PRINCÍPIOS E TÉCNICAS BÁSICAS EM COMBINATÓRIA

NOTAÇÕES

INTEIRO $n \in \mathbb{N}^{\nearrow 0\,?}$, $m \in \mathbb{N}$

$$[n] = \{1, \ldots, n\} \qquad [m, n] = \{m, \ldots, n\} = [n] \setminus [m-1]$$

OBS: $|[n]| = n \qquad |[m, n]| = n - (m-1) = n - m + 1$

DADO CONJUNTO V , $k \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{V}{k} = \{V' \subseteq V : |V'| = k\}$$

$$\left|\binom{V}{k}\right| = \binom{|V|}{k}$$

Partição

Ex: $\{1, 2, 3, \dots, 27\}$

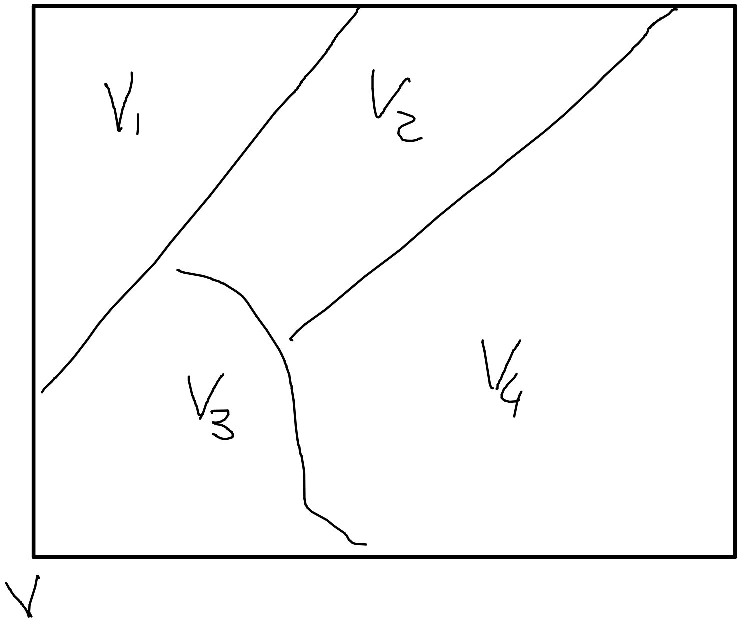
$$\mathcal{F} = \{\underbrace{\{1, \dots, 5\}}_{A}, \underbrace{\{6, 9\}}_{B}, \underbrace{\{27\}}_{C}, \underbrace{V \setminus (A \cup B \cup C)}_{D}\}$$

Partes

Uma partição de um conjunto V é uma família $\mathcal{F} = \{V_1, \dots, V_k\}$ de subconjuntos de V t.q. cada elto de V está contido em exatamente um elto de $\mathcal{F}$.

⇝ Coloração dos elts de V

↳ uma função $C : V \longrightarrow \underbrace{[k]}_{\text{cores}}$



PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS (PCP)

→ Se há $n+1$ pombos e n casas,
então há uma casa com pelo menos dois pombos.

→ Dados inteiros n, k, em toda partição $V_1, \dots, V_k$ de $[n]$
há uma parte com pelo menos $\underbrace{\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil}_{\substack{\text{menor inteiro}\\ \text{que é maior ou}\\ \text{igual a } n/k}}$ elts

$\lfloor n/k \rfloor$

Um conjunto $A \subseteq [n]$ é livre de soma se $\underset{\text{para todos}}{\forall}$ $x, y \in A$, temos $x+y \notin A$.

Alternativamente: $\forall x, y, z \in A$, temos $x+y \neq z$

Ex: Números ímpares

$\{1, 2\}$

Quantos ímpares eu tenho em $[n]$? $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

Ex: $A = \{1, 3, \overset{n'}{7}\}$

$B = \{6, 4\}$

- Qual é o maior tamanho possível p/ A?

Ex: Se $A \subseteq [n]$ é livre de soma então $|A| \leq \lceil n/2 \rceil$

Prova: Vamos provar que se $|A| > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, então A não é livre de soma

Seja $n' = \text{Max } A \leq n$

Defina $B = \{n' - a : a \in A\}$. Note que $|B| = |A| > \frac{n}{2} \geq \frac{n'}{2}$

Logo, $\underbrace{|B|}_{\text{Vermelhas}} + \underbrace{|A|}_{\text{Azuis}} > n'$. Como há mais bolas do que inteiros em $[n]$,

há duas bolas com o mesmo número

EX: SE $A \subseteq [n]$ É LIVRE DE SOMA, ENTÃO $|A| \leq \lceil n/2 \rceil$

PROVA: VAMOS PROVAR QUE SE $\underline{|A| > \lceil \frac{n}{2} \rceil}$, ENTÃO A NÃO É LIVRE DE SOMA

SEJA $n' = \max A \leq n$ $\quad \hookrightarrow |A| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$

DEFINA $B = \{n' - a : a \in A\} \setminus \{0\}$ $\quad$ NOTE QUE $\underline{|B| = |A| - \underline{1}} \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil \geq \lceil \frac{n'}{2} \rceil$

LOGO, $\underset{\text{VERMELHAS}}{|B|} + \underset{\text{AZUIS}}{|A|} \geq \lceil \frac{n'}{2} \rceil + \lceil \frac{n'}{2} \rceil + 1 > n'$.

PELO PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS,
COMO HÁ MAIS BOLAS DO QUE INTEIROS EM $[n]$,
HÁ DUAS BOLAS COM O MESMO NÚMERO

$\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$. $\quad$ SEJA $x \in A \cap B$

COMO $\underline{x \in B}$, $\underset{\text{EXISTE}}{\exists}$ $\underline{a \in A}$ T.Q. $x = n' - a \Rightarrow \overset{\in A}{x} + \overset{\in A}{a} = n' \in A$

LOGO, A NÃO É LIVRE DE SOMA, UMA CONTRADIÇÃO ∎

DEF: Um conjunto $A \subseteq [n]$ é livre de divisores se $\forall\, x, y \in A$ temos $x \nmid y$

não divide

EX: Conjunto de números primos em $[n]$

EX: $n = 20$, primos em $[20]$: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$

EX: $A = \{0, 2, 4\}$. Como $2 \mid 4$, então A não livre-de-divisores

EX: Fixe n. Seja $A = [n+1, 2n]$. A é livre de divisores

Prova: Se $a \in A$, então $a \geq n+1$. Logo $2a \geq 2(n+1) = 2n+2 > 2n$.
Portanto $2a \notin A$. Logo $k \cdot a \notin A$. Assim A é livre de divisores

EX: Se $A \subseteq [2n]$ é livre de divisores, então $|A| \leq n$.

Prova: Para cada ímpar x em $[2n]$ crie uma caixa C_x. Há n caixas

Para cada $y \in A$, escreva $y = 2^k \cdot m$, em que $k \geq 0$, e m é ímpar
e coloque y na caixa m.

Ex: Se $A \subseteq [2n]$ é livre de divisores, então $|A| \leqslant n$.

Prova: Para cada ímpar x em $[2n]$ crie uma caixa C_x. Há n caixas

Para cada $y \in A$, escreva $y = 2^K \cdot m$, em que $K \geqslant 0$, e m é ímpar e coloque y na caixa m.

Todo número inteiro é produto de uma potência de 2 e um ímpar

AF: Não pode ter dois números na mesma caixa.

Prova: Suponha, por contradição, que $y_1, y_2 \in C_x$, $y_1 \neq y_2$.

Então $\exists\, K_1, K_2$ t.q. $y_1 = 2^{K_1} \cdot x$ e $y_2 = 2^{K_2} \cdot x$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $K_1 > K_2$

Isso implica que $y_2 \mid y_1$ (Ex: $K_1 = 3 > 2 = K_2$, $\underline{y_1 = 8 \cdot x}$ e $\underline{y_2 = 4x}$)

divide

Então $|A| \leqslant n$

∎

Exercício: Reescrever a prova usando PCP

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

SEJA $A \subseteq \mathbb{N}$ T.Q.

1). $1 \in A$ (CASO BASE)

2) PARA TODO $n \in A$, TEMOS $n+1 \in A$ (PASSO INDUTIVO)

ENTÃO $A = \mathbb{N}$.

EX: SEJA $c \neq 0$. ENTÃO $\forall n \in \mathbb{N}$, TEMOS $\sum_{i=1}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - c}{c-1}$ PROG. GEOMÉTRICA

PROVA: SEJA

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - c}{c-1} \right\}$$

1) $\sum_{i=1}^{1} c^i = c = \frac{c^2 - c}{c-1} = \frac{c(c-1)}{c-1}$. LOGO $1 \in A$.

2) SEJA $n \in A$. LOGO $\sum_{i=1}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - c}{c-1}$.

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

SEJA $A \subseteq \mathbb{N}$ T.Q.

1). $1 \in A$ (CASO BASE)

2) PARA TODO $n \in A$, TEMOS $n+1 \in A$ (PASSO INDUTIVO)

ENTÃO $A = \mathbb{N}$.

EX: SEJA $c \neq 0$. ENTÃO $\forall n \in \mathbb{N}$, TEMOS $\sum_{i=1}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - c}{c-1}$ PROG. GEOMÉTRICA

PROVA: SEJA

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - c}{c-1} \right\}$$

1) $\sum_{i=1}^{1} c^i = c = \frac{c^2 - c}{c-1} = \frac{c(c-1)}{c-1}$. LOGO $1 \in A$.

2) SEJA $n \in A$. LOGO $\sum_{i=1}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - c}{c-1}$. (HIPÓTESE DE INDUÇÃO)

$$\sum_{i=1}^{n+1} c^i = c^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} c^i = c^{n+1} + \frac{c^{n+1} - c}{c-1} = \frac{c^{n+1}(c-1) + c^{n+1} - c}{c-1} = \frac{c^{n+2} \cancel{- c^{n+1}} + \cancel{c^{n+1}} - c}{c-1}$$

$$= \frac{c^{n+1+1} - c}{c-1}.$$

LOGO, $n+1 \in A$. Pelo PRINCÍPIO DA INDUÇÃO $A = \mathbb{N}$.

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA FORTE

SEJA $A \subseteq \mathbb{N}$ T.Q.

1). $1 \in A$ (CASO BASE)

2) PARA TODO $n \in A$, TEMOS $n+1 \in A$ (PASSO INDUTIVO)

ENTÃO $A = \mathbb{N}$.

SEJA $A \subseteq \mathbb{N}$ T.Q.

1') $1 \in A$ (CASO BASE)

2') SE $\forall n' \in \mathbb{N}$ T.Q. $n' < n$, TEMOS $n' \in A$, ENTÃO $n \in A$. (PASSO INDUTIVO)

= SE $\{1, \dots, n-1\} \in A$, ENTÃO $n \in A$

ENTÃO $A = \mathbb{N}$.

EX: TODO NÚMERO NATURAL MAIOR QUE 1 É PRODUTO DE UM OU MAIS NÚMEROS PRIMOS.

PROVA: SEJA $\mathbb{P}$ O CONJ. DE NÚMEROS PRIMOS.

SEJA $A = \left\{ n \in \mathbb{N} : n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p} , \text{ COM } a_p \geq 0 \right\}$

↳ CONJ. DOS NÚMEROS QUE SÃO PRODUTOS DE PRIMOS.

1') SE $n = 2$, ENTÃO $n = 2^1$. COMO $2 \in \mathbb{P}$, ENTÃO $2 \in A$. (CASO BASE)

2') SUPONHA QUE $n > 2$ E QUE $\forall m$ COM $m < n$, TEMOS $m \in A$.

SE $n \in \mathbb{P}$, ENTÃO $n = n^1$. LOGO $n \in A$.

EX: TODO NÚMERO NATURAL MAIOR QUE 1 É PRODUTO DE UM OU MAIS NÚMEROS PRIMOS.

PROVA: SEJA $\mathbb{P}$ O CONJ. DE NÚMEROS PRIMOS.

```
PROD = 1
FOR p ∈ ℙ
    PROD = PROD · p^(a_p)
```

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} c_i = c_1 \cdot c_2 \cdots c_m$$

SEJA $A = \left\{ n \in \mathbb{N} : n = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{a_p} , \text{ COM } a_p \geqslant 0 \right\}$

↳ CONJ. DOS NÚMEROS QUE SÃO PRODUTOS DE PRIMOS.

$$\sum_{a\in A} c_a$$

```
SOMA = 0
FOR a ∈ A
    SOMA = SOMA + c_a
```

1') SE $n=2$, ENTÃO $n = 2^1$. COMO $2 \in \mathbb{P}$, ENTÃO $2 \in A$.

2') SUPONHA QUE $n > 2$ E QUE $\underline{\forall m \text{ COM } m < n, \text{ TEMOS } m \in A}$. $= \{1, \ldots, n-1\} \subseteq A$

CASO 1. SE $n \in \mathbb{P}$, ENTÃO $n = n^1$. LOGO $n \in A$. } CB

CASO 2. CASO CONTRÁRIO, $n = l_1 \cdot l_2$ COM $l_1, l_2 < n$.

COMO $l_1, l_2 < n$, TEMOS $l_1 = \prod_{p\in\Pi} p^{a_p}$ E $l_2 = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{b_p}$ }. HI

CONTRA EXEMPLO MÍNIMO

PRINCÍPIO DA BOA ORDEM

PORTANTO

$$n = l_1 \cdot l_2 = \left(\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{a_p}\right) \cdot \left(\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{b_p}\right) = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{a_p} \cdot p^{b_p} = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{a_p+b_p}$$

LOGO $n = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{c_p}$ COM $c_p = a_p + b_p$ E, PORTANTO, $p \in A$.

PELO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO, TEMOS QUE $A = \{2, 3, \ldots\}$.

CONTAGEM DUPLA

DOUBLE COUNTING

- CONTAR UM CONJUNTO DE DUAS FORMAS

$$\mathcal{P}_k(n) \cap \mathcal{P}_\ell(n) = \emptyset$$

$$k \neq \ell$$

EX: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

POWER SET

CONJ. PARTES

PROVA: SEJA $\mathcal{P}(n) = \{A \subseteq [n]\}$ E $\mathcal{P}_k(n) = \{A \subseteq [n] : |A| = k\} = \binom{[n]}{k}$

NOTE QUE $\underline{\mathcal{P}(n) = \bigodot_{i=0}^{n} \mathcal{P}_i(n)}$ E $|\mathcal{P}_k(n)| = \binom{n}{k}$

$$|\mathcal{P}(n)| = \sum_{i=0}^{n} |\mathcal{P}_k(n)| = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k}$$

POR OUTRO LADO, CADA ELTO DE $[n]$ PODE ESTAR OU NÃO ESTAR EM $A \in \mathcal{P}(n)$

$$\underbrace{(0 \text{ ou } 1, 0 \text{ ou } 1, \ , \ , \ \ldots, \ )}_{n \text{ ENTRADAS}}$$

2^n

$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

$\mathbb{Z}_2^n = \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$

EX: $n = 10$ $\quad \underline{A = \{2, 3, 7\}}$ ~~⇝~~ $v_A = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$

$v_A = (1, 0, 1, 1, 0 0 0, 1, 1, 1) \rightsquigarrow A = \{1, 3, 4, 8, 9, 10\}$

DEF: Dado conjunto $E \subseteq \mathcal{P}(n)$, denotamos por $d_E(u)$ o número de elementos de E que contêm u.

↳ GRAU

DEGREE

Ex: $E = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{7,8,9\}\}$, $d_E(1) = 2$, $d_E(3) = 1$. $d_E(10) = 0$

Ex: Sejam k e $n \in \mathbb{N}$ com $1 \leq k \leq n$.

Se $E \subseteq \binom{[n]}{k}$, então $\sum_{u \in [n]} d_E(u) = k \cdot |E|$

HANDSHAKE LEMMA

$\{1,2\} \times \{1,3,5\}$
$= \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,1), (2,3), (2,5)\}$

Prova: Considere o conjunto

$$S = \{(u, e) \in [n] \times E : u \in e\}$$

Fixado $u \in [n]$, u está em quantos pares de S? $d_E(u)$

Logo $|S| = \sum_{u \in [n]} d_E(u)$

EX: SEJAM k E $n \in \mathbb{N}$ COM $1 \leqslant k \leqslant n$.

SE $E \subseteq \binom{[n]}{k}$, ENTÃO $\sum_{u \in [n]} d_E(u) = k \cdot |E|$

HANDSHAKE LEMMA

$\{1,2\} \times \{1,3,5\}$
$= \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,1), (2,3), (2,5)\}$

PROVA: CONSIDERE O CONJUNTO

$$S = \{(u, e) \in [n] \times E : u \in e\}$$

FIXADO $u \in [n]$, u ESTÁ EM QUANTOS PARES DE S? $d_E(u)$

LOGO $|S| = \sum_{u \in [n]} d_E(u)$

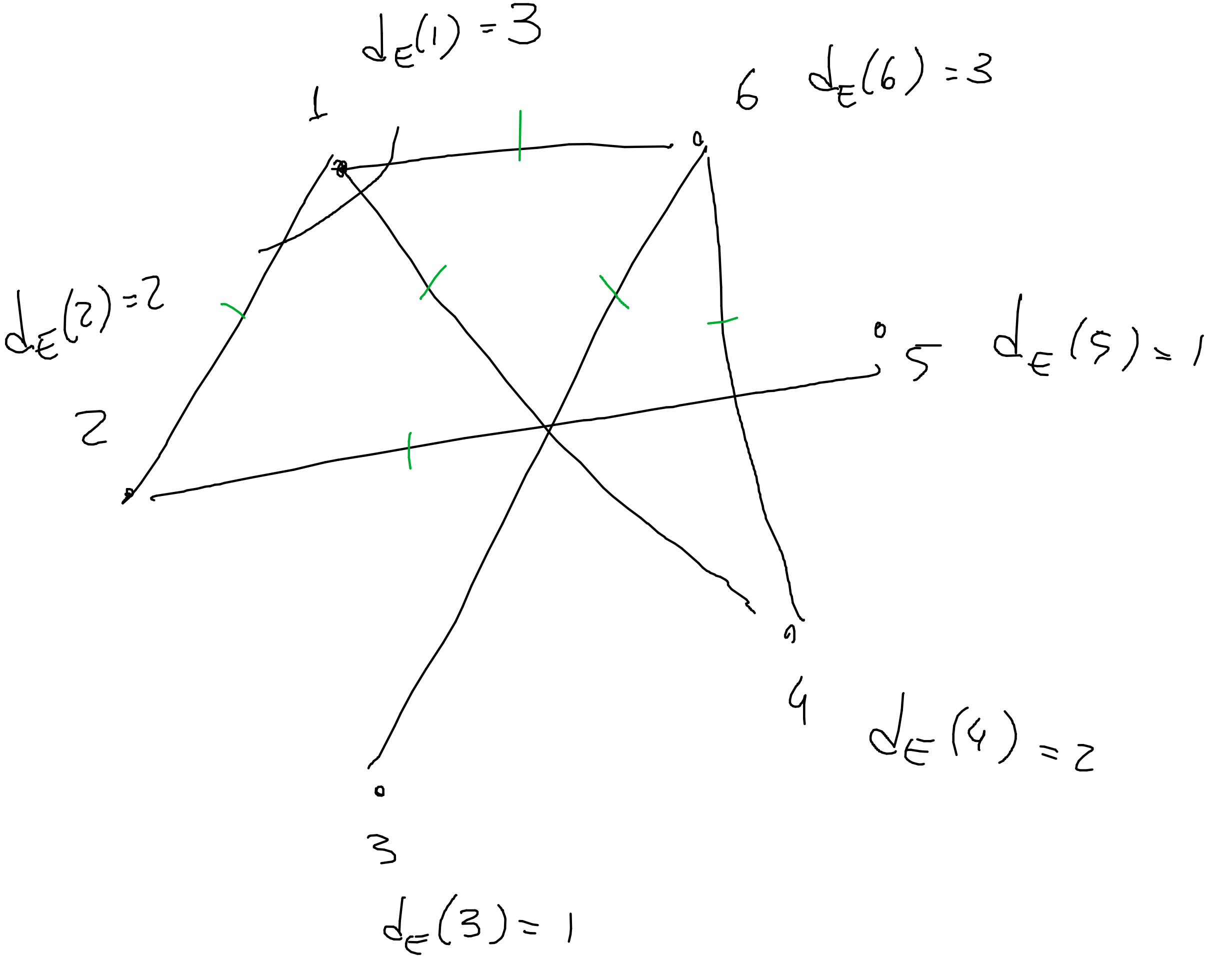
POR OUTRO LADO, $e \in E$ ESTÁ EM QUANTOS PARES DE S? k

LOGO, $|S| = \sum_{e \in E} k = k|E|$

$e = \underbrace{\{7, x, 25, 1000\}}_{4}$: $(7, e), (x, e), (25, e), (1000, e)$

EX: SEJAM $n \in \mathbb{N}$ COM $1 \leqslant k \leqslant n$.

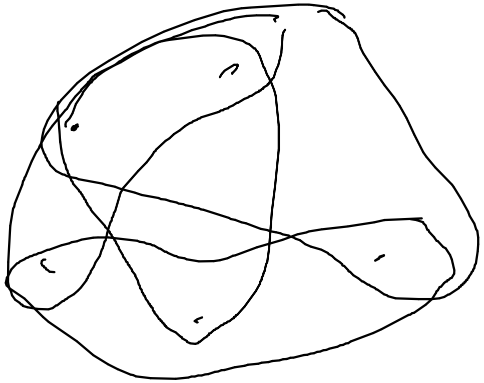
SE $\underline{E \subseteq \binom{[n]}{2}}$, ENTÃO $\displaystyle\sum_{u \in [n]} d_E(u) = 2 \cdot |E|$



$|E| = 6$

$$\sum_{u \in [6]} d_E(u) = 3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 3$$

$$= 12 = 2 \cdot 6$$



Ex: Se $E \subseteq \binom{[n]}{3}$ é uma família t.q. $|A \cap B| \leq 1, \ \forall A,B \in E$

Então $|E| \leq \dfrac{n^2 - n}{6}$

Prova: Considere o conj. $R = \{(A, \{u,v\}) : A \in E \text{ e } u,v \in A\}$

Ex: Se $\{a,b,c\} = A \in E$ então $(A, \{a,b\}), (A, \{a,c\}), (A, \{b,c\}) \in R$.

Cada $A \in E$ está em precisamente três pares de R.

Logo, $|R| = \sum_{A \in E} 3 = 3|E|$

Por outro lado, se $u,v \in [n]$ então $\{u,v\}$ está em no máximo um par de R

Porqué $|A \cap B| \leq 1, \ \forall A,B \in E$

Logo $|R| = \sum_{\{u,v\} \in \binom{[n]}{2}} d(u,v)^{\in\{0,1\}} \leq \sum_{\{u,v\} \in \binom{[n]}{2}} 1 = \binom{n}{2} = \dfrac{n^2-n}{2}$

$\Rightarrow 3|E| = |R| \leq \dfrac{n^2-n}{2} \Rightarrow |E| \leq \dfrac{n^2-n}{6}$

RECORRÊNCIAS

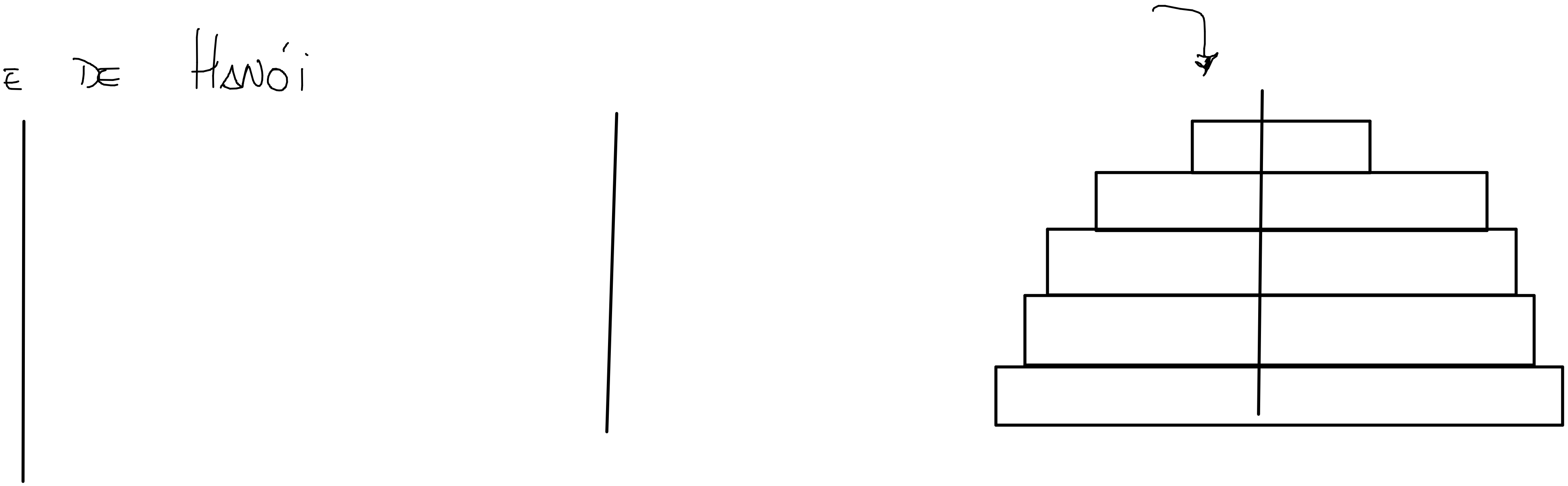
$f(n) = n!$

$n! = n \cdot (n-1)!$

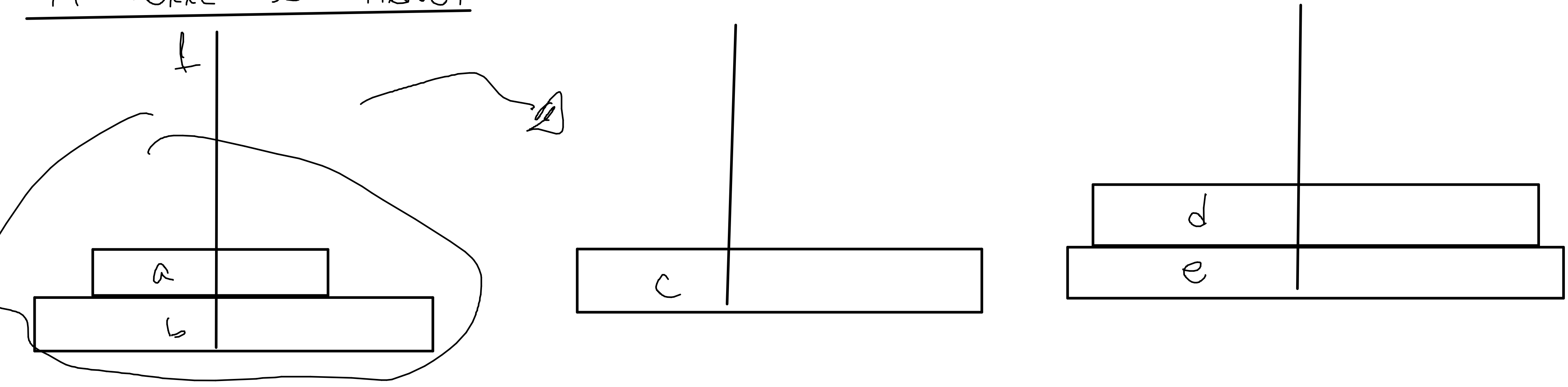
$f(1) = 1$

$f(n) = n \cdot \underline{f(n-1)}$

A TORRE DE HANÓI



A TORRE DE HANÓI



T_n = O NÚMERO DE OPERAÇÕES P/ MUDAR TODOS OS DISCOS DE PILHA

T_{n-1}

$$T_n = \overset{\text{MOVER a-d P/ PILHA 1}}{\underline{T_{n-1}}} \; \overset{\text{MOVER e P/ PILHA 2}}{\underline{+\,1}} + \overset{\text{MOVER a-d P/ PILHA 2}}{T_{n-1}} = 2T_{n-1} + 1$$

$T_1 = 1$

$T_n = 2T_{n-1} + 1$

$T_n = 2^n - 1$

n	1	2	3	4	...
T_n	1	3	7	15	

DEFINIÇÃO DE T_n

$T_1 = 1$

$T_n = 2T_{n-1} + 1$

n OPERAÇÕES

FORMA FECHADA

1/2 OPERAÇÕES

PROPOSIÇÃO: $T_n = \overbrace{2^n - 1}$

O NOTAÇÃO ASSINTÓTICA

PROVA: POR INDUÇÃO.

$$A = \{ n \in \mathbb{N} : T_n = 2^n - 1 \}$$

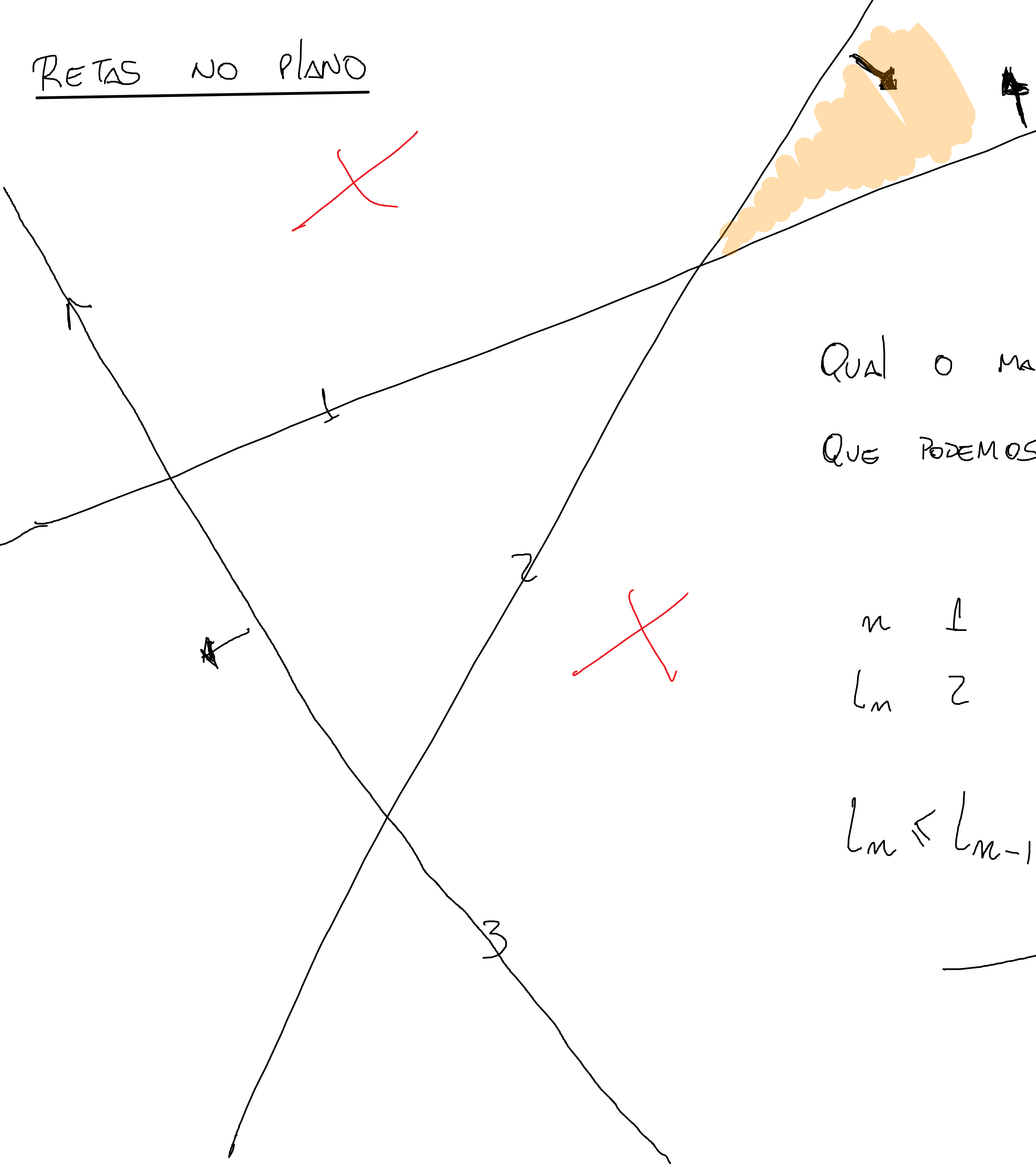
CASO BASE: $1 \in A$ PORQUE $T_1 \overset{DEF}{=} 1 = 2^1 - 1$

SUPONHA QUE $n-1 \in A$. OU SEJA $T_{n-1} = 2^{n-1} - 1$.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: $n-1 \in A \Rightarrow T_{n-1} = 2^{n-1} - 1$

PASSO INDUTIVO: $T_n \overset{DEF}{=} 2T_{n-1} + 1 \overset{HI}{=} 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} - 2 + 1 = 2^n - 1$ $\blacksquare$

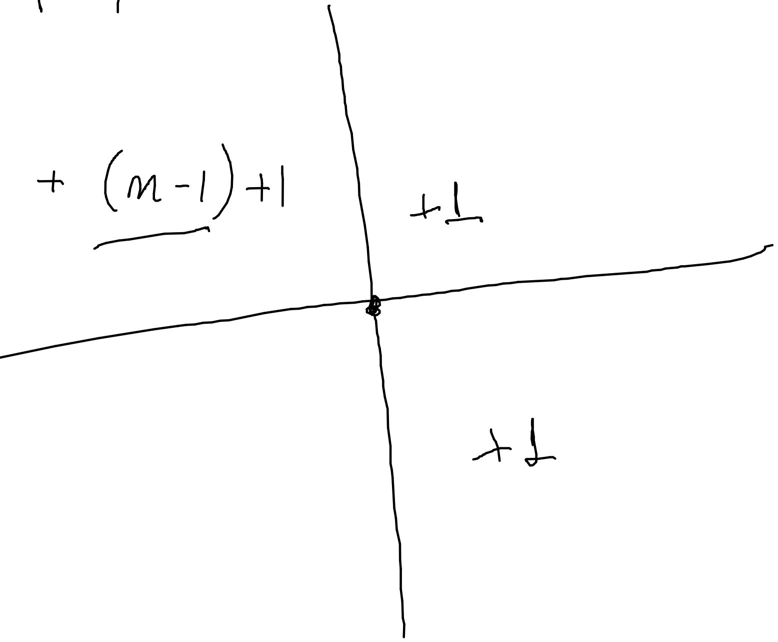
RETAS NO PLANO



QUAL O MAIOR NÚMERO DE REGIÕES l_n QUE PODEMOS DIVIDIR O PLANO COM n RETAS?

n	1	2	3	4
l_n	2	4	7	

$$l_n \leq l_{n-1} + \underline{(n-1)} + 1$$



QUAL O MAIOR NÚMERO DE REGIÕES L_n QUE PODEMOS DIVIDIR O PLANO COM n RETAS?

n	1	2	3	4
L_n	2	4	7	

$T_1 = 2$

$$L_n = L_{n-1} + \underbrace{(n-1)}_{} + 1 = L_{n-1} + n = \left(L_{n-2} + (n-1)\right) + n = \overbrace{\sum_{i=1}^{n} i}^{S_n} + 1$$

DE RETAS QUE INTERSECTAM A n-ÉSIMA RETAS.

$$= \underbrace{\underbrace{T_1 + 2}_{T_2} + 3}_{T_3} + \cdots + n$$

$$= 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$= S_n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

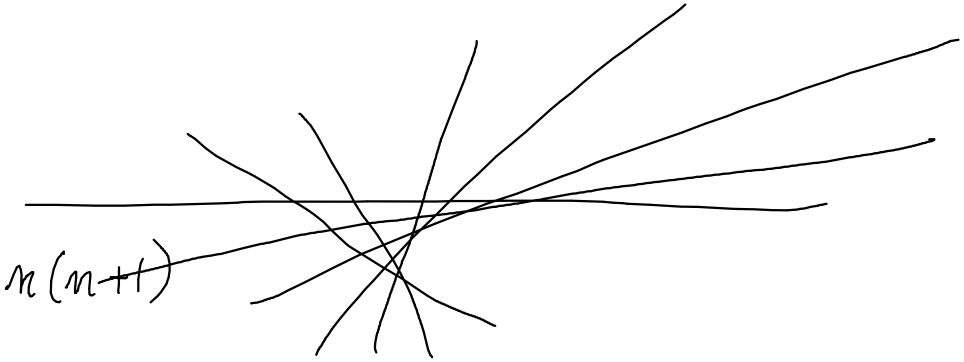
QUAL A FORMA FECHADA P/ L_n?

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1$$

$$2S_n = n+1 + n+1 + n+1 \quad n+1 + n+1 + n+1 = n(n+1)$$



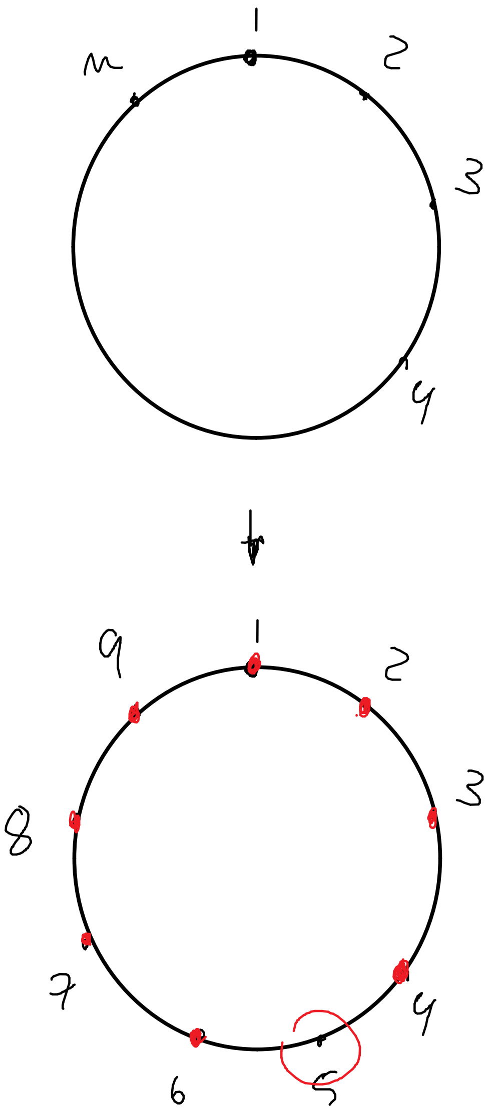
PROBLEMA DE JOSEFUS

⇝ HÁ n PESSOAS ORGANIZADAS DE FORMA CIRCULAR

⇝ HÁ UMA REGRA DE ELIMINAÇÃO: PULA UM, MATA UM

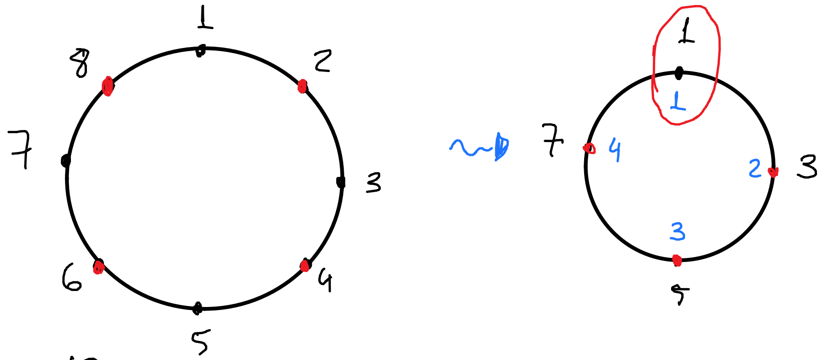
QUEM SOBREVIVE?

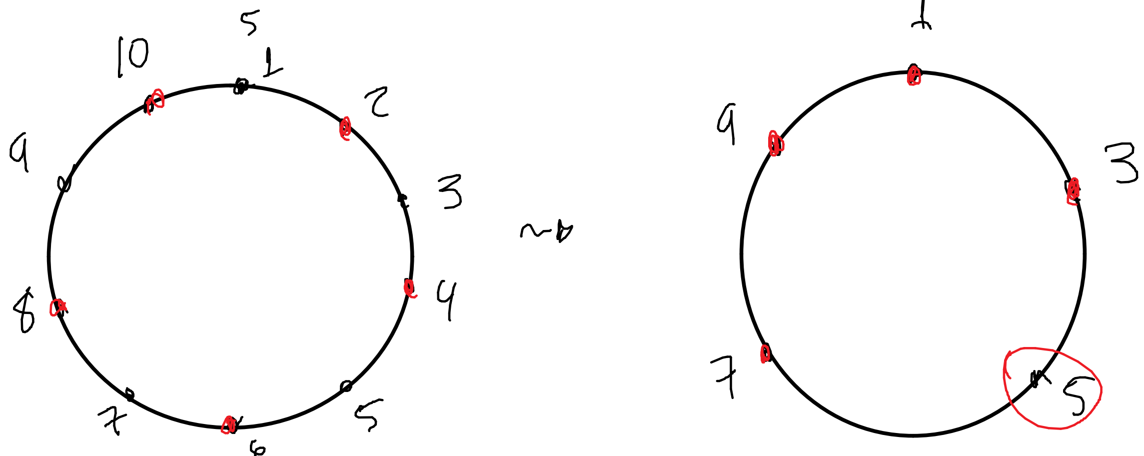
→ NA PRIMEIRA VOLTA ELIMINAMOS OS PARES



SOBREVIVE O 5

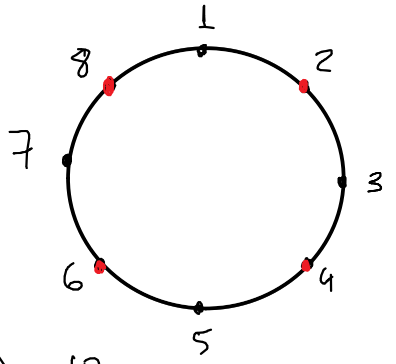
SUPONHA n É PAR

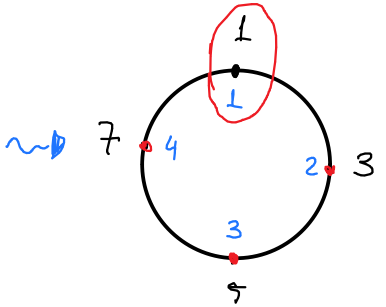




SUPONHA n É PAR

$$J(n) = 2J\left(\frac{n}{2}\right) - 1$$

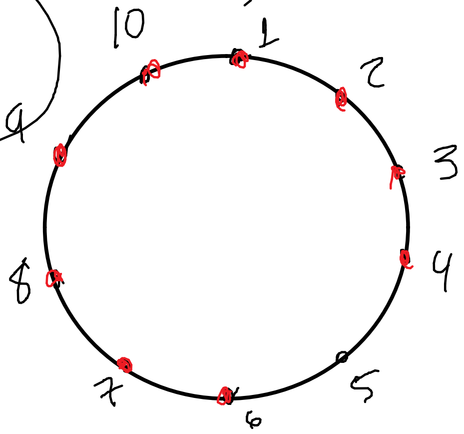


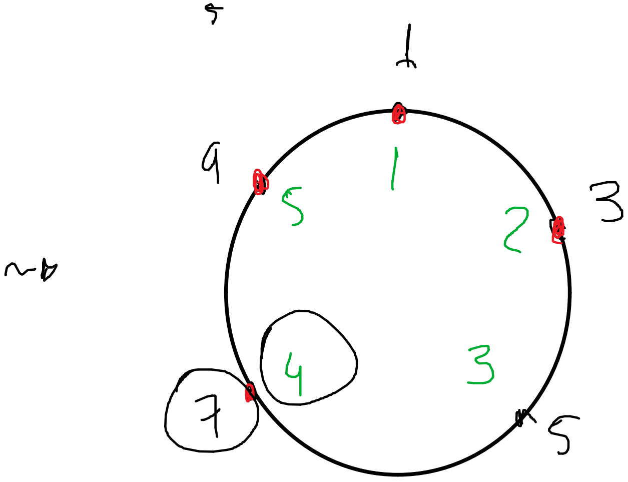


$$i = J\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$2i - 1$$

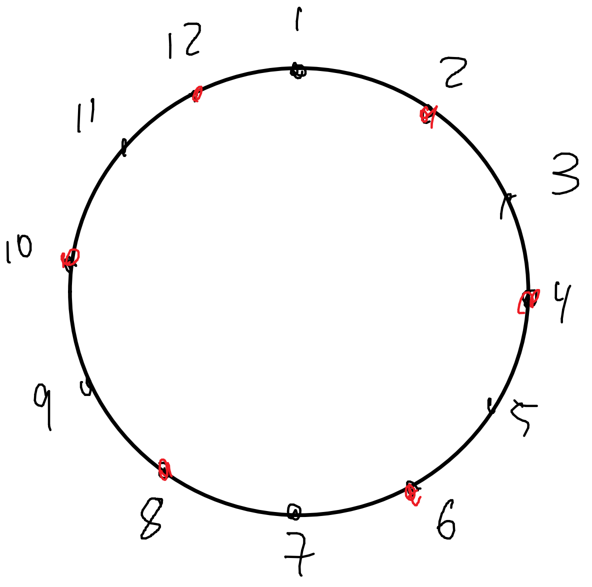
$J(10)$

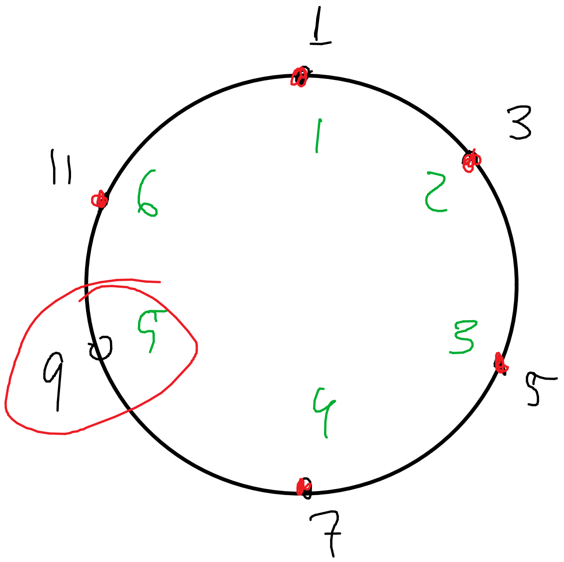




$J(5) = 3$

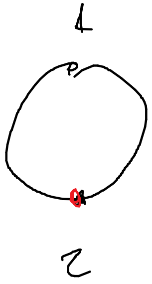
$$J(10) = 2J(5) - 1$$
$$= 5$$

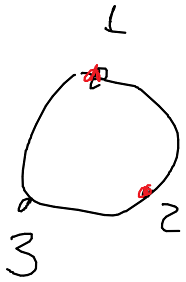


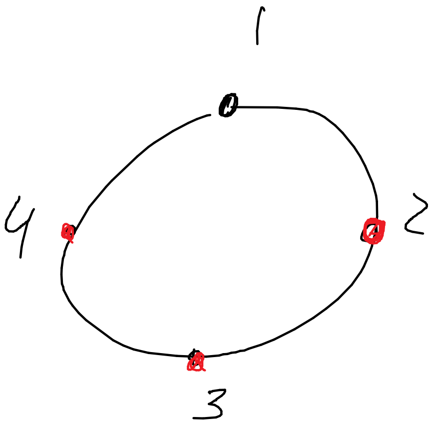


$J(6) = 5$

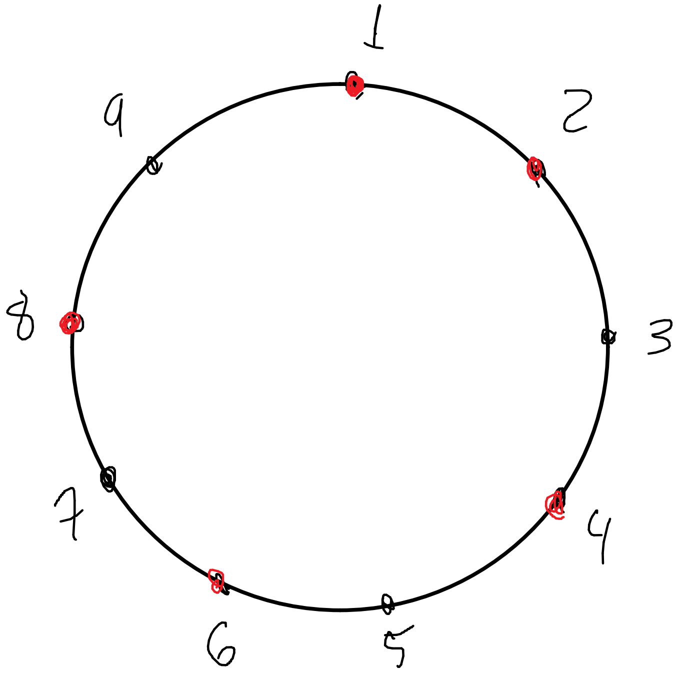
n	1	2	3	4
J	1	1	3	1

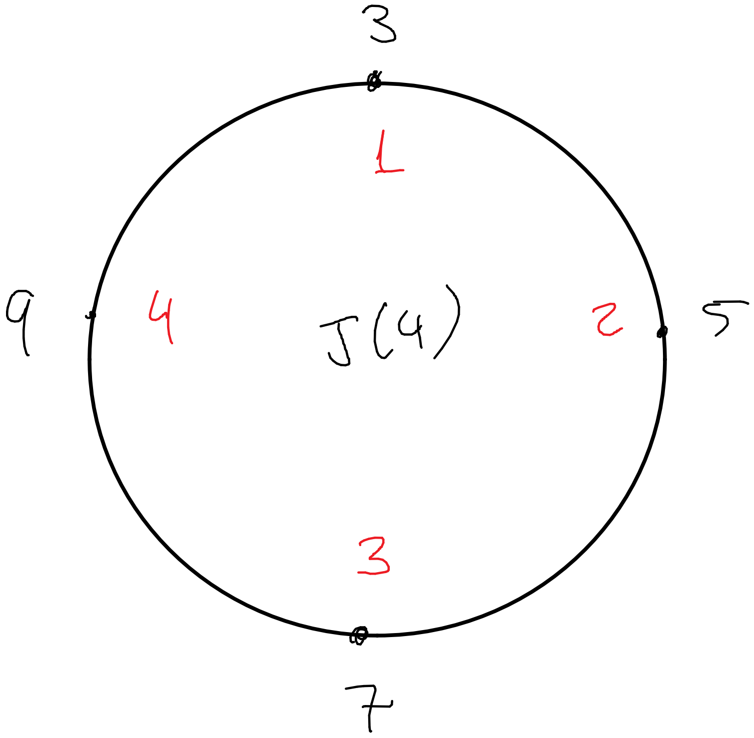






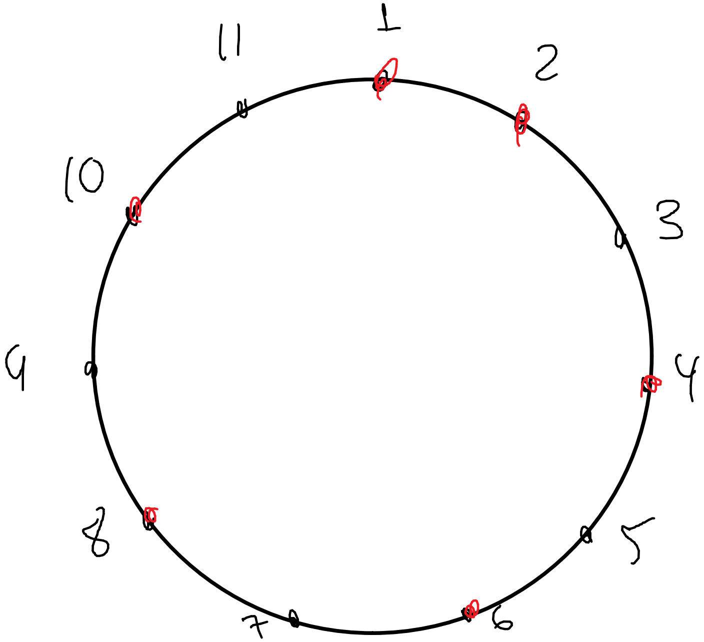
n é ímpar $J(n) = 2J\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1$





$J(9) = 2 \cdot J(4) + 1$

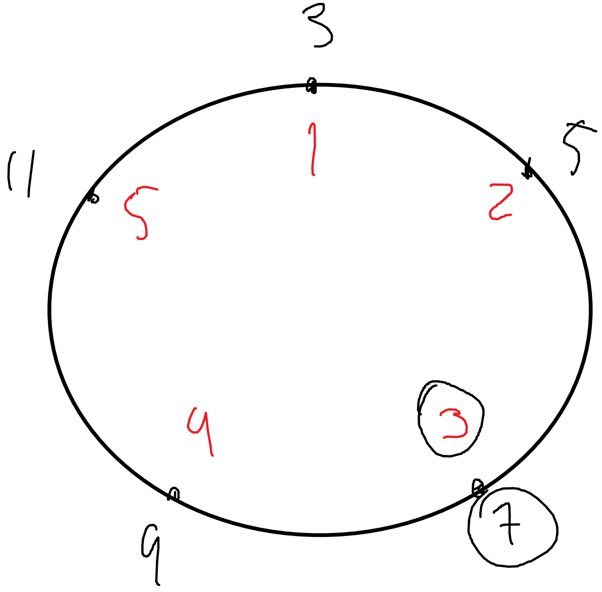
$2 \cdot i + 1$



$J(11) = 2 \cdot J(5) + 1$

$= 2 \cdot 3 + 1$

$= 7$



$J(1) = 1$

$$\begin{cases} J(n) = 2J\left(\frac{n}{2}\right) - 1 & n \text{ PAR} \\ J(n) = 2J\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 & n \text{ IMPAR} \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} J(2n) &= 2J(n) - 1 \\ J(2n+1) &= 2J(n) + 1 \end{aligned} \right)$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15