Notas de aula de *Lógica para Ciência da Computação*

Aula 5, 2014/2

Renata de Freitas e *Petrucio Viana*
Departamento de Análise, IME–UFF

9 de setembro de 2014

Sumário

1 Equivalência semântica

Em alguns exemplos da aula anterior, uma mesma sentença foi simbolizada de duas maneiras distintas. Vejamos um outro exemplo desta situação.

Exemplo 1.1 A sentença

caso João a convide, caso Ricardo a convide, Célia vai ao cinema

pode ser simbolizada como

$$((p \vee q) \to r)$$

com a legenda:

p : (João convida Célia)
q : (Ricardo convida Célia)
r : (Célia vai ao cinema)

Mas, se levamos em conta que a sentença quer dizer que se Célia não foi ao cimema, nem João nem Ricardo a convidou, temos outra simbolização:

$$((\neg r) \to ((\neg p) \wedge (\neg q)))$$

Surge, então, a questão de decidir se duas simbolizações distintas expressam o mesmo conteúdo, ou seja, se duas simbolizações diferentes são simbolizações de uma mesma sentença.

Se a sentença considerada é formada a partir de sentenças atômicas por meio de conectivos lógicos, esta questão pode ser resolvida com uso das tabelas de avaliação, mediante os conceitos a seguir.

Definição 1.1 Sejam φ e ψ fórmulas de LC.

Uma *interpretação* para φ e ψ é uma atribuição de valores às variáveis que ocorrem em φ e ψ.

Ou seja, uma interpretação, I, é uma função $I : \mathsf{VS}[\varphi] \cup \mathsf{VS}[\psi] \to \{V, F\}$.

Exemplo 1.2 (a) As fórmulas

$$p \quad , \quad (\neg(\neg p))$$

possuem ocorrências de uma única variável, p. Portanto, elas possuem as duas interpretações, dadas na tabela:

p
V
F

(b) As fórmulas

$$(\neg(p \wedge q)) \quad , \quad ((\neg p) \vee (\neg q))$$

possuem ocorrências de duas variáveis, p e q. Portanto, elas possuem as quatro interpretações, dadas na tabela:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

(c) As fórmulas

$$(p \to (q \to r)) \quad , \quad ((p \to q) \to r)$$

possuem ocorrências de três variáveis, p, q e r. Portanto, elas possuem as oito interpretações, dadas na tabela:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Observe que, para cada interpretação para a variável

$$p$$

as fórmulas

$$p \quad , \quad (\neg(\neg p))$$

assumem os mesmos valores, como vemos ao comparar a primeira e a terceira <u>colunas</u> da tabela:

p	$(\neg p)$	$(\neg(\neg p))$
V	F	V
F	V	F
$\Uparrow$		$\Uparrow$

Analogamente, para cada interpretação para as variáveis

$$p \quad , \quad q$$

as fórmulas

$$(\neg(p \wedge q)) \quad , \quad ((\neg p) \vee (\neg q))$$

assumem os mesmos valores, como vemos ao comparar a quarta e a sétima <u>colunas</u> da tabela:

p	q	$(p \wedge q)$	$(\neg(p \wedge q))$	$(\neg p)$	$(\neg q)$	$((\neg p) \vee (\neg q))$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V
			$\Uparrow$			$\Uparrow$

Definição 1.2 Sejam φ e ψ fórmulas de LC.

Dizemos que φ e ψ são *semanticamente equivalentes* se, em cada interpretação para φ e ψ, os valores de φ e ψ são iguais.

Ou seja, φ e ψ são semanticamente equivalentes quando, para toda interpretação $I : \mathsf{VS}[\varphi] \cup \mathsf{VS}[\psi] \to \{V, F\}$, temos que $I^*[\varphi] = I^*[\psi]$.

Escrevemos "$\alpha \models\!\!\!\dashv \beta$" no lugar de "$\alpha$ e β são semanticamente equivalentes".

O que queremos resolver é o *problema da equivalência*, isto é, o problema de

> dadas duas fórmulas, classificá-los como equivalentes ou não.

A discussão acima nos leva a considerar que podemos usar as tabelas de avaliação, de maneira direta, para resolver este problema.

Exemplo 1.3 (a) A tabela

p	$(\neg p)$	$(\neg(\neg p))$
V	F	V
F	V	F
$\Uparrow$		$\Uparrow$

nos mostra que $p \models\!\!\dashv (\neg(\neg p))$.

Esta equivalência garante que, na prática, não precisamos escrever duas aplicações sucessivas do conectivo $\neg$.

(b) A tabela

p	q	$(p \wedge q)$	$(\neg(p \wedge q))$	$(\neg p)$	$(\neg q)$	$((\neg p) \vee (\neg q))$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V
			$\Uparrow$			$\Uparrow$

nos mostra que $(\neg(p \wedge q)) \models\!\!\dashv ((\neg p) \vee (\neg q))$.

Esta equivalência garante que a negação de uma conjunção pode ser reescrita como uma disjunção.

(c) Vamos agora verificar que as fórmlas

$$(p \to (q \to r)) \qquad \text{e} \qquad ((p \to q) \to r)$$

não são equivalentes. Isto é, que a maneira como agrupamos as fórmulas componentes em aplicações iteradas do conectivo $\to$ é relevante para a determinação do valor da fórmula.

Para mostrar isto, devemos mostrar que

> *não é o caso* que, para cada interpretação para as variáveis p, q e r, os valores de $(p \to (q \to r))$ e $((p \to q) \to r)$ são iguais.

Ou seja, devemos mostrar que

> *para ao menos uma* interpretação para as variáveis p, q e r, os valores de $(p \to (q \to r))$ e $((p \to q) \to r)$ são diferentes.

De fato, comparando a quinta e a sétima colunas da tabela:

p	q	r	$(q \to r)$	$(p \to (q \to r))$	$(p \to q)$	$((p \to q) \to r)$	
V	V	V	V	V	V	V	
V	V	F	F	F	V	F	
V	F	V	V	V	F	V	
V	F	F	V	V	F	V	
F	V	V	V	V	V	V	
F	V	F	F	V	V	F	$\Leftarrow$
F	F	V	V	V	V	V	
F	F	F	V	V	V	F	
				$\Uparrow$		$\Uparrow$	

observamos que na sexta linha (descontando a linha de referência),

– quando p é F, q é V e r é F, a fórmula $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$ é V e a fórmula $((p \rightarrow q) \rightarrow r)$ é F.

Como os valores de

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \qquad \text{e} \qquad ((p \rightarrow q) \rightarrow r)$$

são diferentes para pelo menos uma interpretação, estas fórmulas não são equivalentes.

O método que usamos para resolver o problema da equivalência de fórmulas de LC, essencialmente, em construir uma tabela conjunta para as fórmulas e comparar as duas colunas da tabela que estão rotuladas com as fórmulas. Este método pode ser resumido do seguinte modo:

Método das Tabelas para Equivaência:

Sejam φ e ψ fórmulas nas quais ocorrem (exatamente) as variáveis $p_1, \ldots, p_m$. A verificação da equivalência de φ e ψ pode ser feita mediante a execução dos seguintes passos:

1. Em uma *linha de referência*, escrevemos as variáveis $p_1, \ldots, p_m$.
2. Abaixo da linha de referência, escrevemos, como usual, todas as interpretações para $p_1, \ldots, p_m$.
3. Utilizando as tabelas de avaliação dos conectivos, calculamos gradativamente todos os valores de cada fórmula utilizada na formação de φ, até obter o valor de φ.
4. Utilizando as tabelas de avaliação dos conectivos, calculamos gradativamente todos os valores de cada fórmula utilizada na formação de ψ que ainda não foram avaliados, até obter o valor de ψ.
5. Comparamos a coluna rotulada com φ com a coluna rotulada com ψ. Se elas são iguais, φ e ψ são equivalentes. Caso contrário, não são.

Você pode se divertir, aplicando o Método das Tabelas para confirmar as equivalências abaixo:

Exemplo 1.4 (a) $((p \vee q) \rightarrow r) \models\!\!\!\!\!\!=\!\!| \; ((\neg r) \rightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q)))$

(b) $((p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q))) \models\!\!\!\!\!\!=\!\!| \; ((p \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge q))$

(c) $((p \vee (\neg q)) \wedge ((\neg p) \vee q)) \models\!\!\!\!\!\!=\!\!| \; (\neg(p \leftrightarrow q))$

A proposição a seguir relaciona os conceitos de biimplicação e equivalência semântica.

Proposição 1.1 *Se φ e ψ são fórmulas de LC, então as seguintes condições são equivalentes:*

1. $\varphi \models\mid \psi$

2. $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ *é* V *em todas as interpretações.*

Ou seja, duas fórmulas φ *e* ψ *são equivalentes se, e somente se, a biimplicação* $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ *é uma* V *em todas as interpretações.*

Prova. Sejam φ e ψ fórmulas de LC.
($\Longrightarrow$) Suponhamos que $\varphi \models\mid \psi$.

Daí, para cada interpretação para φ e ψ, as fórmulas φ e ψ assumem o mesmo valor.

Construindo a tabela de $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, temos então que, em cada linha, φ e ψ têm valores iguais.

Assim, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ assume o valor V em todas as linhas da tabela.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é V em todas as interpretações.

Daí, na última coluna da tabela de avaliação de $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ocorre somente a letra V.

Assim, em cada linha, os valores de φ e ψ são iguais.

Como cada linha da tabela inicia com uma interpretação para φ e ψ, as fórmulas φ e ψ assumem o mesmo valor em cada interpretação, ou seja, $\varphi \models\mid \psi$. ■

2 Principais equivalências semânticas

Apresentamos a seguir os principais exemplos de equivalências semânticas. Para se familiarizar com cada um deles, sugerimos que, para cada item, você aplique a proposição acima e construa a tabela de avaliação que verifica a equivalência.

1. $((\neg(\neg p)) \models\mid p$
2. $(p \wedge q) \models\mid (q \wedge p)$
3. $(p \vee q) \models\mid (q \vee p)$
4. $((p \wedge q) \wedge r) \models\mid (p \wedge (q \wedge r))$
5. $((p \vee q) \vee r) \models\mid (p \vee (q \vee r))$
6. $((p \wedge q) \vee r) \models\mid ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
7. $((p \vee q) \wedge r) \models\mid ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
8. $(\neg(p \wedge q)) \models\mid ((\neg p) \vee (\neg q))$
9. $(\neg(p \vee q)) \models\mid ((\neg p) \wedge (\neg q))$
10. $(p \wedge p) \models\mid p$
11. $(p \vee p) \models\mid p$

12. $(p \vee (p \wedge q)) \mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv} p$

13. $(p \wedge (p \vee q)) \mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv} p$