sabendo que

$\mathcal{F}_S=\mathcal{F}_x$ para qualquer $x\varepsilon S$, F_x gera um hipergrafo que é uma componente (conexa) de H. Portanto, H possui núcleo.

Corolário IV.7.3: Um hipergrafo H é k-nuclear se, e somente se, sua matriz de incidência A for k-nuclear.

A demonstração é imediata

Corolário IV.7.4: Um hipergrafo H nuclear é unimodular se, e somente se, sua matriz de incidência A for totalmente unimodular.

A demonstração é imediata.

Teorema IV.7.5: Um hipergrafo H conexo com núcleo N é unimodular se for $\delta_H(x)=1$ para todo $x\varepsilon X-N$

Dem.

Pela hipótese, segue-se que a matriz de incidência de H verifica as hipóteses de teorema III.6.1 e pelo corolário IV.7.4, resulta que H é unimodular.

Corolário IV.7.5: Sejam $N_i, i\varepsilon I=\{1,2,\ldots,k\}$, os k núcleos do hipergrafo $H=(X,\mathcal{G})$.

Se H é k-seccionável horizontalmente e for $\delta_H(x)=1$ para todo $x\varepsilon X-\bigcup_{i\varepsilon I} N_i$, então H é unimodular.

Basta aplicar a indução e o teorema IV.7.5.

IV.8 - MATCHING h-UNIFORME

Definição IV.8.1: Um hipergrafo H é um matching h-uniforme se todos os matchings maximais de H possuirem cardinalidade h.

Ilustrações:

1) Seja o hipergrafo

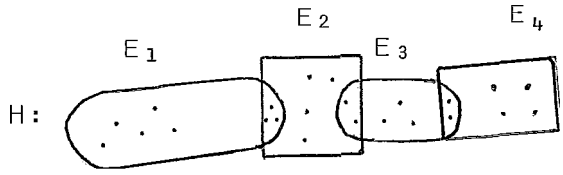


FIG.IV.8.1

Os matchings de H são:

$M_1=\{E_1,E_3\}$, $M_2=\{E_1,E_4\}$ e $M_3=\{E_2,E_4\}$ e todos eles têm dois elementos e o hipergrafo H é um matching 2-uniforme.

21 Seja o hipergrafo H de tres componentes,

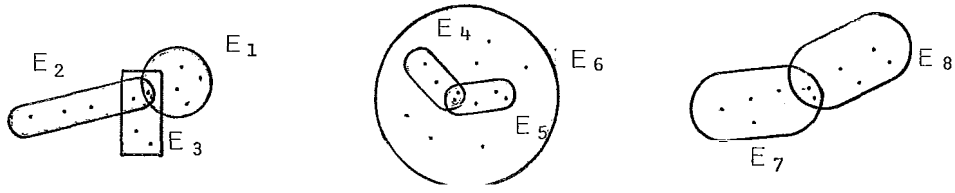


FIG.IV.8.2

H é um matching 3-uniforme .

Lema IV.8.1: Se um hipergrafo H é k-nuclear ($k\geq 2$), então H possui pelo menos um matching de cardinalidade k.

A demonstração é imediata.

Definição IV.8.2: Dado um hipergrafo $H=(X,E_1,E_2,\ldots,E_m)$, se existe um hipergrafo $\overline{H}=(\overline{X},\overline{\mathcal{E}})$ cujos vértices são os matchings maximais de H e cujas arestas $\overline{E}_i$ são dadas por

$\overline{E}_i=\{M$ matching de H tal que $M\cap E_i\}$ para $i=1.2\ldots\ldots m$,

então $\overline{H}$ é chamado hipergrafo matching.

Observamos que nem sempre existe $\overline{H}$ para um hipergrafo H, a não ser que seja vazio; por exemplo, se H possuir um único núcleo, então $\overline{H}$ é vazio.

Ilustração; Seja o hipergrafo

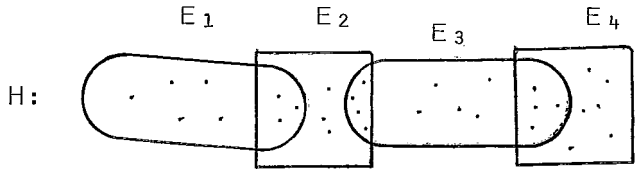


FIG. IV.8.3

então os matchings de H são:

$M_1=\{E_1,E_3\}$, $M_2 = \{E_1,E_4\}$ e $M_3 = \{E_2,E_4\}$.

Logo o hipergrafo matching $\overline{H}$ é:

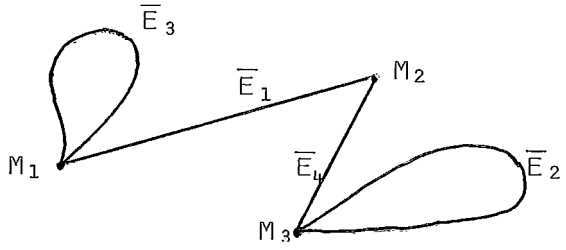


FIG. IV.8.4

Lema IV.8.2: Se H é k-nuclear, $k\geqslant 2$, então $\overline{H}$ é de ordem $\prod_{i=1}^{k} |\mathcal{G}_{x_i}|$, onde $\mathcal{G}_{x_i}$ é o conjunto grau do elemento núcleo x_i para cada $i=1,2,\ldots,k$.

A demonstração segue do fato que os conjuntos graus $\mathcal{G}_{x_i}$, $i=1,2,\ldots,k$ são disjuntos dois a dois em H pela definição do vértice de $\overline{H}$.

Teorema IV.8.1: Um matching M do hipergrafo H é maximal se, e somente se. $\delta_{\overline{H}}(M)=|M|_H$.

Dem.

Consideremos o hipergrafo

$H=(X,\mathcal{G})$; $\mathcal{G}=(E_i/i\varepsilon I=\{1,2,\ldots,m\})$ e o hipergrafo- matching

$\overline{H}=(\overline{X},\overline{\mathcal{G}})$; $\overline{X}=\{M_t/M_t$ matching de H, $t\varepsilon T=\{1,2,\ldots,p\}\}$e

seja ψ um mapeamento de $\mathcal{G}$ em $\overline{\mathcal{G}}$ definido por $\psi(E_i)=\overline{E}_i$, onde $\overline{E}_i=\{M$ 'matching de H tal que $M\ni E_i\}$, $i\varepsilon I$.

O mapeamento ψ é uma bijeção.

Suponhamos que para $E_i\neq E_j$ seja $\psi(E_i)=\psi(E_j)$ então $\overline{E}_i=\overline{E}_j$ isto implica que

$\{M$ matching$/M\ni E_i\}$ = $\{N$ matching$/N\ni E_j\}$ de onde temos que

$$\{E_i\} = \bigcap_{M\varepsilon\overline{E}_i} M = \bigcap_{N\varepsilon\overline{E}_j} N = \{E_j\}$$

o que contradiz a $E_i\neq E_j$. Logo, deve ser $\psi(E_i)\neq\psi(E_j)$ para todo $E_i\neq E_j$, $i\neq j$.

Agora, dada $\phi\neq\overline{E}_j$ de $\overline{\mathcal{G}}$, então existe um matching $M\neq\phi$, de H. Dai M contém pelo menos duas arestas E_i e E_j de H tal que $E_i\bigcap E_j=\phi$.

Consideremos $\{E_j\} = \bigcap_{M\varepsilon\overline{E}_j} M$. Logo, pela definição de ψ, temos que $\psi(E_j)=\overline{E}_j$.

Suponhamos que M seja um matching maximal de H e provemos que a cardinalidade de M é igual à cardinalidade do conjunto grau $\overline{\mathcal{G}}_M$ em $\overline{H}$.

Seja $M=\{E_1,E_2,\ldots,E_q\}$, $1<q\leq m$ então sua imagem por ψ de M é um subconjunto de arestas em $\overline{H}$, isto é,

$$\psi(M) = \psi(\{E_1,E_2,\ldots,E_q\}) = \{\overline{E}_1,\overline{E}_2,\ldots,E_q\}$$

Sendo ψ uma bijetora, então

$$|M|_H = |\psi(M)|_{\overline{H}} = |\{\overline{E}_1,\overline{E}_2,\ldots,\overline{E}_q\}|$$

Agora como $M\varepsilon\overline{E}_i$ para todo $i=1,2,\ldots,q$, então

$$|\{\overline{E}_1,\overline{E}_2,\ldots,\overline{E}_q\}| = |\overline{\mathcal{G}}_M|_{\overline{H}} = \delta_{\overline{H}}(M).$$ Portanto,

$$\delta_{\overline{H}}(M) = |M|_H$$

Agora. suponhamos que $\delta_{\overline{H}}(M)=|M|$, M é um vértice de $\overline{H}$ e prdvemos que M é um matching maximal de H.

Seja $\overline{\mathcal{E}}_M=\{\overline{E}_1,\overline{E}_2,\ldots.E_p\}$ então pela bijeção ψ^{-1}.temos que $\psi^{-1}(\{\overline{E}_1,\overline{E}_2,\ldots,\overline{E}_p\}) = \{E_1\ldots..E_p\}=M$, e resulta M um matching maximal de H.

Concluímos assim a demonstração de nosso teorema.

Ilustração:

Consideremos o hipergrafo

$H = (X,\mathcal{E})$; $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$ e $\mathcal{E}=(E_1,E_2,E_3,E_4,E_5,E_6)$

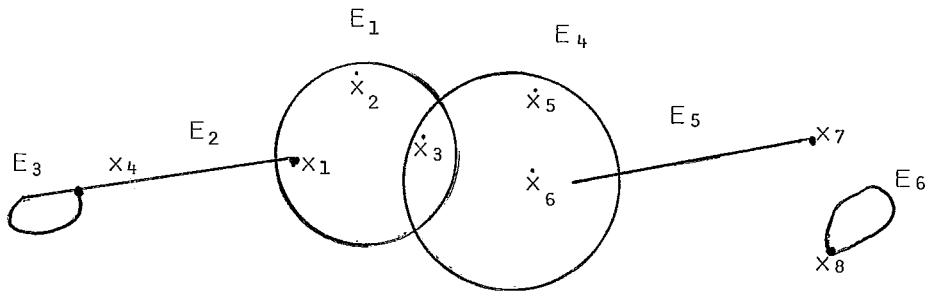


FIG.IV.8.5

O hipergrafo matching $\overline{H}=(\overline{X},\overline{\mathcal{E}})$, onde os elementos de $\overline{X}$ são os matchings maximais de H, isto é,

$\overline{H}$:

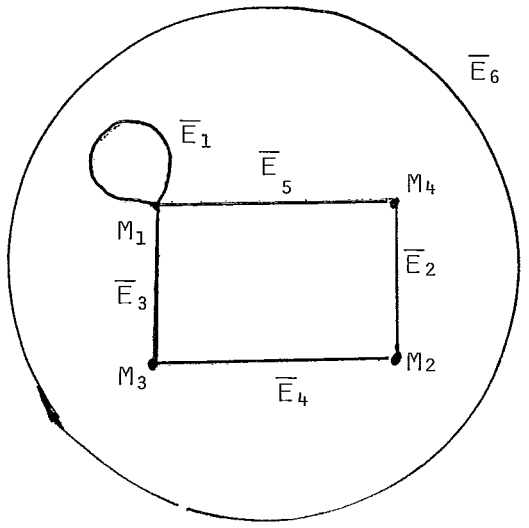


FIG.IV.8.6

$M_1 = \{E_1, E_3, E_5, E_6\}$

$M_2 = \{E_2, E_4, E_6\}$

$M_3 = \{E_3, E_4, E_6\}$

$M_4 = \{E_2, E_5, E_6\}$

e as arestas de $\overline{H}$ são

$\overline{E}_1 = \{M / M \ni E_1\} = \{M_1\}$

$\overline{E}_2 = \{M / M \ni E_2\} = \{M_2, M_4\}$

$\overline{E}_3 = \{M / M \ni E_3\} = \{M_1, M_3\}$

$\overline{E}_4 = \{M / M \ni E_4\} = \{M_2, M_3\}$

$\overline{E}_5 = \{M / M \ni E_5\} = \{M_1, M_4\}$

$\overline{E}_6 = \{M / M \ni E_6\} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$

Agora os conjunto grau $\overline{\mathcal{E}}_{M_i}$, $i=1,2,3,4$ em $\overline{H}$ são

$\overline{\mathcal{E}}_{M_1} = \{\overline{E}_1, \overline{E}_3, \overline{E}_5, \overline{E}_6\}$

$\overline{\mathcal{E}}_{M_2} = \{\overline{E}_2, \overline{E}_4, \overline{E}_6\}$

$\overline{\mathcal{E}}_{M_3} = \{\overline{E}_3, \overline{E}_4, \overline{E}_6\}$

$\overline{\mathcal{E}}_{M_4} = \{\overline{E}_2, \overline{E}_5, \overline{E}_6\}$

Logo, $\delta_{\overline{H}}(M_1) = 4 = |M_1|_H$ e $\delta_{\overline{H}}(M_j) = 3 = |M_j|_H$, $j=2,3,4$

<u>Teorema IV.8.2:</u> Se um hipergrafo H possui um matching maximal de cardinalidade maior ou igual a $m(H)-1$, então H é unimodular.

Dem.

Suponhamos que H possui um ciclo Γ^p, onde $p \in \mathbb{Z}^+$, $p \geqslant 3$ e ímpar. Então Γ^p contem pelo menos três arestas de H que se interseptam duas a duas, Sejam estas arestas E_i, E_j e E_t.

Construamos um matching M, tomando todas as ares

tas disjuntas duas a duas entre os m(H)-3 arestas restantes e mais uma aresta qualquer entre as E_i, E_j e E_t, então o matching M tem cardinalidade

$$(m(H)-3)+1 = m(H)-2 \text{ elementos.}$$

O que contradiz a hipótese. Portanto, H é unimodular. Assim concluímos a demonstração de nosso teorema.

Ilustrações:

1) Seja o hipergrafo H:

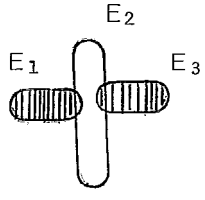


FIG.IV.8.7

$|\mathcal{E}|=m(H)=3$ e card.matching max.=2

21 Seja o hipergrafo H:

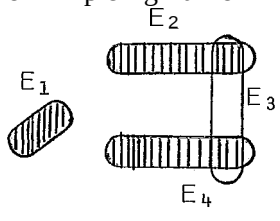


FIG.IV.8.8

$|\mathcal{E}|=m(H)=4$ e card.matching max=3

31 Seja o hipergrafo H:

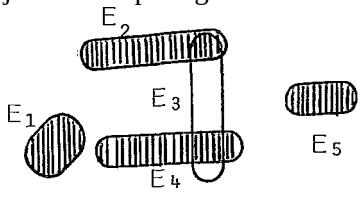


FIG.IV.8.9

$|\mathcal{E}|=m(H)=5$

card.matching max=4

41 Seja o hipergnafo H:

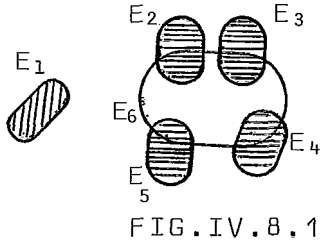


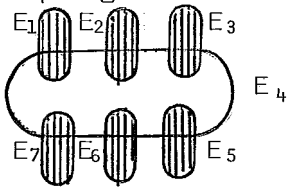
FIG.IV.8.10

$|\mathcal{E}|=m(H)=6$

card.matching max=5

5) Seja o hipergrafo $|\mathcal{E}|=m(H)=7$

H:

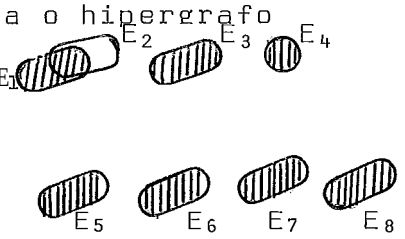


card. rnatching max=6

FIG.IV.8.11

6) Seja o hipergrafo $|\mathcal{E}|=m(H)=8$

H:

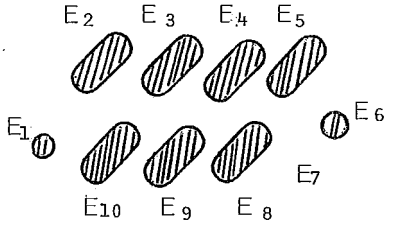


card, rnatching max=7

FIG.IV.8.12

7) Seja o hipergrafo $|\mathcal{E}|=m(H)=10$

H:



card. rnatching max=10

FIG.IV.8.13

<u>Teorema IV.8.3</u>: Se em um hipergrafo H existem dois matchings M_1 e M_2 tais que geram os hipergrafos seccionais H_1 e H, respectivamente, então H é unimodular.

A demonstração segue-se pela aplicação direta do teorema IV.5.1.

Ilustrações:

11 O hipergrafo

H:

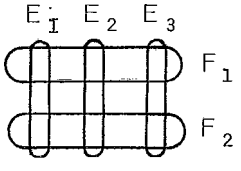


FIG.IV.8.14

"transporte", é unirnodular,

21 O hipergrafo

H:

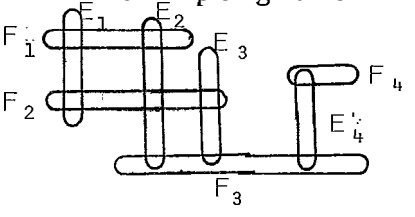


FIG.IV.8.15

é unimodular.

<u>Corolário IV.8.1</u>: Se em um hipergrafa $H=(X,\mathcal{G})$ e xiste uma aresta Γ tal que $\mathcal{G}-\{\Gamma\}$ gera um hipergrafo, o qual verifica as hipóteses do teorema IV.8.3, então H é unimodular ou H possui um hipergrafo parcial unirnodular com $|\mathcal{G}|-1$ arestas.

Dem.

Seja F o hipergrafo gerado por $\mathcal{G}-\{\Gamma\}$, então $F = F_1 \oplus F_2$.

Se Γ intersecta os elementos de F_1 sem intersectar nenhum elemento de F_2, ou inversamente, então pelo teorema IV. 8.3, H é unimodular.

Agora Γ intersecta elemento de F_1 e F_2 e os elementos intersectados por Γ, não são adjacentes, também H é unimodular. Mas, se existem entre elementos intersectados por Γ, de F_1 e F_2 que são adjacentes, então H não é unirnodular, o seu hipergrafo parcial F será unimodular.

<u>Ilustração</u>: Vide o exemplo V.5.5 no Capitulo V.

CAPÍTULO V

MÉTODOS PARA OBTENÇÃO DE UM HIPERGRAFO MAXIMAL UNIMODULAR

V.1 - INTRODUÇÃO

Neste capitulo descrevemos dois métodos denominados, respectivamente, o método do matching exponencial e o método dos vetores zero-espaço uniforme para extrair um hipergrafo parcial maximal unimodular de um hipergrafo dado. Estes métodos são obtidos a partir dos resultados obtidos nos capítulos III e IV.

Lembramos que no capitulo III foi definido o vetor zero-espaço e daí a matriz zero-espaço; e no capitulo IV foi associado de uma maneira biunívoca a uma (0,1)-matriz de ordem mxn, zero-espaço, um par de conjuntos onde o primeiro conjunto tem cardinalidade n e o segundo conjunto que é uma família de m partes não vazias do primeiro. Este par de conjuntos é denominado um hipergrafo de ordem n e recíprocamente, para cada hipergrafo $H=(X,\mathcal{G})$ de ordem n e $|\mathcal{G}|=m(H)=m$ existe univocamente uma (0,1)-matriz de ordem nxm, onde m e n são o número de arestas e vértices, respectivamente do hipergrafo. Em outras palavras, se a (0,1)-matriz A é uma matriz zero-espaço, o hipergrafo associado é um hipergrafo sem laços e recíprocamente.

Na seção V.2 colocamos algumas definições e notações que serão usadas na descrição de nossos métodos.

Na seção V.3 descrevemos detalhadamente o método do matching exponencial e dos vetores zero-espaços uniformes, para a construção de um hipergrafo parcial unimodular.

Na seção V.4 apresentamos as fluxo-gramas que permitirão um melhor entendimento dos métodos. E, finalmente, na seção V.5, apresentamos exemplos que ilustram estes métodos.

V.2 - NOTAÇÕES E DEFINIÇÕES

Denotamos um hipergrafo H como um par de conjuntos, isto é, $H=(X,\mathcal{E})$, onde $X=\{x_i/i\varepsilon I=\{1,2,\ldots,n\}\}$ e $\mathcal{E} = (E_j/E_j\neq\emptyset$, $j\varepsilon J=\{1,2,\ldots,m\})$; $|X|=n(H)=n$ e $|\mathcal{E}|=m(H)=m$.

Assumamos daqui em diante, a menos de outra indicação, que o hipergrafo H em consideração é um hipergrafo simples, isto é, todas as arestas são distintas.

Definição V.2.1 - Um matching M do hipergrafo H é denominado exponencial se M for maximal e $|M|=\max\{|N|/N$ é matching maximal de $H\}$.

Para não encontrarmos problemas de notação, façamos a seguinte convenção:

Quando nos referimos à cardinalidade da aresta E do hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$ estamos nos referindo à norma do vetor-linha $E(s;d)$, s-zeros e d-espaços correspondente na matriz de incidência associada ao hipergrafo considerado, isto é, estamos nos referindo de uma maneira indistinta aos membros da família $\mathcal{E}$ como aresta ou vetor. Daí poderemos colocar os elementos de $E(s;d)$ entre parêntesis ou chaves, por exemplo $E(s;d)=(x_3,x_7,x_{11},x_{19})$ ou $E(s;d)=\{x_3,x_7,x_{11},x_{19}\}$.

Definição V.2.2: Seja $E(s;d)$ um vetor s-zeros e d-espaços da família 6.

A norma ou cardinalidade de $E(s;d)$, denotado por $|E(s;d)|$ é definido por

$$|E(s;d)| = \rho$$

onde ρ é um inteiro não negativo, que indica o número total de vértices que integram o conjunto $E(s;d)$ equivalente ao número total de 1^s que aparecem como componentes do vetor $E(s;d)$.

Dentre todos os vetores $E(z;d)$, z-zeros, d-espaço, escolhemos o vetor $E(s;d)$ como sendo o que tem o menor número de zeros antes de sua primeira componente diferente de zero (s-zeros), isto é, o inteiro não negativo s, isto é.

$$s = \min \{z/E(z,d)\varepsilon\mathcal{G}\}$$
$$0 \leqslant z \leqslant n-1$$

Definição V.2.3: Dois membros de $\mathcal{G}$, são uniformes se eles são do mesmo espaço uniforme.

Exemplo 1: Os vetores

$E(s;d) = (0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1)$ e

$E(z;d) = (1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0)$

2-zeros e O-zero, respectivamente, são 3-espaços uniformes, logo são uniformes.

Se os vetores

$E_1(z_i;d)$, $E_2(z_2;d)$, ..., $E_p(z_p;d)$

constituem um conjunto d-espaço uniforme, então os inteiro não-negativo z_i, $i=1,2,\ldots,p$, verificam as desigualdades

$$0 \leqslant z_1 \leqslant z_2 \leqslant \ldots \leqslant z_p .$$

Se $E(z;d)$ e $E(s;e)$ são os membros de $\mathcal{G}$, que tem o menor e o maior número de elementos, respectivamente, então escrevemos:

$$|E(z;d)| = \min_{E(u;c)\varepsilon\mathcal{G}} |E(u,c)| \text{ e } |E(s;e)| = \max_{E(t;b)\varepsilon\mathcal{G}} |E(t;b)|$$

Se temos $E_1(z_1;d_1)$, $E_2=(z_2;d_2),\ldots,E_q(z_q;d_q)$ q-vetores que tem a mesma norma, então podemos tomar o vetor

$$E_k(z_k;d_k) \text{ com } z_k = \min_{1\leq j\leq q} \{z_j/E_j(z_j;d_j)\}$$

Exemplo: Sejam $E_1=(x_3,x_7,x_8)$, $E_2=(x_2,x_5,x_6)$

$$E_3=(x_3,x_4,x_9),\ E_4=(x_7,x_8,x_9)$$

os vetores de norma 3, então o vetor com

$$z_k = \min_{j=1,2,3,4} \{z_j/E_j(z_j;d_j)\}$$

$$E_2 = (x_2,x_5,x_6)$$

I-zero e 3-espaço. Claro que não é uniforme

V.3 - DESCRIÇÃO DOS MÉTODOS

Nesta seção descrevemos detalhadamente a busca do hipergrafo parcial maximal unimodular pelo teste da cardinalidade do matching exponencial e vetores zero-espaços uniformes.

V.3.1 - MÉTODO DO MATCHING EXPONENCIAL

Usando o algarítmo da busca do matching maximal do $H=(X,\mathcal{E})$, determine todos os matchings maximais e tome o matching exponencial M.

Verifique se

$$|M| \geq m(H)-1$$

No caso afirmativo pare, pois o hipergrafo H é unimodular. No outro caso, aplique o método dos vetores zero-espaço uniformes.

V.3.2 - MÉTODO DOS VETORES ZERO-ESPAÇO UNIFORME

Considere os elementos $E(z;e)$, z-zeros e e - espaço de $\mathcal{G}$ e determine:

$$|E_k(z(k);e)| = \min_{E(s,d)\varepsilon\mathcal{G}} |E(s;d)|,$$

$$z(k) = \min_{j=1,2,\ldots,q} \{s/E_j(s;d)\}$$

$k \in \mathbb{K} = \{1,2,\ldots,q\}$, $1 \leqslant q \leqslant m$ e o subconjunto S de X,

$$S = \{x\varepsilon X/\delta_H(x) = r, \quad 3 \leqslant r = \max_{y\varepsilon X} \delta_H(y)\}$$

No caso em que o conjunto S não exista, tome como S, a aresta $E(z;e)$ com

$$z = \min \{s/E(s;d)\varepsilon\mathcal{G}\}.$$

Consideremos dois casos relativamente à cardinalidade ou à norma do elemento $E_k(z(k);e)$ de $\mathcal{G}$.

Se $|E_k(z(k);e)| < \max_{E(s;d)\varepsilon\mathcal{G}} |E(s;d)|$, então realize a fase 1

ou

Se $|E_k(z(k);e)| = \max_{E(s;d)\varepsilon\mathcal{G}} |E(s;d)|$, realize a fase 2.

FASE 1

$K = K \cup \{q+1\}$, onde $q+1$ é o índice da aresta E_{q+1} tal que

$$|E_{q+1}| = \max_{E \in \mathcal{E}} |E|$$

Faça $k=0$

Passo 0. - Inicia com $k = k+1$, a aresta

$$E_{k_1}(z_1(k);e),\ z_1(k) = \min_{1 \leq j \leq q} \{s/E_j(s,d)\}$$

Se $E_{k_1}(z_1(k),e)$ é e-espaço uniforme, então forme o conjunto

$$A_k = \{E_{k_1}(z_1(k);e),\ E_{k_2}(z_2(k);e),\ \ldots$$

$$E_{k_p}(z_p(k);\ e)\} \qquad [1]$$

cujos membros $E_{k_p}(z_p(k);e)$ são todos os possíveis e-espaços uniformes e verifique se existe algum $E_{h_r}(w_r(h);d)$ com $h \# k$, $d \neq e$, que seja d-espaço uniforme e tal que

$$E_{h_r} \cap E_{k_i} = \phi \quad \text{para todo } E_{k_i} \in A_k \qquad [*]$$

No caso afirmativo forme o conjunto

$$B_k = \{E_{k_r}(w_r(h);d),\ldots,\ E_{h_q}(w_q(h);d)\} \qquad [2]$$

cujos membros $E_{h_q}(w_q(h);d)$ são todos os possiveis d-espaços uniformes que verifiquem a condição [*] acima e vá para o passo 1. Caso contrário, vá para o passo 2.

Passo 1.- Verifique se

$$|A_k \cup B_k| = |\xi|$$

No caso afirmativo pare, pois o hipergrafo em consideração é unimodular. Caso contrário, vá para o passo 2.

Passo 2. - Considere $E_{k_1} = E_{k_1}(z_1(k);e)$ e verifique se existe

$$E_{k_i} \text{ tal que } E_{k_i} \cap E_{k_1} = \phi.$$

Caso exista forme o conjunto

$$C_k = \{E_{k_1}, E_{k_2}, \ldots, E_{k_m}\} \qquad [3]$$

cujos membros são todos os possíveis vetores disjuntos dois a dois e verifique se existe algum E_{h_j} tal que

$$E_{h_j} \cap (\bigcup_{E \in C_k} E) \neq \phi \quad e \quad E_{h_j} \notin C_k$$

No caso afirmativo forme o conjunto

$$D_k = \{E_{h_1}, E_{h_2}, \ldots, E_{h_n}\}, \forall E_{h_j} \notin C_k \quad j=1,2,\ldots,n \qquad [4]$$

cujos membros são disjunto dois-a dois e vá para o passo 3. Caso contrário vá para o passo 4.

Passo 3.- Verifique se

$$|C_k \cup D_k| = |\xi|$$

No caso afirmativo, pare, pois o hipergrafo dado é unimodular. Caso contrário vã para o passo 4.

Passo 4. - Considere $E_{k_1}=E_{k_1}(z_I(k);e)$ e verifique se existe E_{k_i}, $i\neq k$ que satisfaça uma das seguintes condições

a) $E_{k_1} \subsetneq E_{k_i}$

b) $E_{k_1} \cap E_{k_i} = S$

c) $E_{k_i} \cap E_{k_1} \neq \phi$ e $E_{k_i} \cap E_{k_1} \neq S$

d) $|E_{k_i} \cap E_{k_1}| \leq |E_{k_1}|$, onde $|E_{k_i}| = \underset{E\in\mathcal{E}}{\mathrm{Min}} |E|$

Caso exista, vá para o passo 5. Caso contrário, vá para o passo 6.

Passo 5. - Verifique se existe algum E_{k_j}, $j\neq k$, $j\neq i$ tal que satisfaça uma das condições abaixo.

a') $E_{k_1} \subseteq E_{k_i} \subseteq E_{k_j}$

b') $E_{k_j} \cap E_{k_1} = S$ e $E_{k_j} \cap E_{k_i} = S$

c') $E_{k_j} \cap E_{k_1} = \phi$ e $E_{k_j} \cap E_{k_i} \neq S$

d') $E_{k_j} \cap E_{k_i} = \phi$

Caso exista repita os testes deste passo da seguinte forma: Tome E_{k_t}, $t\neq k$, $t\neq i$, $t\neq j$ tal que satisfaça uma das seguinte condições.

a'') $E_{k_1} \subseteq E_{k_i} \subseteq E_{k_j} \subseteq E_{k_t}$

b'') $E_{k_t} \cap E_{k_1} = S$, $E_{k_t} \cap E_{k_i} = S$ e $E_{k_t} \cap E_{k_j} = S$

c'') $E_{k_t} \cap (E_{k_1} \cup E_{k_i}) = \phi$ e $E_{k_t} \cap E_{k_j} \neq S$

d'') $E_{k_t} \cap (E_{k_i} \cup E_{k_j}) = \phi$

e vã para o passo 6,

Passo 6. - Forme o conjunto

$$\Gamma_k = \{E_{k_1}, E_{k_2}, \ldots, E_{k_r}\} \qquad [5]$$

e vã para o passo 7,

Passo 7. - Verifique se

$$|\Gamma_k| = |\mathcal{E}_G|$$

No caso afirmativo pare, pois o hipergrafo dado é unimodular. Caso contrário vá para o passo 8.

Passo 8. - Se $k<q$, faça $k=k+1$ e veja se o vetor inicial E_{k_1} é e-espaço uniforme ou d-espaço uniforme. SE for repita o passo 8. Senão, faça $k=k-1$ e volte para o passo 0; se $k=q$ vá para o passo 9. Caso contrário, vã para o passo 10.

Passo 9. - Faça $k=q+1$, (é a q-ésima iteração) o índice do vetor inicial E_k, onde $|E_k| = \max_{E\in\mathcal{E}_G} |E|$ e volte ao passo 2.

Passo 10. - Considere todos os conjuntos

$$A_k \cup B_k,\ C_k \cup D_k \text{ e } \Gamma_k$$

formados em [1]-[2], [3]-[4] e [5] e escolha entre estes o que tem maior número de elementos , isto é.

$$|\Theta_k| = \max_{j=1,2,\ldots q,q+1} \{|\Theta_j| / \Theta_j = A_j \cup B_j \text{ ou } \Theta_j = C_j \cup D_j \text{ ou } \Theta_j = \Gamma_j\}$$

O conjunto Θ_k gera um hipergrafo maximal unimodular.

FASE 2

Neste caso o hipergrafo $H = (X,\xi)$ é h-uniforme, o conjunto

$$S = \{x\varepsilon X/\bar{\delta}_H(x) = r; \quad 3\leqslant r = \max_{y\varepsilon X} \bar{\delta}_H(y)\}$$

Faça k = 0.

Iteração k

Passo 11.- Inicie com k = k+1, a aresta

$E_{k_1}(z_1(k);e)$, onde $z_1(k)= \min\{s/E(s;d)\varepsilon\xi\}$ e

$e = \min\{d/E(s,d)\varepsilon\xi\}$, isto é, $E_{k_1}(z_1(z_1(k);e)$ é a aresta mais confortável entre todas as arestas de ξ.

Se $E_{k_1}(z_1(k);e)$ é e-espaço uniforme, então forme o conjunto

$$\alpha_k = \{E_{k_1}(z_1(k);e), E_{k_2}(z_2(k);e)\ldots,E_{k_r}(z_r(k);e)\} \quad [6]$$

cujos elementos E_{k_r} são todos os possíveis e-espaços uniformes e que verifique se existe algum $E_{h_r}(s_r(h);d)$ com h# k, $d\neq e$ que seja d-espaço uniforme e tal que

$$E_{h_r}(s_r(h);d) \cap Ek_i(z_i(k);e)=\phi \text{ para todo } E_{k_j}(z_j(k);e)$$

de α_k [**]

No caso afirmativo, forme o conjunto

$$\beta_k = \{E_{h_1}(s_1(h);d), E_{h_2}(s_2(h);d)\ldots,E_{h_t}(s_t(h);d)\} \quad [7]$$

cujos elementos $E_{h_t}(s_t(h);d)$ são todos os possíveis d-espaços

uniformes e que verifiquem a condição [**] acima e forme o conjunto $\alpha_k \cup \beta_k$ e vá para o passo 12. Caso contrário, vá para o passo 13

Passo 12. - Verifique se

$$|\alpha_k \cup \beta_k| = |\mathcal{G}|$$

Caso seja verdadeira pare, pois o hipergrafo considerado é unimodular. Caso contrário, vá para o passo 13.

Passo 13. - Considere $E_{k_1} = E_{k_r}(z_1(k);e)$ e verifique se existe E_{k_i} tal que $E_{k_i} \cap E_{k_1} = \phi$. Caso exista forme o conjunto

$$\theta_k = \{E_{k_1}, E_{k_2}, \ldots, E_{k_i}\} \qquad [8]$$

cujos membros são todos os possíveis vetores disjuntos dois a dois e verifique se existe algum E_{h_j} tal que

$$E_{h_j} \cap \left(\bigcup_{E \in \theta_k} E \right) \neq \phi \quad e \quad E_{h_j} \notin \theta_k$$

Caso exista forme o conjunto

$$\rho_k = \{E_{h_1}, E_{h_2}, \ldots, E_{h_r}\}, \qquad [9]$$
$$\forall E_{h_j} \notin \theta_k, \; j=1,\ldots,r$$

cujos membros são todos os possíveis vetores disjuntos dois a dois e forme o conjunto $\theta_k \cup \rho_k$ e vá para o passo 14. Caso contrário, vá para o passo 15.

Passo 14. - Verifique se

$$|\theta_k \cup \rho_k| = |\mathcal{G}|.$$

No caso afirmativo pare, pois o hipergrafo é unimodular.

Caso contrário, vá para o passo 15.

<u>Passo 15</u>. - Considere $E_{k_1}=E_{k_1}(z_1(k);e)$ e tome E_{k_s} um elemento arbitrário de $\mathcal{G}$, $s\neq k$ e verifique se existe algum E_{k_z}, $z\neq s$, $z\neq k$ que satisfaça uma das seguintes condições:

e) $E_{k_z}\bigcap E_{k_s}=\phi$

f) $E_{k_z}\bigcap E_{k_1}=S$ e $E_{k_z}\bigcap E_{k_s}=S$

Caso exista, vá para o passo 16. No outro caso vá para o passo 17.

<u>Passo 16</u>. - Verifique se existe algum E_{k_u}, $u\neq z$, $u\neq s$, $u\neq k$ que satisfaça uma das seguintes condições abaixo.

e') $E_{k_u}\bigcap(E_{k_s}\cup E_{k_z})=\phi$

f') $E_{k_u}\bigcap E_{k_1}=S$, $E_{k_u}\bigcap E_{k_s}=S$ e $E_{k_u}\bigcap E_{k_z}=S$

Caso exista, repita este passo da seguinte forma:

Tome E_{k_x}, $x\neq u$, $x\neq z$, $x\neq s$, $x\neq k$ que satisfaça uma das seguintes condições:

e'') $E_{k_x}\bigcap(E_{k_s}\cup E_{k_z}\cup E_{k_u})=\phi$

f'') $E_{k_x}\bigcap E_{k_1}=S$, $E_{k_x}\bigcap E_{k_s}=S$,

$E_{k_x}\bigcap E_{k_z}=S$, $E_{k_x}\bigcap E_{k_u}=S$

e forme o conjunto

$$\sigma_k=\{E_{k_1},E_{k_s},E_{k_z},E_{k_u},E_{k_x}\} \qquad [10]$$

e logo verifique se

$$|\sigma_k|=|\mathcal{G}|.$$

No caso afirmativo pare, pois o hipergrafo dado

é unimodular.

Caso contrário, vá para o passo 17.

Passo 17. - Verifique se

$$k = m$$

No caso afirmativo vá para o passo 18. Caso contrário, faça k=k+1 e veja se o vetor inicial E_{k_1} é e-espaço uniforme ou d-espaço uniforme. Se fôr, repita este passo. Senão, faça k=k-1 e volte para o passo 11,

Passo 18. - Considere todos conjuntos, obtido nas k iterações

$$\alpha_k \cup \beta_k, \quad \theta_k \cup \rho_k \quad e \quad \sigma_k$$

formados em [6]-[7], [8]-[9] e [10], e escolha entre estes o que tem o maior número de elementos, isto é,

$$|\psi_k| = \max_{J=1,2,\ldots,k} \{|\psi_j| / \psi_j = \alpha_j \cup \beta_j \text{ ou } \psi_j = \theta_j \cup \rho_j \text{ ou } \psi_j = \sigma_j\}$$

O conjunto ψ_k gera um hipergrafo $H=(X,\psi_k)$ que é maximal unimodular.

V.4 - FLUXOGRAMAS DOS MÉTODOS DO MATCHING EXPONENCIAL E DOS VETORES ZERO-ESPAÇO UNIFORME

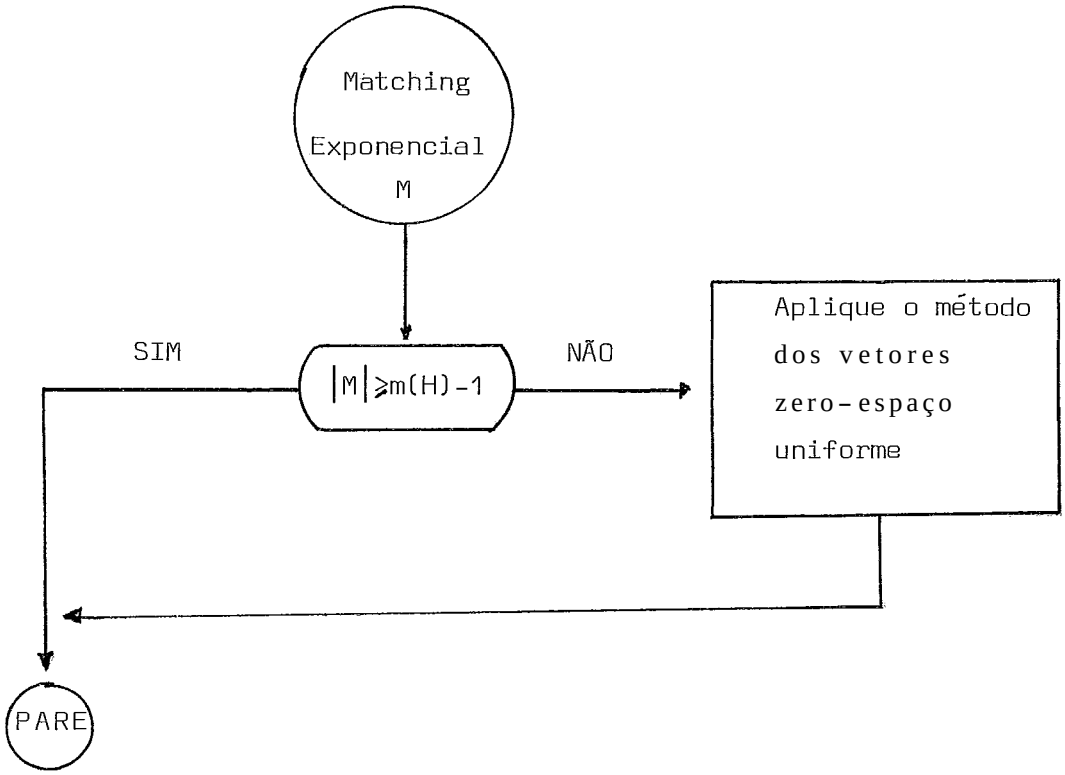
Apresentamos três fluxogramas;

O primeiro fluxograma mostra o funcionamento do método para se buscar o hipergrafo maximal unimodular pelo teste da cardinalidade do matching exponencial.

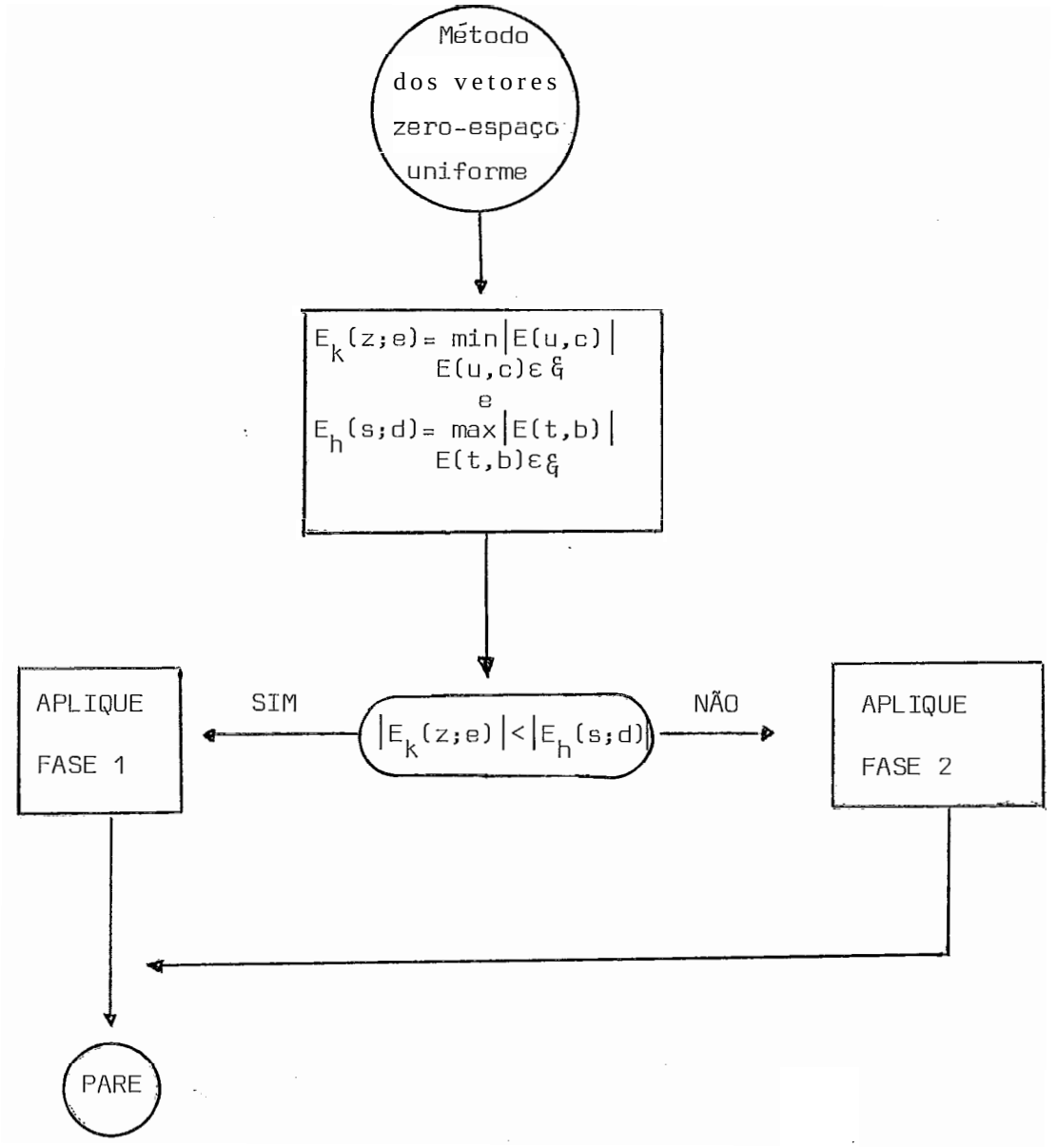
O segundo fluxograma mostra a decisão que deve ser realizada para a aplicação das fases 1 e 2 do método dos vetores zero-espaço uniforme.

O terceiro fluxograma descreve a fase 1 deste método. Finalmente o quarto fluxograma descreve a fase 2 deste método.

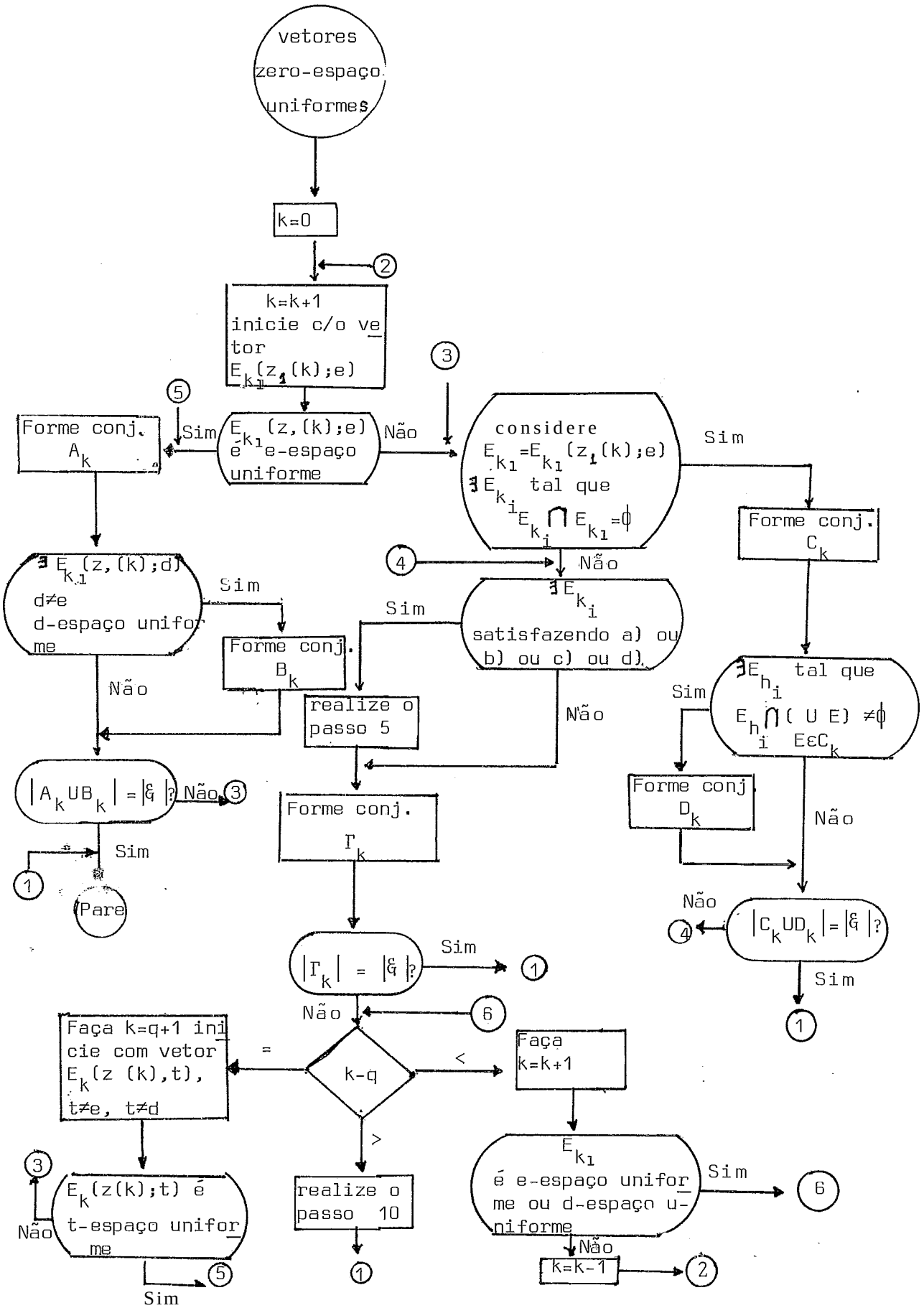
V.4.1 - PRIMEIRO FLUXOGRAMA



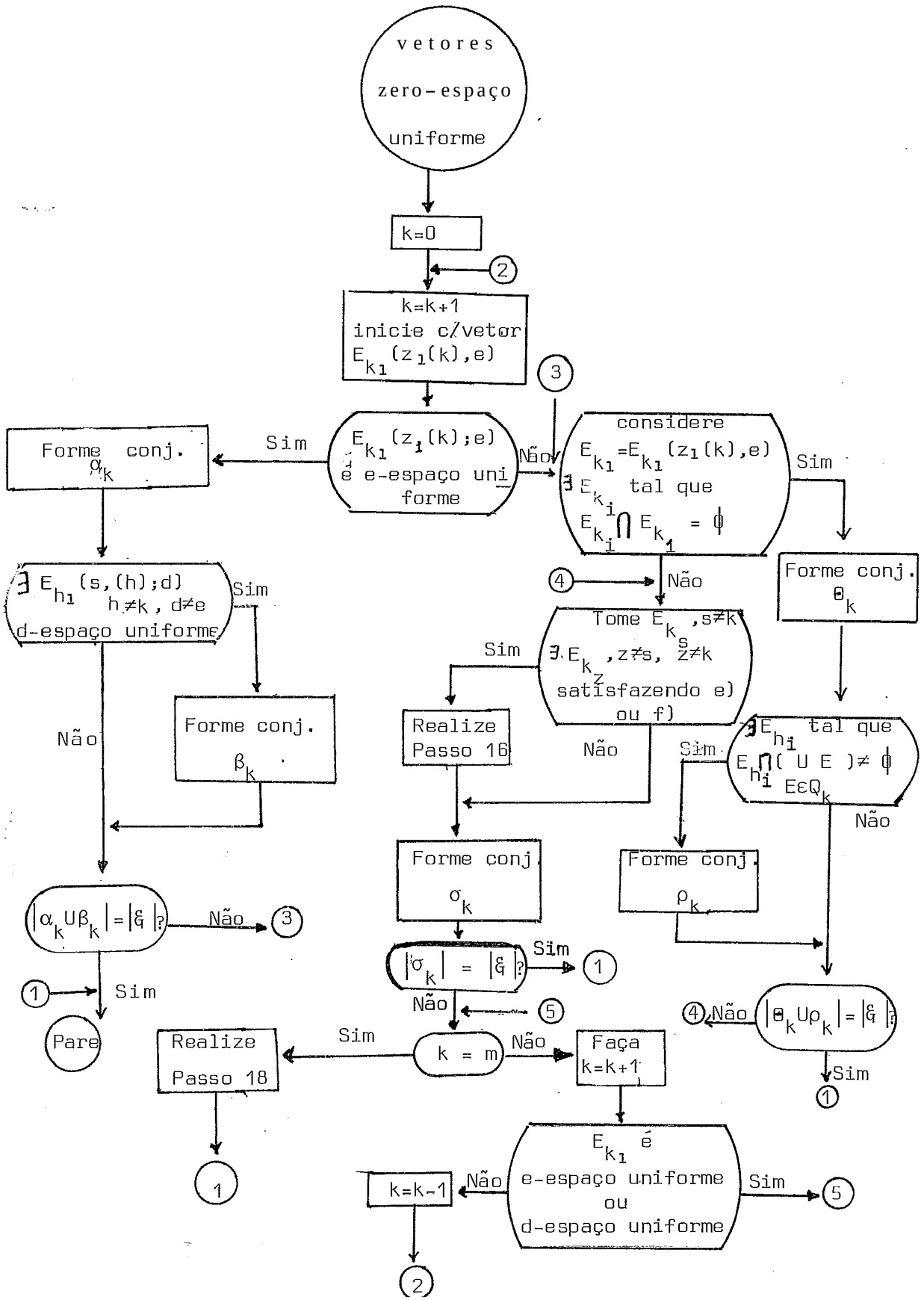
V.4.2 - SEGUNDO FLUXOGRAMA



V.4.3 - TERCEIRO FLUXOGRAMA (Fase 1 do método dos vetores zero-espaço uniformes



V.4.4 - QUARTO FLUXOGRAMA (Fase 2 do método dos vetores zero-espaços uniformes)



V.5 - EXEMPLOS QUE ILUSTRAM OS MÉTODOS

EXEMPLO V.5.1 - O hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$

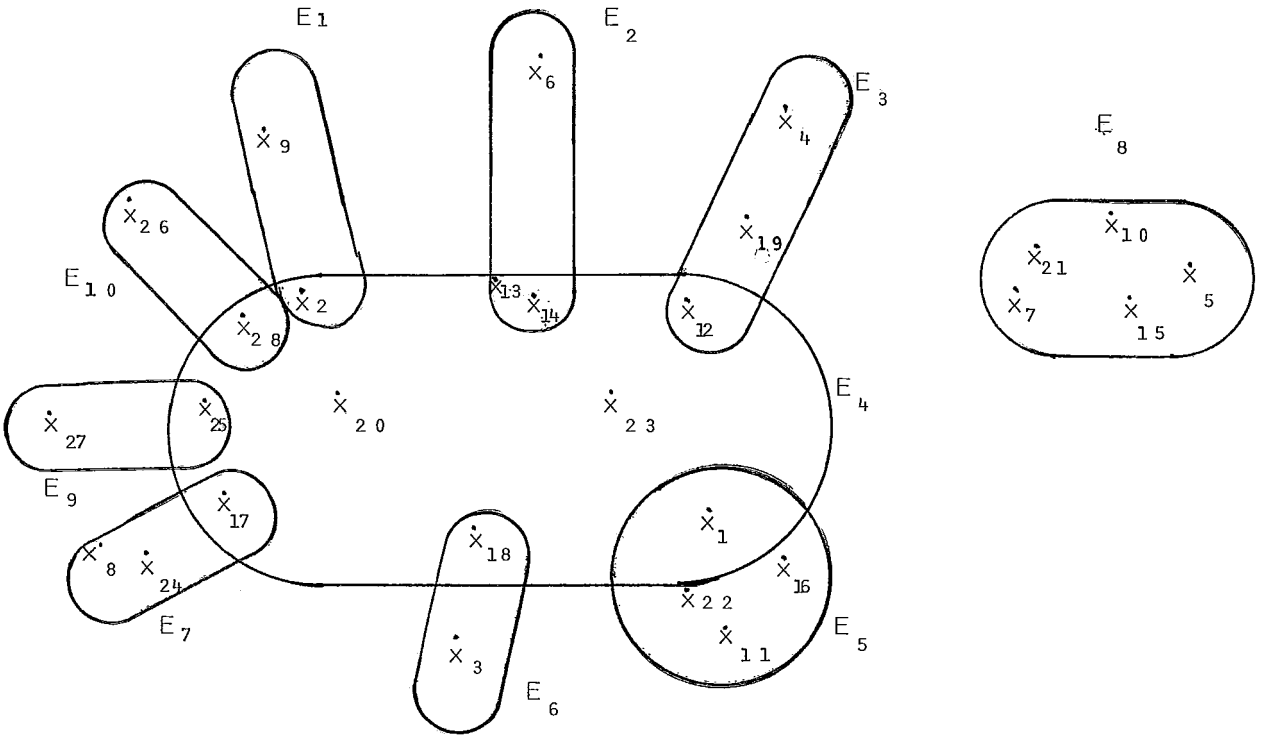


FIG.V.5.1.

A matriz incidência

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}	x_{28}
E_1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
E_5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
E_6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
E_8	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
E_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
E_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

Na obtenção do hipergrafo maximal unimodular, aplicamos o método de matching exponencial e sendo o matching exponential

$$M = \{E_1, E_2, E_3, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9, E_{10}\}$$

e como $|M| = m(H) - 1 = 10 - 1 = 9$, então o hipergrafo é unimodular.

EXEMPLO V.5.2.

O hipergrafo $H = (X, \mathcal{E})$

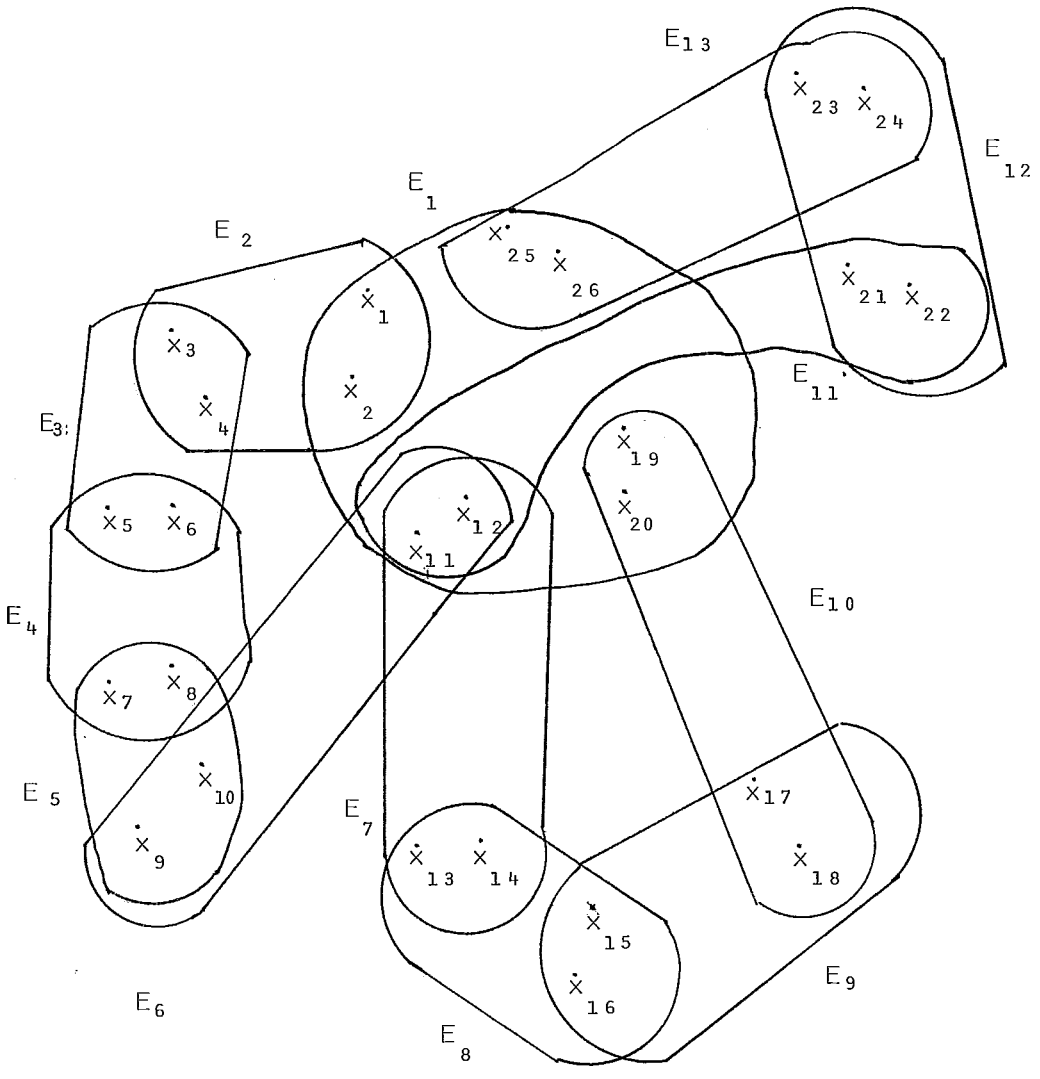


FIG.V.5.2

A matriz incidência

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}
E_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
E_2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_3	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_4	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_5	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
E_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
E_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
E_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
E_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Nós temos

$$|E_k| = \min_{E \varepsilon \mathcal{G}} |E|$$

$$|E_k| = |E_2| = |E_3| = |E_4| = |E_5| = |E_6| = |E_7| = |E_8| = |E_9| = |E_{10}| = |E_{11}| = |E_{12}| = |E_{13}|$$

e sendo $\mathbb{K} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots, q=13\}$

e $\overline{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cup \{q+1\} = \mathbb{K} \cup \{1\}$

onde $q+1$ é o índice do E_k, tal que $|E_k| = \max_{E \varepsilon \mathcal{G}} |E|$

Passo 0. - $k=0 \rightarrow k=k+1$, $E_{k_1} = (z,d) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = E$,

é o-zero e zero-espaço e uniforme,

formemos o conjunto.

$$A_k = \{E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9, E_{10}, E_{12}, E_{13}\}$$

e não existe E_{h_j} tal que seja d-espaço uniformecom $d \neq 0$

Passo 1. - Verificamos

$$|A_k \cup B_k| = |A_k| = 12 \neq |\mathcal{G}|$$

Passo 4. - Considere $E_{k_1} = E_{k_1}(z;e)$ e verifica-se o itém b) realizando o passo 5, conseguimos o conjunto

$$\Gamma_k = \{E_1, E_6, E_7\}$$

Verificamos o passo 7.

$$|\Gamma_k| = 3 \neq |\mathcal{G}|$$

Passo 8. - Para todo $k \varepsilon \mathbb{K}$, os vetores iniciais E_k são e - espaço uniforme, então tomamos como k o índice da aresta tal que $|E_k| = \max_{E \varepsilon \mathcal{G}} |E|$, isto é, $k=q+1$ é a q-ésima iteração.

Com $k=q+1$, realizamos o passo 2, formando o conjunto

$$C_k = \{E_1, E_{12}, E_9, E_5, E_3\}$$

$\exists\, E_{h_j} = E_{13}$ tal que $E_{h_j} \cap (\bigcup_{E \in C_k} E) \neq \emptyset$ e $E_{13} \notin C_k$, formamos o conjunto

$$D_k = \{E_{13}, E_{11}, E_{10}, E_8, E_5, E_3\}$$

Verificamos

$$|C_k \cup D_k| = 11 \neq |\mathcal{G}|$$

Como não se verifica a igualdade, vamos para o passo 4.

Passo 4. - Considerando $E_{k_1} = E_{k_1}(z;e)$ verifica-se o item d)

$$\exists\, E_{k_i} = E_{13},\ |E_{k_i}| = \min_{E \in \mathcal{G}} |E|$$

Formamos o conjunto

$$\Gamma_k = \Gamma_{q+1} = \{E_1, E_{13}, E_{11}, E_{10}, E_8, E_5, E_3\}$$

Verificamos que $|\Gamma_k| \neq |\mathcal{G}|$.

Sendo $k>q$, então realizamos o passo 10.

Passo 10. - Sendo $\Theta_k = A_k \cup B_k$, é o conjunto obtido na k-ésima iteração.

Portanto, o hipergrafo maximal unimodular obtido é

$$H = (X, \Theta_k)$$

EXEMPLO V.5.3

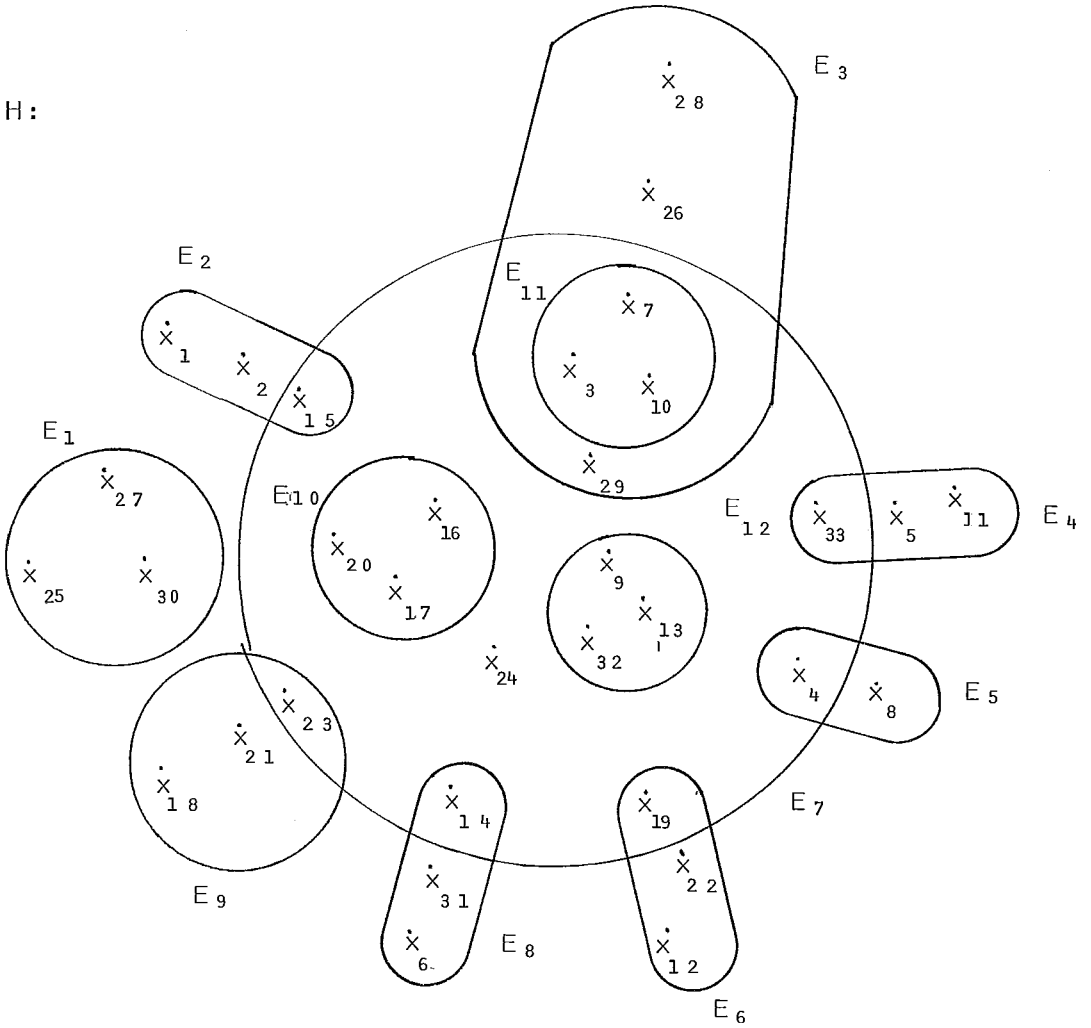


FIG. V.5.3

A matriz de incidência

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{20}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}	X_{26}	X_{27}	X_{28}	X_{29}	X_{30}	X_{31}	X_{32}	X_{33}
E_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
E_2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
E_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
E_5	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_7	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1
E_8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
E_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_{11}	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$H = (X,\mathcal{E})$, $\mathcal{E} = \{E_i / i=1,2,\ldots,12\}$

$$|E_5| = \min_{E\varepsilon\mathcal{E}} |E| \quad e \quad |E_{12}| = \max_{E\varepsilon\mathcal{E}} |E| ,$$

$$|K = \{5\}$$

$$\overline{|K} = |k \cup \{q+1\} = \{5,\ q+1 = 7\}$$

Passo 0. - $k=0$, $k=k+1 \rightarrow E_{k_1}=E_5$ é 4-espaço uniforme

Formamos o conjunto

$$A_5 = A_k = \{E_5\}$$

Passo ▮. - $|A_k|<|\mathcal{E}|$

Passo 2. - Considere $E_{k_1}=E_5$, $E_{k_{\blacksquare}}=E_4$ tal que $E4 \cap E_5=\phi$

Formamos o conjunto

$$C_5 = C_k = \{E_5,E_4,E_2,E_1,E_9,E_8,E_6,E_{10},E_{12}\}$$

$\exists\, E_{h_1}=E_7$ tal que $E_{h_1} \cap (\bigcup_{E\varepsilon C_k} E) \neq \phi$

Formamos o conjunto

$$O_5 = D_k = \{E_7.E_1\}$$

Passo 3. - $|C_k \cup D_k| = 10 \quad |\mathcal{E}|$

Passo 4. - Considere $E_{k_1}=E_5$.

Verifica c), mas não podemos admitir o d), então.

$\exists\, E_{k_i}=E_7$, $\quad E_{k_i} \cap E_{k_1} = E_7 \cap E_5 \neq \phi$ e $E_7 \cap E_5 \neq S$

Passo 5. - Passo 6, Formamos o conjunto

$$\Gamma_5 = \Gamma_k = \{E_5,E_7,E_2,E_1\}$$

Passo 7. - $|\Gamma_k| \neq |\mathcal{G}|$

Passo 8. - k=q=vamos para o passo 9

Passo 9. - $k=q+1=7 \rightarrow E_7$

Passo. 0. - $k=q \rightarrow k=q+1$, o vetor inicial

$E_k = E_7$. 2-zeros e 4-espaços não é uniforme.

Passo 2. - Considere $E_{k_1}=E_7$ e $\exists\, E_{k_i}=E_1$ tal que $E_{k_i} \cap E_{k_1} = \phi$

Forme o conjunto

$$C_k = \{E_7, E_1\}$$

Passo 3. - $|C_k| \neq |\mathcal{G}|$

Passo 4. - Considere $E_{k_1}=E_7$ e verifica-se o item d) pois

$$E_{k_i}=E_5, \quad |E_5| = \min_{E \in \mathcal{G}} |E| \;, \quad |E_5 \cap E_7| \leq |E_7|$$

Passo 5. - $\exists\, E_{k_j}=E_4$ tal que $E_{k_j} \cap E_{k_1}=\phi$,

$\exists\, E_{k_t}=E_3$ tal que $E_3 \cap (E_{k_i} \cup E_{k_j}) = \phi$.

Passo 6. - Forme o conjunto.

$$\Gamma_k = \Gamma_{q+1} = \{E_7, E_5, E_4, E_3, E_2, E_1, E_9, E_8, E_6, E_{10}, E_{12}\} \qquad [4]$$

Passo 7. - $|\Gamma_k| \neq |\mathcal{G}|$

Passo 8. - $k>q$

Passo 10. - Considere todos os conjuntos obtidos em [1], [2], [3] e C41

$$A_5, \; C_5 \cup D_5, \; \Gamma_5 \quad e \quad \Gamma_{q+1} = \Gamma_7$$

$$|\theta_k| = \max_{j=5,q+1=7} \{|\theta_j| / \theta_j = A_j,\ C_j \cup D_j \text{ ou } \Gamma_j\}$$

$$= |\Gamma_7|, \text{ daí}$$

$$\theta_k = \Gamma_7 = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9, E_{10}, E_{12}\}$$

Logo o hipergrafo parcial maximal

$H = (X, \Gamma_7)$ é unimodular.

EXEMPLO V.5.4.

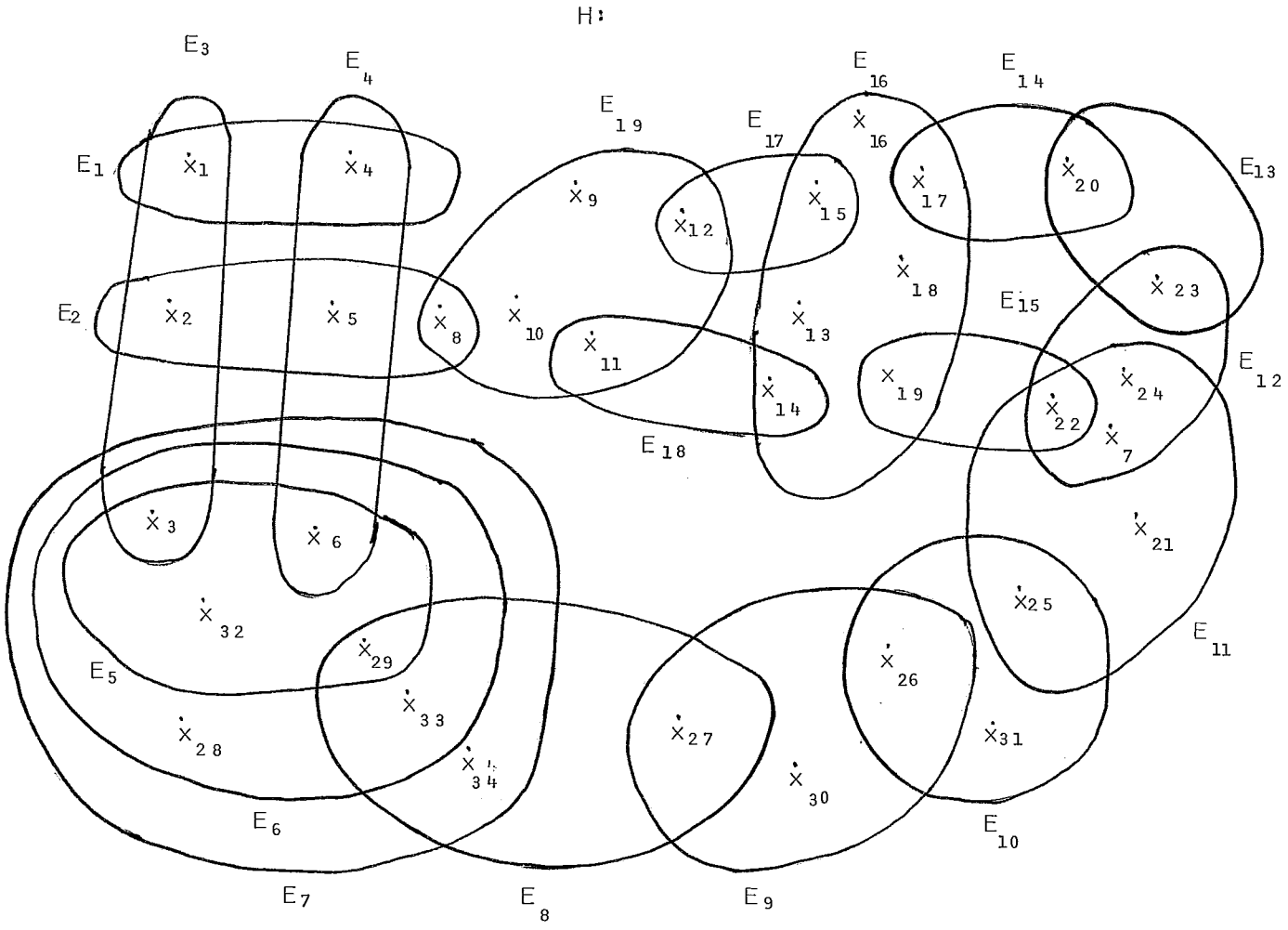


FIG.V.5.4.

O hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$ de ordem $|X|=n(H)=34$ e $|\mathcal{E}|=m(H)=19$, e $|E_7| = \max_{E\in} |E|$ e os vetores que têm menor número de elementos isto é,

$$|E_1| = |E_{13}|=|E_{14}|=|E_{15}|=|E_{17}|=|18| = 2 \text{ , então}$$

$\mathbb{K} = \{1=1, 2=13, 3=14, 4=15, 5=17, 6=18\}$ e sendo

$\overline{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cup \{q+1\} = \mathbb{K} \cup \{7\}$, portanto k percorre sobre $\overline{\mathbb{K}}$

Aplicando a fase 1

Para as k que tomam valores sobre $\mathbb{K}$, , temos conjuntos de menor elemento, com $k=q+1$, voltando para o passo 0 ou melhor para o passo 2, conseguimos o conjunto

$$C_k \cup D_k = \{E_1,E_2,E_3,E_4,E_7,E_9,E_{10},E_{11},E_{13},E_{14},E_{15},E_{16},E_{17},E_{18},E_{19}\}$$

onde

$$C_k = \{E_7,E_1,E_2,E_{17},E_{18},E_{14},E_{15},E_{10}\} \quad e$$

$$D_k = \{E_3,E_4,E_{19},E_{16},E_{13},E_{11},E_9\}$$

O que geram o hipergrafo parcial $H_1=(X,C_k \cup D_k)$ maximal unimodular, que podemos obter do hipergrafo dado H.

EXEMPLO V.5.5.

H:

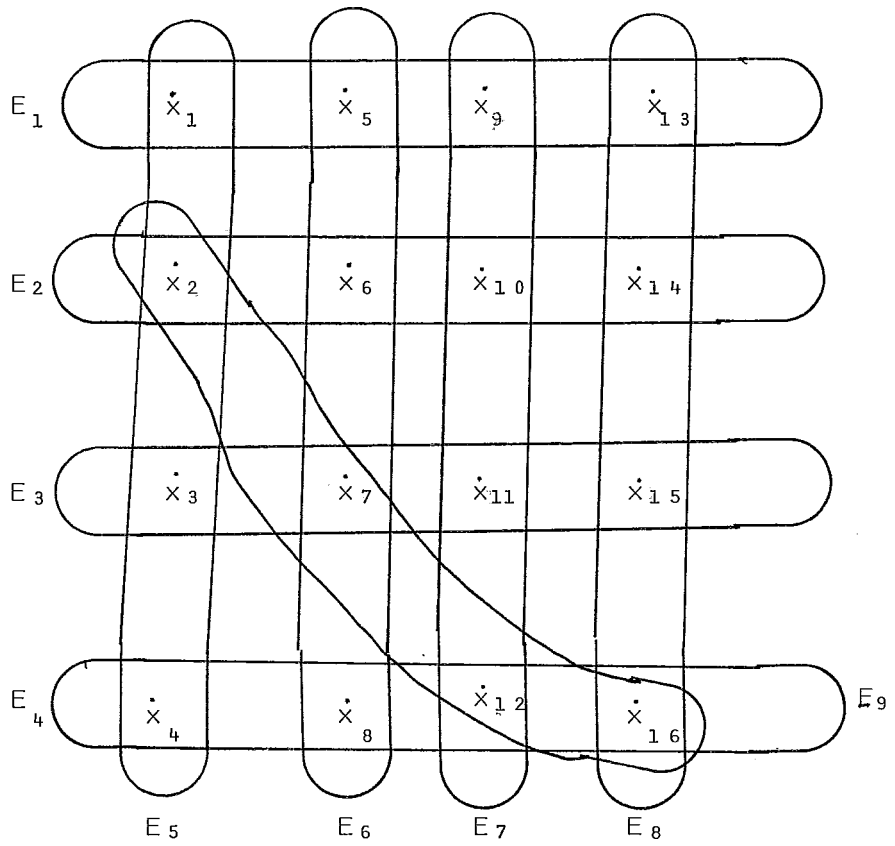


FIG.V.5.5

O hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$ é 4-uniforme, aplicando fase 2.

$k = 0$

Passo 11. - $E_{k_1}=E_5=(1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0)$ é O-zero e 0 -- espa uniforme. Formemos o conjunto

$$\alpha_k = \{E_5, E_6, E_7, E_8\} \qquad [1]$$

$$\exists\, E_{h_1}(s,d)=E_1=(1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0)$$

é O-zero e 3-espaço uniforme.

Formemos o conjunto.

$$\beta_k = \{E_1, E_2, E_3, E_4\} \qquad [2]$$

Passo 12.

$$|\alpha_k \cup \beta_k| \neq |\varepsilon|$$

Passo 13. Considere $E_5 = E_{k_1} = E_{k_1}(z,e)$ e $\exists E_{k_1} = E_6$ tal que

$$E_{k_1} \cap E_5 = \phi$$

Formamos o conjunto

$$\theta_k = \{E_5, E_6, E_7, E_8\}.$$

Vemos que $\exists E_{h_j} = E_9$ tal que $E_{hj} \cap (\bigcup_{E \in \theta_k} E) \neq \phi$. então formamos o conjunto

$$\rho_k = \{E_{h_j} = E_9, E_1\} \qquad [3]$$

Passo 14.- Como $|\theta_k \cup \rho_k| \neq |\varepsilon|$ e vamos para o

Passo 15.- Considere $E_{k_1} = E_5$ e tome como elemento arbitrário

$E_{k_s} = E_9$ e verificamos que $\exists E_{k_z} = E_1$ tal que

$$E_{k_z} \cap E_{k_s} = \phi,$$

e formamos o conjunto

$$\alpha_k = \{E_5, E_9, E_1\} \text{ e verificamos que} \qquad [4]$$

$$|\alpha_k| \neq |\varepsilon|, \text{ e vamos para o}$$

Passo 19.- $k<m$ façamos $k = k+1$, e vemos que o vetor inicial E_k é O-espaço uniforme ou 3-espaço uniforme. A excessão para $k=9$

$k=9 \rightarrow E_9$ não é t-espaço uniforme, onde $t=0$ ou 3

Passo 13. - Considere $E_{k_1}=E_9$ existe $E_{k_i}=E_1$ tal que

$$E_1 \cap E_{k_1} = \phi$$

Forme o conjunto

$$\Theta_k = \{E_9, E_1\} \qquad [5]$$

$\exists E_{h_j}=E_4$ tal que $E_4 \cap (\bigcup_{E \in \Theta_k} E) \neq \phi$

Formemos o conjunto

$$\rho_k = \{E_4, E_3, E_2\} \qquad [6]$$

(pode haver-se formado também $\rho_k = \{E_8, E_7, E_6, E_5\}$)

Passo 14. -

$$|\Theta_k \cup \rho_k| \neq |\mathcal{G}|$$

Passo 15. - Considere $E_{k_1}=E$ tome $E_{k_s}=E_1$. d)

$$e \ \exists \ E_{k_z} = E_4$$

Passo 16. - 17

$$\sigma_k = \{E_4, E_3, E_2\} \qquad [7]$$

Passo 18. - Verifique-se

$$|\sigma_k| \neq |\mathcal{G}|$$

Passo 19. - k=m

Passo 20. - Consideremos os conjuntos

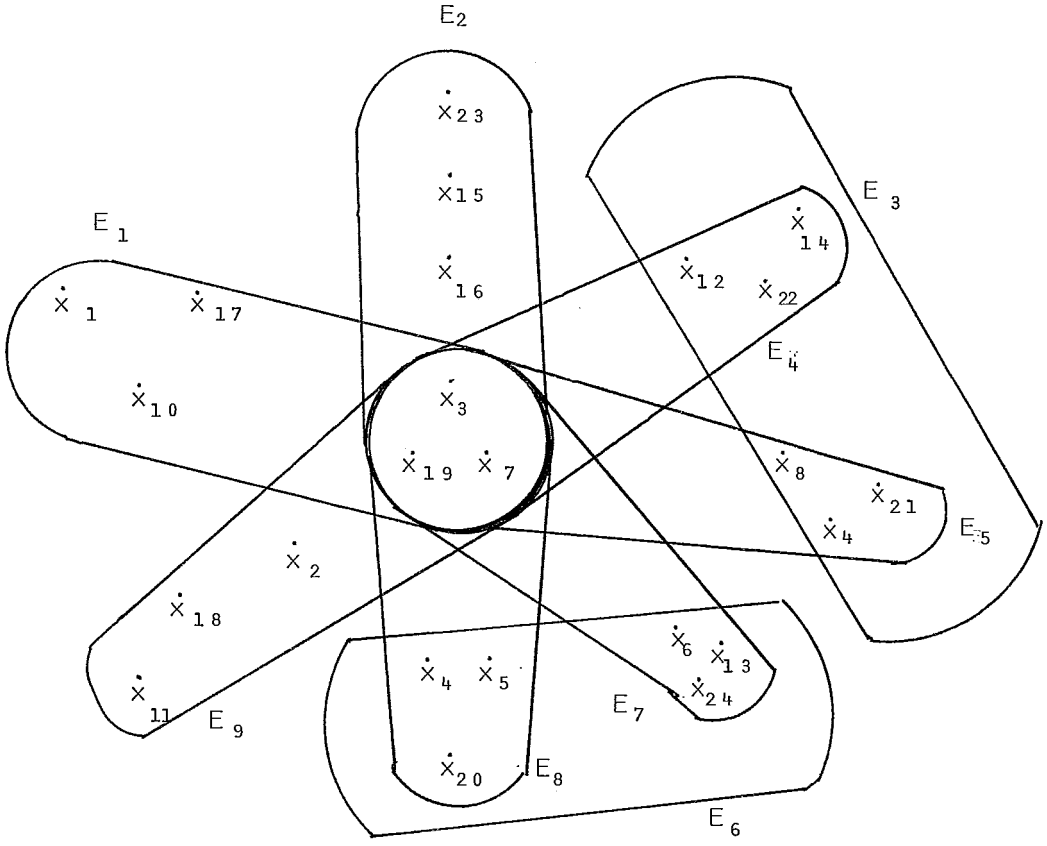
$$\alpha_k \cup \beta_k, \quad \Theta_k \cup \rho_k \quad e \quad \sigma k$$

obtidos em [1]-[2], [3] e [4] na primeira iteração e [5]-[6],[7].

na Última iteração.

Portanto, $G_k = \alpha_k \cup \beta_k = \{E_5, E_6, E_7, E_8, E_2, E_3, E_4\}$.

EXEMPLO V.5.6.



FIG,V.5.6.

O hipergrafo $H=(X,\mathcal{E})$, é 6-uniforme e o conjunto

$$S = \{x \in X / \overline{\delta}_H(x) = r;\ 3 \leq r = \max_{y \in X} \overline{\delta}_H(y)\} = \{x_3, x_7, x_{19}\}$$

Aplicamos a fase 2 do método dos vetores zero-espaço uniformes.

$\mathbb{K} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,

$k=0,\ k=k+1 \rightarrow E_{k_1} = E_1 = \{x_1, x_3, x_7, x_{10}, x_{17}, x_{19}\}$

é um O-zero e 6-espaço que não é uniforme.

Passo 13. - $\exists$ $E_{k_i}=E_6$ tal que $E_{k_i} \cap E_1 = \phi$

o conjunto

$$\Theta_k = \{E_1, E_6, E_3\},$$

$\exists$ $E_{h_1} = E_8$ tal que $E_8 \cap (\bigcup_{E \in \Theta_k} E) \neq \phi$

o conjunto

$$\rho_k = \{E_8\}$$

Passo 14. -

$$|\Theta_k \cup \rho_k| = |\mathcal{G}| \text{ ? não}$$

Passo 15. - Considere $E_{k_i}=E_1$ e tomemos o vetor arbitrário $E_{k_s}=E_5$ e verifica a condição f) e realizamos o passo 16, e temos o conjunto:

$\sigma_k = \{E_1, E_2, E_4, E_5, E_7, E_8, E_9\}$ e verificamos que não é $|\sigma_k| = |\mathcal{G}|$

Passo 17. - $k=1 < m=9$

Como para $k+1$, os vetores iniciais E_{k_1}, não e-espaço uniformes nem d-espaço uniformes, então para $k=1$, chegamos que $k=m$. Portanto, o conjunto obtido nestas k iterações, é conjunto

$$\sigma_k = \{E_1, E_2, E_4, E_5, E_7, E_8, E_9\}$$

obtido na primeira das k iterações. Portanto, o hipergrafo maximal unimodular é

$$H = (X, \sigma_k)$$

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E EXTENSÕES

Neste trabalho estudaram-se:

i) alguns tipos de matrizes totalmente unimodulares,

ii) as (0,1)-matrizes zero-espaço;

iii) o particionamento das (0,1)-matrizes e os hipergrafos seccionáveis,

iv) as condições para que uma (0,1)-matriz k-nuclear seja totalmente unimodular e os hipergrafos k-nucleares;

v) os hipergrafos H com $\bar{\delta}(H)=2$ e

vi) a caracterização do matching maximal usando-se este resultado para obtermos teoremas sobre hipergrafos unimodulares.

Esta teoria nos possibilitou a proposta de dois métodos para a obtenção de um hipergrafo unimodular ou uma matriz parcial totalmente unimodular a partir de um hipergrafo ou de uma matriz:

a) Método do matching exponencial e

b) método dos vetores zero-espaço uniforme.

Apresentamos os fluxogramas e exemplos para o melhor entendimento dos dois métodos.

Nos estudos posteriores deverão ser elaborados outros algoritmos para a obtenção de um hipergrafo parcial unimodular.

Os métodos descritos podem ser estendidas ou modificadas futuramente, para a obtenção de um hipergrafo balanceado a partir de um hipergrafo dado.