Lógica dos quantificadores: demonstrações com *existe*

Renata de Freitas *e* Petrucio Viana

IME, UFF

18 de junho de 2015

Sumário

Parte 1

Introdução do $\vee$

Exemplo 1

Considere o seguinte argumento:

$$\begin{array}{l} s \wedge q \\ t \rightarrow \neg q \\ \neg t \rightarrow r \\ \hline r \vee \neg s \end{array}$$

Este argumento é válido?

Exemplo 1

A resposta é SIM.

Uma demonstração da validade deste argumento é a seguinte:

Demonstração:

P	1.	$s \wedge q$
P	2.	$t \rightarrow \neg q$
P	3.	$\neg t \rightarrow r$
1	4.	q
2, 4	5.	$\neg t$
3, 5	6.	r
6	7.	$r \vee \neg s$ ■

Introdução do $\vee$

Quais passos lógicos/regras de inferência foram usados na demonstração acima?

Com certeza, usamos:

$$\vee\text{-Ia} \quad \frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$$

Que tem um análogo imediato:

$$\vee\text{-Ib} \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$$

Introdução do $\vee$

Estas regras são chamadas Regras de Introdução do $\vee$.

Por intermédio delas, obtemos
(1) uma disjunção a partir de uma das suas componentes;
(2) fórmulas que possuem uma ocorrência a mais do $\vee$.

Parte 2

Introdução do $\exists$

Introdução do $\exists$

Como vimos, o $\exists$ pode ser interpretado como um $\vee$ generalizado.

É de se esperar, então, que nas demonstrações que envolvem o $\exists$ possamos utilizar uma regra análoga à Regra de Introdução do $\exists$.

Mas, como seria esta regra de eliminação do $\exists$?

Exemplo 2

Considere o seguinte argumento:

Todo gato tem só uma vida.
Petrúcio é um gato mas Neymar não é.
Sendo assim, *alguém tem só uma vida e alguém não é um gato.*

Antes de prosseguir, simbolize o argumento, de acordo com a seguinte legenda:

$$\begin{array}{lcl} G(\_\_) & : & \_\_ \textit{ é gato} \\ V(\_\_) & : & \_\_ \textit{ tem só uma vida} \\ p & : & \textit{Petrúcio} \\ n & : & \textit{Neymar} \end{array}$$

Exemplo 2

Uma simbolização para este argumento é a seguinte:

$$\begin{array}{l} \forall x[G(x) \rightarrow V(x)] \\ G(p) \land \neg G(n) \\ \hline \exists x[V(x)] \land \exists y[\neg G(y)] \end{array}$$

Se você não chegou a esta simbolização, deve ter chegado a uma constituída de fórmulas equivalentes.

Este argumento é válido?

Exemplo 2

A resposta é SIM.

Uma demonstração da validade deste argumento é a seguinte:

Demonstração:

P	1.	$\forall x[G(x) \to V(x)]$
P	2.	$G(p) \wedge \neg G(n)$
1	3.	$G(p) \to V(p)$
2	4.	$G(p)$
3, 4	5.	$V(p)$
5	6.	$\exists x[V(x)]$
2	7.	$\neg G(n)$
7	8.	$\exists y[\neg G(y)]$ $\blacksquare$

Introdução do $\exists$

Quais passos lógicos/regras de inferência foram usados na demonstração acima?

Com certeza, usamos:

> *A partir de uma fórmula que garante que um certo objeto possui uma propriedade, podemos obter a fórmula existencializada, que garante que existe um objeto que satisfaz a propriedade.*

Introdução do $\exists$

Ou seja, sendo $v \in \text{VI}$, $t \in \text{VI} \cup \text{CI}$ e $\varphi(t) \in \text{FLQ}$, temos:

$$\exists\text{-I} \quad \frac{\varphi}{\exists v \varphi_t^v}$$

Esta regra é chamada Regra de Introdução do $\exists$.

Por intermédio dela, obtemos
(1) uma "disjunção generalizada" a partir de uma das suas "componentes";
(2) uma fórmula que possui uma ocorrência a mais do $\exists$.

Exemplo 3

Faça uma demonstração da validade do seguinte argumento:

$$\begin{array}{l}
\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(Q(y) \rightarrow \neg R(x,y))) \\
\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(\neg S(x) \rightarrow Q(y))) \\
P(b) \\
\hline
\exists x(P(x) \wedge \forall y(R(x,y) \rightarrow S(x)))
\end{array}$$

Parte 3

Eliminação do $\vee$

Exemplo 3

Considere o seguinte argumento:

$$
\begin{array}{l}
(a \to b) \wedge (c \to \neg d) \\
(e \to \neg b) \wedge (\neg f \to d) \\
(\neg e \vee f) \to g \\
\neg b \to d \\
a \vee c \\
\hline
b \wedge g
\end{array}
$$

Este argumento é válido?

Exemplo 3

A resposta é SIM.

Tentando elaborar uma demonstração da validade deste argumento, muito provavelmente vamos sentir necessidade de obter alguma informação a partir da disjunção $a \vee c$.

Um problema é que, mesmo se assumimos que uma disjunção $\varphi \vee \psi$ é V, não podemos obter nenhum dos dois componentes, φ ou ψ, pois não podemos determinar qual dos dois é V.

Exemplo 3

Uma ideia é aplicar a seguinte estratégia de prova:

$$\text{Se} \quad \frac{\Sigma}{\varphi \vee \psi}, \quad \frac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \varphi\end{array}}{\theta} \quad \text{e} \quad \frac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \psi\end{array}}{\theta}, \quad \text{então} \quad \frac{\Sigma}{\theta}.$$

Ou seja, se temos uma disjunção $\varphi \vee \psi$ e cada componente, φ e ψ, nos leva a θ, então podemos concluir θ.

Vejamos como isto funciona. . .

Exemplo 3

Uma demonstração da validade deste argumento é a seguinte:

Demonstração:

P	1.	$(a \to b) \wedge (c \to \neg d)$
P	2.	$(e \to \neg b) \wedge (\neg f \to d)$
P	3.	$(\neg e \vee f) \to g$
P	4.	$\neg b \to d$
P	5.	$a \vee c$
P	6.	a
1	7.	$a \to b$
6, 7	8.	b
2	9.	$e \to \neg b$
8, 9	10.	$\neg e$
10	11.	$\neg e \vee f$
3, 11	12.	g
8, 12	13.	$b \wedge g$

A demonstração continua. . .

Exemplo 3

Continuação. . .

P	14.	c
1	15.	$c \to \neg d$
14, 15	16.	$\neg d$
4, 16	17.	b
2	18.	$\neg f \to d$
16, 18	19.	f
19	20.	$\neg e \vee f$
3, 20	21.	g
17, 21	22.	$b \wedge g$ $\blacksquare$

Eliminação do $\vee$

Quais passos lógicos/regras de inferência foram usados na demonstração acima?

Uma delas foi a estratégia de prova que enunciamos antes da demonstração.

Esta estratégia é chamada Regra de Eliminação do $\vee$.

Por intermédio dela, obtemos
(1) uma fórmula a partir de uma disjunção;
(2) fórmulas que (no melhor dos casos) não possuem ocorrências do $\vee$.

Eliminação do $\exists$

Eliminação do $\exists$

Como vimos, o $\exists$ pode ser interpretado como um $\vee$ generalizado.

É de se esperar, então, que nas demonstrações que envolvem o $\exists$ possamos utilizar uma regra análoga à Regra de Eliminação do $\vee$.

Mas, como seria esta regra de eliminação do $\exists$?

Exemplo 4

Considere o seguinte argumento:

> *Todos os animais racionais são carnívoros.*
> *Existem animais racionais que são vegetarianos.*
> Daí, *existem animais que são vegetarianos e carnívoros.*

Antes de prosseguir, simbolize o argumento, de acordo com a seguinte legenda:

$$\begin{array}{lcl} A(\_\_) & : & \_\_ \; \textit{é animal} \\ R(\_\_) & : & \_\_ \; \textit{é racional} \\ C(\_\_) & : & \_\_ \; \textit{é carnívoro} \\ V(\_\_) & : & \_\_ \; \textit{é vegetariano} \end{array}$$

Exemplo 4

Uma simbolização para este argumento é a seguinte:

$$\begin{array}{c} \forall x[(A(x) \land R(x)) \to C(x)] \\ \exists x[(A(x) \land R(x)) \land V(x)] \\ \hline \exists x[(A(x) \land V(x)) \land C(x)] \end{array}$$

Se você não chegou a esta simbolização, deve ter chegado a uma constituída de fórmulas equivalentes.

Este argumento é válido?

Exemplo 4

A resposta é SIM.

Tentando elaborar uma demonstração da validade deste argumento, muito provavelmente vamos sentir necessidade de obter alguma informação a partir da existencialização $\exists x[(A(x) \wedge R(x)) \wedge V(x)]$.

Um problema é que, quando assumimos que uma existencialização $\exists v \varphi(v)$ é V, assumimos que a fórmula existencializada $\varphi(v)$ é V para algum objeto do domínio de quantificação, mas não podemos determinar exatamente para qual objeto $\varphi(v)$ é V.

Exemplo 4

Ou seja, quando uma 'disjunção generalizada' é V, um de seus componentes é V, mas não sabemos exatamente qual.

Uma ideia é aplicar a seguinte estratégia de prova, que generaliza a eliminação do $\vee$:

$$\text{Se} \quad \frac{\Sigma}{\exists v \varphi} \quad \text{e} \quad \frac{\begin{matrix}\Sigma \\ \varphi_v^c\end{matrix}}{\theta}, \quad \text{então} \quad \frac{\Sigma}{\theta}.$$

Ou seja, se temos uma 'disjunção generalizada' $\exists v \varphi$ e um 'componente genérico', φ_v^c, nos leva a θ, então podemos concluir θ.

Vejamos como isto funciona ...

Exemplo 4

Uma demonstração da validade deste argumento é a seguinte:

Demonstração:

P	1.	$\forall x((A(x) \wedge R(x)) \rightarrow C(x))$
P	2.	$\exists x((A(x) \wedge R(x)) \wedge V(x))$
P	3.	$(A(a) \wedge R(a)) \wedge V(a)$
1	4.	$(A(a) \wedge R(a)) \rightarrow C(a)$
3	5.	$A(a) \wedge R(a)$
5	6.	$A(a)$
4, 5	7.	$C(a)$
3	8.	$V(a)$
6, 8	9.	$A(a) \wedge V(a)$
7, 9	10.	$(A(a) \wedge V(a)) \wedge C(a)$
10	11.	$\exists x((A(x) \wedge V(x)) \wedge C(x))$ ■

Observe que as premissas não afirmam nenhuma particularidade sobre a constante a, ou seja, a é genérica.

Eliminação do $\exists$

Quais passos lógicos/regras de inferência foram usados na demonstração acima?

Uma delas pode ser formulada do seguinte modo:

> *Se (1) temos uma existencialização, (2) supomos a fórmula existencializada para um elemento sobre o qual não fazemos nenhuma suposição adicional, (3) a partir daí, obtemos uma informação que não se refere ao elemento usado na suposição; então (4) podemos concluir a informação obtida diretamente da existencialização.*

Eliminação do $\exists$

Ou seja, sendo $v \in \text{VI}$, $c \in \text{CI}$ e $\varphi(v) \in \text{FLQ}$, temos:

$$\text{R7} \qquad \text{Se } \frac{\Sigma}{\exists v \varphi} \quad \text{e} \quad \frac{\begin{matrix}\Sigma \\ \varphi_v^c\end{matrix}}{\theta}, \quad \text{então} \quad \frac{\Sigma}{\theta},$$

onde c é genérica, ou seja, não ocorre nas premissas nem na conclusão.

Eliminação do $\exists$

Esta regra é chamada Regra de Eliminação do $\exists$.

Por intermédio dela, obtemos
(1) uma fórmula a partir de uma "conjunção generalizada";
(2) uma fórmula que (no melhor dos casos) não possui ocorrências do $\exists$.

Exemplo 5

Considere o seguinte argumento:

> *Existe um professor que não passa nenhum aluno.*
> *Todo professor passa todos os puxa-sacos.*
> Assim, *nenhum aluno é puxa-saco.*

Antes de prosseguir, simbolize o argumento, de acordo com a seguinte legenda:

$P(\_\_)$	:	$\_\_$ *é professor*
$Q(\_\_\,,\,\_\_)$	:	$\_\_$ *passa* $\_\_$
$R(\_\_)$	:	$\_\_$ *é aluno*
$S(\_\_)$	:	$\_\_$ *é puxa-saco*

Exemplo 5

Uma simbolização para este argumento é a seguinte:

$$\begin{array}{l} \exists x(P(x) \wedge \forall y(R(y) \to \neg Q(x,y))) \\ \forall x(P(x) \to \forall y(S(y) \to Q(x,y))) \\ \hline \forall x(R(x) \to \neg S(x)) \end{array}$$

Se você não chegou a esta simbolização, deve ter chegado a uma constituída de fórmulas equivalentes.

Este argumento é válido?

Antes de prosseguir, tente realmente determinar se o argumento é válido ou não.

Exemplo 5

A resposta é SIM.

Uma demonstração da validade deste argumento é a seguinte:

Demonstração:

P	1.	$\exists x(P(x) \wedge \forall y(R(y) \to \neg Q(x,y)))$
P	2.	$\forall x(P(x) \to \forall y(S(y) \to Q(x,y)))$
P	3.	$P(a) \wedge \forall y(R(y) \to \neg Q(a,y))$
P	4.	$R(b)$
P	5.	$S(b)$
3	6.	$\forall y(R(y) \to \neg Q(a,y))$
6	7.	$R(b) \to \neg Q(a,b)$
4, 7	8.	$\neg Q(a,b)$
2	9.	$P(a) \to \forall y(S(y) \to Q(a,y))$
3	10.	$P(a)$
9, 10	11.	$\forall y(S(y) \to Q(a,y))$
11	12.	$S(b) \to Q(a,b)$
5, 12	13.	$Q(a,b)$
8, 13	14.	$Q(a,b) \wedge \neg Q(a,b)$
5–14	15.	$\neg S(b)$
4–15	16.	$R(b) \to \neg S(b)$
16	17.	$\forall x(R(x) \to \neg S(x))$ ■

Parte 5

Exercícios

Exercício 1

Construir demonstrações para os seguintes argumentos:

(i)
$$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \to \forall y(\neg Q(y) \to R(x,y))) \\ \forall x(P(x) \to \exists y(S(y) \land \neg R(x,y))) \\ \hline \exists x P(x) \to \exists y(S(y) \land Q(y)) \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{l} \forall x(A(x) \to C(x)) \\ \forall x(B(x) \to D(x)) \\ \exists x(A(x) \land B(x)) \\ \hline \exists x(C(x) \land D(x)) \end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{l} \forall x(A(x) \wedge B(x) \to C(x)) \\ \exists x(B(x) \wedge \neg C(x)) \\ \hline \exists x \neg A(x) \end{array}$$

(iv)
$$\begin{array}{l} \exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \wedge Q(y,a) \to R(x,y))) \\ \exists x(P(x) \wedge Q(x,a)) \\ \hline \exists x \exists y(P(x) \wedge P(y) \wedge R(x,y)) \end{array}$$

Mais exercícios

1. Ler o texto da Aula 21.

2. Resolver os exercícios da Lista 21.