Pesquisa em Otimização Inteira e Combinatória: o caso do "Tree-Star Problem"

Abilio Lucena
Linha de Otimização
Programa de Engenharia de Sistemas e Computação
COPPE - UFRJ

Semana PESC, 2016

Roteiro da apresentação

Roteiro da apresentação

(1) O Problema da Árvore Geradora de Custo Mínimo.

(2) Formulação do Tree Star Problem

(3) Brevíssima introdução aos métodos de solução

(4) Resultados computacionais preliminares

(5) Conclusões

(6) Trabalhos futuros

Grafos

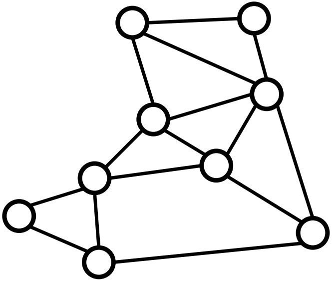
Grafos

Grafo $G = (V, E)$: estrura matemática definida por:

(1) Um conjunto de vértices V: pequenos círculos ($n = |V|$).

(2) Um conjunto arestas E: segmentos de reta conectando pares de círculos ($m = |E|$).

(3) Uma aresta indica a existência de algum tipo de relação entre o par de vértices.



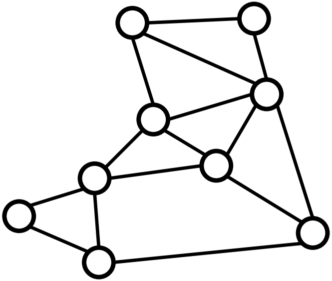
Árvore Geradora

Árvore Geradora

Dado um grafo $G = (V, E)$ com n vértices e m arestas:

(1) Árvore geradora de G: conjunto de $(n-1)$ arestas que não forma ciclos.

(2) $(n-1)$ é o número mínimo de arestas para conectar todos os vértices de G.

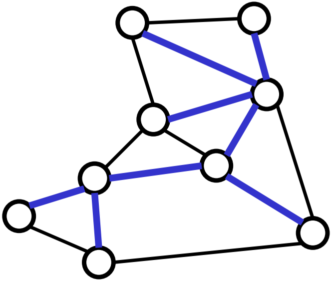


Árvore Geradora

Dado um grafo $G = (V, E)$ com n vértices e m arestas:

(1) Árvore geradora de G: conjunto de $(n-1)$ arestas que não forma ciclos.

(2) $(n-1)$ é o número mínimo de arestas para conectar todos os vértices de G.



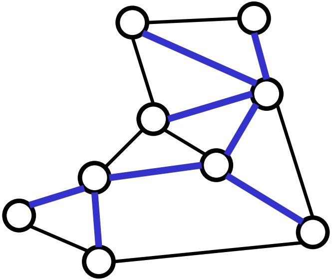
Árvore Geradora de Custo Mínimo

Árvore Geradora de Custo Mínimo

Grafo $G = (V, E)$ com custos $\{w_e : e \in E\}$ nas arestas:

(1) Encontrar uma árvore geradora com o menor custo possível.

(2) É um problema fácil de resolver.



Problema da Árvore Geradora de Custo Mínimo

Problema da Árvore Geradora de Custo Mínimo

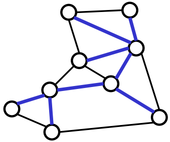
Algoritmo de Kruskal [1956]: algoritmo polinomial.

(1) Ordene as m arestas do grafo por custo (do menor para o maior custo).

(2) Seguindo a ordenação aceite arestas que não formam um ciclo com arestas previamente escolhidas.

(3) Solução ótima obtida em no máximo $m \log m$ operações de comparação, etc, para qualquer grafo conexo

(4) Ao contrário do Problema da Árvore Geradora de Custo Mínimo, *Problemas Difíceis* exigem, no pior caso, um número exponencial de operações para a sua resolução.



O Tree-Star Problem

O Tree-Star Problem

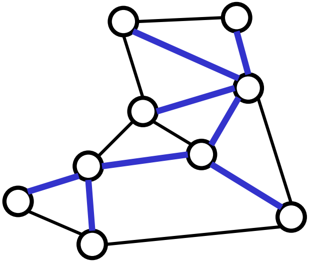
Dependendo de como aparece na árvore:

uma aresta e pode ser precificada de 2 formas.

(1) Se é usada como uma aresta externa: custo c_e.

(2) Se é usada como uma aresta interna: custo d_e.

(3) Vamos chamar de árvore dominante à árvore formada por todas as arestas internas de uma árvore geradora.



O Tree-Star Problem

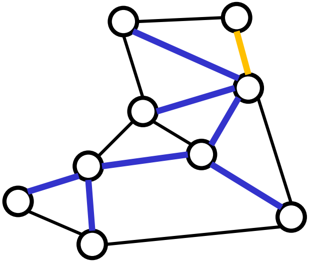
Dependendo de como aparece na árvore:

uma aresta e pode ser precificada de 2 formas.

(1) Se é usada como uma aresta externa: custo c_e.

(2) Se é usada como uma aresta interna: custo d_e.

(3) Vamos chamar de árvore dominante à árvore formada por todas as arestas internas de uma árvore geradora.



O Tree-Star Problem

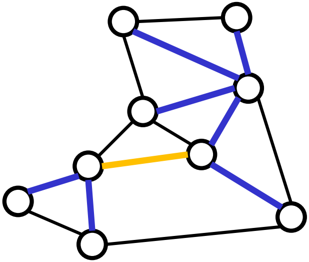
Dependendo de como aparece na árvore:

uma aresta e pode ser precificada de 2 formas.

(1) Se é usada como uma aresta externa: custo c_e.

(2) Se é usada como uma aresta interna: custo d_e.

(3) Vamos chamar de árvore dominante à árvore formada por todas as arestas internas de uma árvore geradora.



O Tree-Star Problem

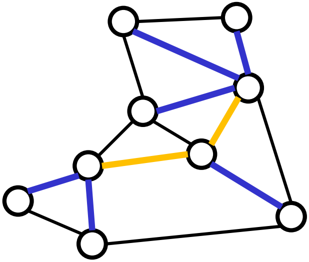
Dependendo de como aparece na árvore:

uma aresta e pode ser precificada de 2 formas.

(1) Se é usada como uma aresta externa: custo c_e.

(2) Se é usada como uma aresta interna: custo d_e.

(3) Vamos chamar de árvore dominante à árvore formada por todas as arestas internas de uma árvore geradora.



O Tree-Star Problem

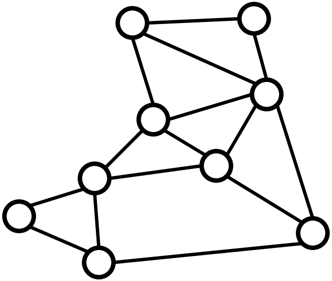
O Tree-Star Problem

Entrada: Grafo não direcionado $G = (V, E)$ com 2 conjuntos distintos de custos para o uso de uma aresta:

(1) $\{c_e : e \in E\}$ para precificar o uso de e como aresta de folha.

(2) $\{d_e : e \in E\}$ para precificar o uso de e como aresta interna.

Saída: árvore geradora de custo mínimo sob os custos $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$.



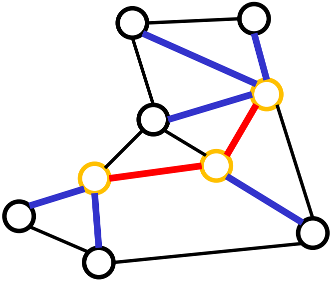
O Tree-Star Problem

Entrada: Grafo não direcionado $G = (V, E)$ com 2 conjuntos distintos de custos para o uso de uma aresta:

(1) $\{c_e : e \in E\}$ para precificar o uso de e como aresta de folha.

(2) $\{d_e : e \in E\}$ para precificar o uso de e como aresta interna.

Saída: árvore geradora de custo mínimo sob os custos $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$.



O Tree-Star Problem

O Tree-Star Problem

Trabalho conjunto com:

Alexandre Salles da Cunha
Doutorado no PESC e Prof. da Universidade Federal de Minas Gerais.

e

Luidi G. Simonetti
Doutorado no PESC e Prof. do PESC.

Trabalhamos numa série de problemas de árvores geradoras generalizadas

Complexidade Computacional

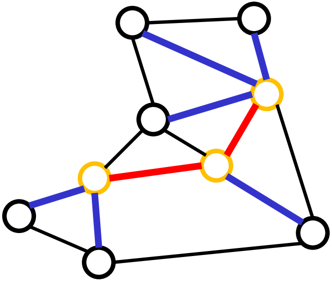
Casos particulares que são NP-difíceis:

(1) Max Leaf Spanning Tree Problem:

$\{c_e = -1 : e \in E\}$ e $\{d_e = 0 : e \in E\}$.

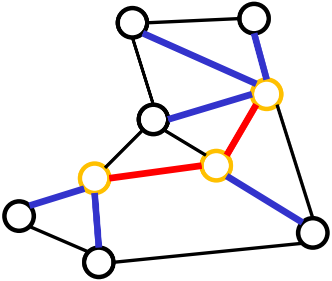
(2) Minimum Connected Dominating Set Problem (Minimum Dominating Tree Problem):

$\{c_e = 0 : e \in E\}$ e $\{d_e = 1 : e \in E\}$.



Aplicações Potenciais: Desenho de Redes

Aplicações Potenciais: Desenho de Redes



Telecomunicações: d_e tipicamente muito maior que c_e.

(1) Árvore dominante: rede backbone.

(2) Arestas de folhas: rede de acesso local.

Formulação

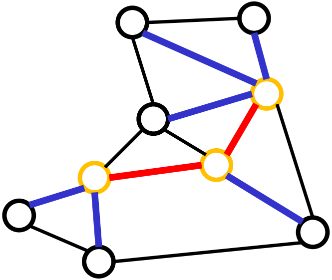
Formulação

Árvore geradora de G: se decompõe em

(1) Árvore dominante da árvore geradora (e de G)

$$+$$

(2) Arestas de folhas:



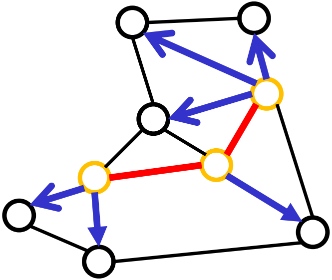
Formulação

Árvore geradora de G: se decompõe em

(1) Árvore dominante da árvore geradora (e de G)

$+$

(2) Arestas de folhas: modelados como arcos de $D = (V, A)$



Formulação

Formulação

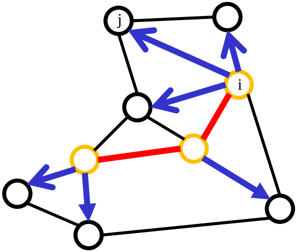
Variáveis envolvidas:

(1) $\{y_i \in \{0,1\} : i \in V\}$: vertices internos.

(2) $\{0 \leq x_e \leq 1 : e \in E\}$: arestas internas.

(3) $\{h_{ij} \in \{0,1\} : (i,j) \in A\}$: arestas de folhas (arcos).

(Se $h_{ij} = 1$, i tem que ser um vértice interno e j uma folha)



Formulação

Formulação

Politopo $\mathcal{R}$:

$$\sum_{e \in E} x_e = \sum_{i \in V} y_i - 1$$

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq \sum_{i \in S \setminus \{j\}} y_i, \quad \forall j \in S, \quad \forall S \subset V$$

$$\sum_{j \in \Gamma[i]} y_j - \sum_{e \in E(\Gamma[i])} x_e \geq 1, \quad \forall i \in V$$

$$y_i + \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} h_{ji} = 1, \quad \forall i \in V$$

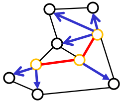
$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e + \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} h_{ij} \geq 2y_i, \quad \forall i \in V$$

$$x_e + h_{ij} \leq y_i, \quad \forall e = \{i,j\} \in E$$

$$x_e \geq 0, \quad \forall e \in E$$

$$0 \leq y_i \leq 1, \quad \forall i \in V$$

$$h_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A$$



Formulação

Politopo $\mathcal{R}$: árvore dominante da árvore geradora (e de G)

$$\sum_{e \in E} x_e = \sum_{i \in V} y_i - 1$$

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq \sum_{i \in S \setminus \{j\}} y_i, \quad \forall j \in S, \quad \forall S \subset V$$

$$\sum_{j \in \Gamma[i]} y_j - \sum_{e \in E(\Gamma[i])} x_e \geq 1, \quad \forall i \in V$$

$$y_i + \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} h_{ji} = 1, \quad \forall i \in V$$

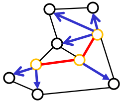
$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e + \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} h_{ij} \geq 2y_i, \quad \forall i \in V$$

$$x_e + h_{ij} \leq y_i, \quad \forall e = \{i,j\} \in E$$

$$x_e \geq 0, \quad \forall e \in E$$

$$0 \leq y_i \leq 1, \quad \forall i \in V$$

$$h_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A$$



Formulação

Politopo $\mathcal{R}$:

$$\sum_{e \in E} x_e = \sum_{i \in V} y_i - 1$$

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq \sum_{i \in S \setminus \{j\}} y_i, \quad \forall j \in S, \quad \forall S \subset V$$

$$\sum_{j \in \Gamma[i]} y_j - \sum_{e \in E(\Gamma[i])} x_e \geq 1, \quad \forall i \in V$$

$$y_i + \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} h_{ji} = 1, \quad \forall i \in V$$

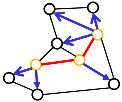
$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e + \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} h_{ij} \geq 2y_i, \quad \forall i \in V$$

$$x_e + h_{ij} \leq y_i, \quad \forall e = \{i,j\} \in E$$

$$x_e \geq 0, \quad \forall e \in E$$

$$0 \leq y_i \leq 1, \quad \forall i \in V$$

$$h_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A$$



Formulação

Politopo $\mathcal{R}$: um vértice ou é folha ou é interno.

$$\sum_{e \in E} x_e = \sum_{i \in V} y_i - 1$$

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq \sum_{i \in S \setminus \{j\}} y_i, \quad \forall j \in S, \quad \forall S \subset V$$

$$\sum_{j \in \Gamma[i]} y_j - \sum_{e \in E(\Gamma[i])} x_e \geq 1, \quad \forall i \in V$$

$$y_i + \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} h_{ji} = 1, \quad \forall i \in V$$

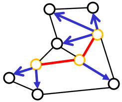
$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e + \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} h_{ij} \geq 2y_i, \quad \forall i \in V$$

$$x_e + h_{ij} \leq y_i, \quad \forall e = \{i,j\} \in E$$

$$x_e \geq 0, \quad \forall e \in E$$

$$0 \leq y_i \leq 1, \quad \forall i \in V$$

$$h_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A$$



Formulação

Politopo $\mathcal{R}$:

$$\sum_{e \in E} x_e = \sum_{i \in V} y_i - 1$$

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq \sum_{i \in S \setminus \{j\}} y_i, \quad \forall j \in S, \quad \forall S \subset V$$

$$\sum_{j \in \Gamma[i]} y_j - \sum_{e \in E(\Gamma[i])} x_e \geq 1, \quad \forall i \in V$$

$$y_i + \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} h_{ji} = 1, \quad \forall i \in V$$

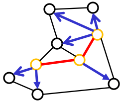
$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e + \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} h_{ij} \geq 2y_i, \quad \forall i \in V$$

$$x_e + h_{ij} \leq y_i, \quad \forall e = \{i, j\} \in E$$

$$x_e \geq 0, \quad \forall e \in E$$

$$0 \leq y_i \leq 1, \quad \forall i \in V$$

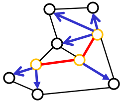
$$h_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A$$



Formulação

Politopo $\mathcal{R}$: vértice interno é incidente a pelo menos 2 outros vértices.

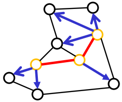
$$
\begin{gathered}
\sum_{e \in E} x_e = \sum_{i \in V} y_i - 1 \\
\sum_{e \in E(S)} x_e \leq \sum_{i \in S \setminus \{j\}} y_i, \quad \forall j \in S, \quad \forall S \subset V \\
\sum_{j \in \Gamma[i]} y_j - \sum_{e \in E(\Gamma[i])} x_e \geq 1, \quad \forall i \in V \\
y_i + \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} h_{ji} = 1, \quad \forall i \in V \\
\sum_{e \in \delta(i)} x_e + \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} h_{ij} \geq 2 y_i, \quad \forall i \in V \\
x_e + h_{ij} \leq y_i, \quad \forall e = \{i,j\} \in E \\
x_e \geq 0, \quad \forall e \in E \\
0 \leq y_i \leq 1, \quad \forall i \in V \\
h_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A
\end{gathered}
$$



Formulação

Politopo $\mathcal{R}$:

$$\sum_{e \in E} x_e = \sum_{i \in V} y_i - 1$$
$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq \sum_{i \in S \setminus \{j\}} y_i, \quad \forall j \in S, \quad \forall S \subset V$$
$$\sum_{j \in \Gamma[i]} y_j - \sum_{e \in E(\Gamma[i])} x_e \geq 1, \quad \forall i \in V$$
$$y_i + \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} h_{ji} = 1, \quad \forall i \in V$$
$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e + \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} h_{ij} \geq 2y_i, \quad \forall i \in V$$
$$x_e + h_{ij} \leq y_i, \quad \forall e = \{i,j\} \in E$$
$$x_e \geq 0, \quad \forall e \in E$$
$$0 \leq y_i \leq 1, \quad \forall i \in V$$
$$h_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A$$



Formulação

Politopo $\mathcal{R}$: uma aresta não pode ser simult. interna e aresta folha.

$$\sum_{e \in E} x_e = \sum_{i \in V} y_i - 1$$

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq \sum_{i \in S \setminus \{j\}} y_i, \quad \forall j \in S, \quad \forall S \subset V$$

$$\sum_{j \in \Gamma[i]} y_j - \sum_{e \in E(\Gamma[i])} x_e \geq 1, \quad \forall i \in V$$

$$y_i + \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} h_{ji} = 1, \quad \forall i \in V$$

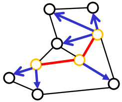
$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e + \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} h_{ij} \geq 2y_i, \quad \forall i \in V$$

$$x_e + h_{ij} \leq y_i, \quad \forall e = \{i,j\} \in E$$

$$x_e \geq 0, \quad \forall e \in E$$

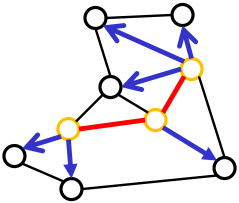
$$0 \leq y_i \leq 1, \quad \forall i \in V$$

$$h_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A$$



Formulação

Formulação



$$\min \left\{\sum_{a\in A} c_a h_a + \sum_{e\in E} d_e x_e : (\mathbf{h}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{R} \cap \left(\mathbb{R}^{|A|}, \mathbb{B}^{|E|+|V|}\right)\right\}$$

Como Resolver a Formulação?

Como Resolver a Formulação?

Dividir e Conquistar

Dividir e Conquistar

Dado: Problema, $\mathcal{P}$, de Programação Inteira: $z = \min\{cx : x \in S\}$.

Estratégia de solução: Enumeração Completa x Enumeração Implícita

(1) Como dividir $\mathcal{P}$ em um conjunto de problemas menores, possivelmente mais fáceis de serem resolvidos?

(2) Como combinar a informação obtida com a solução de cada um dos problemas menores de forma a resolver o problema original?

Dividir e Conquistar

Dado: Problema, $\mathcal{P}$, de Programação Inteira: $z = \min\{cx : x \in S\}$.

Estratégia de solução: Enumeração Completa x Enumeração Implícita

(1) Como dividir $\mathcal{P}$ em um conjunto de problemas menores, possivelmente mais fáceis de serem resolvidos?

(2) Como combinar a informação obtida com a solução de cada um dos problemas menores de forma a resolver o problema original?

Dividir e Conquistar

Dado: Problema, $\mathcal{P}$, de Programação Inteira: $z = \min\{cx : x \in S\}$.

Estratégia de solução: Enumeração Completa x Enumeração Implícita

(1) Como dividir $\mathcal{P}$ em um conjunto de problemas menores, possivelmente mais fáceis de serem resolvidos?

(2) Como combinar a informação obtida com a solução de cada um dos problemas menores de forma a resolver o problema original?

Dividir e Conquistar

Representação gráfica como uma árvore de enumeração:

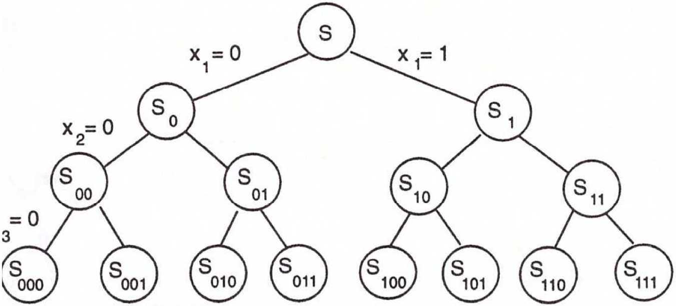


Fig. 7.1 Binary enumeration tree

Testes Computacionais

Testes Computacionais

Custos de arestas gerados como Simonetti, Frota and de Souza [2011]:

(1) Grafos se originam da TSPLIB.

(2) $G = (V, E)$ completo com custos nas arestas $\{w_e \in \mathbb{Z}_+ : e \in E\}$ e $|V|$ variando entre 26 e 318.

(3) $c_e = \lceil (10 - a) * w_e \rceil$ and $d_e = \lceil a * w_e \rceil$, for every $e \in E$ and every $a \in \{3, 7, 9\}$.

(4) $a = 3 \Rightarrow c_e \geq d_e$ and $a \in \{7, 9\} \Rightarrow d_e \geq c_e$, for every $e \in E$.

(5) $a = 5 \Rightarrow c_e = d_e$, for every $e \in E$ (MST of G under **c** or **d**). (Árvore geradora de custo mínimo de G sob **c** ou **d**). (não utilizado).

Resultados Computacionais Preliminares

Resultados Computacionais Preliminares

Tempo de CPU limitado à 2 horas por rodada.

a	opt	gap1	maior $\|V\|$	tempo
3	21	0.26	299	40.4
7	16	1.05	150	503.8
9	5	5.75	70	507.9

Tabela : Formulação não direcionada e sem lifting

a	opt	gap1	maior $\|V\|$	tempo
3	20	0.26	200	235,2
7	22	0.77	318	325,7
9	16	6,77	150	554,7

Tabela : Formulação direcionada com lifting

Conclusões

Um arcabouço para modelar o Tree-Star Problem e

e diversos outros problemas de árvores geradoras restritas.

Trabalho Futuro

(1) Fortalecer as formulações direcionada e não direcionada.

(2) Desenhar e testar heurísticas para o problema.

(2) Refinar as implementatções de nossos algoritmos.